Q11-Mathematik-Wissen kompakt (mit CAS-Befehlen)

Gebrochen rationale Funktionen

Funktionen der Form $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{p(x)}}{\boldsymbol{q(x)}}$, p(x) und q(x) ganzrationale Funktionen n-ten Grades ($n \in \mathbb{N}$)

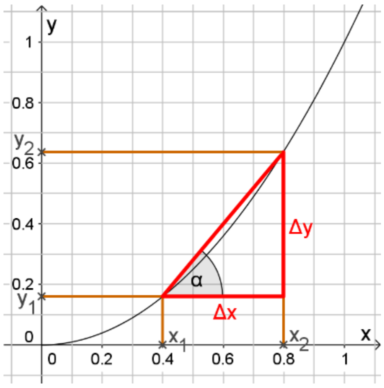
- Definitionslücke(n): q(x) = 0 CAS: solve(q(x)=0,x)
- Nullstelle(n): f(x) = 0 bzw. p(x) = 0 CAS: solve(f(x)=0,x)
- Asymptoten:
  - Polstelle x_0
    - senkrechte Asymptote
    - Bestimmung: q(x) = 0
    - Polstelle ohne Vorzeichenwechsel, wenn $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x) = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x) = -\infty$
    - Polstelle mit Vorzeichenwechsel, wenn $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x) = \pm\infty$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0 \pm} f(x) = \mp\infty$
    - Gleichung der Asymptote: $x = x_0$
- Waagrechte und schräge Asymptoten
  - z = Grad des Zählers (p); n = Grad des Nenners (q)
  - Bestimmung: $|x| \to \infty$
  - Unterscheidung:
    - z < n: x-Achse als waagrechte Asymptote
      Beispiel: $f(x) = \frac{2x}{x^2-1} \to \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ → Gleichung: y = 0
    - z = n: eine waagrechte Asymptote, die nicht die x-Achse ist
      Beispiel: $f(x) = \frac{2x^2}{4x^2-4} \to \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{2}{4-0} = \frac{1}{2}$ → Gleichung: y = $\frac{1}{2}$
    - z = n + 1: eine schräge Asymptote
      Beispiel: $f(x) = \frac{x^2+1{,}5x}{2x-1} \to$ Polynomdivision: CAS: propFrac(f(x)) $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x-1} + 1$
      ⇒ schräge Asymptote y = $\frac{1}{2}x + 1$
    - z > n + 1: keine Asymptote
- Faktorisieren:
  Definitionslücken/Polstellen und Nullstellen damit sofort erkennbar
  CAS: Aktion→ Umformungen → faktoris

Lokales und globales Differenzieren

- Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate

Gegeben ist f(x) = x^2

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
y	0	0,16	0,64	1,44	2,56	4



Wie schnell steigt der Graph zwischen x = 0,4 und x = 0,8?

Steigungsdreieck: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha)$

In unserem Beispiel: $m = \frac{0{,}64-0{,}16}{0{,}8-0{,}4} = \frac{0{,}48}{0{,}4} = 1{,}2$

Werden nun noch die Zahlen durch Buchstaben ersetzt, ergibt dies: $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_1-h)}{x_1-(x_1-h)}$

Das **m** heißt jetzt **Differenzenquotient**.

Mit der mittleren Änderungsrate berechnet man die Steigung eines Graphen zwischen zwei Punkten.

Steigung m der Geraden durch zwei Punkte P(a/f(a)) und Q(b/f(b)), die auf dem Graphen der Funktion f liegen: $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Anschaulich entspricht $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ der Steigung der Sekanten durch die Graphenpunkte P(a/f(a)) und Q(b/f(b)).

- Differentialquotient und lokale Änderungsrate

Der Differentialquotient ist der Grenzwert des Differenzenquotienten. Man berechnet hier die Steigung in einem einzelnen Punkt $P_0(x_0/f(x_0))$. Die Gerade durch den Punkt P(x0/f(x0)) mit der Steigung m heißt Tangente an den Graphen in P_0. Die Tangentensteigung m wird als Steigung des Graphen im Punkt P0(x0/f(x0)) bezeichnet.

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Differenzierbarkeit:

Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 (von negativer und positiver Seite aus) die gleiche lokale Änderungsrate $m = \lim_{x \to x_0 \pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ besitzt, so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar.

- Ableitungsfunktion/ Ableitungsregeln:
  - $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
  - Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$
  - Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$
  - Produktregel: $f(x) = g(x) \cdot h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
  - Quotientenregel: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[g(x)]^2}$
- Stammfunktion: Eine Funktion F heißt eine Stammfunktion der Funktion f, wenn F und f denselben Definitionsbereich besitzen und gilt: F'(x)=f(x)

Anwendung der Ableitung

- Anwendung der 1. Ableitung:
  - **Extremstellen** x_e: $f'(x)=0$:
    - **Maximum**: $f'(x_k) > 0 \;\&\; f'(x_g) < 0$, mit $x_k < x_e < x_g$
    - **Minimum**: $f'(x_k) < 0 \;\&\; f'(x_g) > 0$, mit $x_k < x_e < x_g$
    - **Terrassenpunkt**: $f'(x_k) > 0 \;\&\; f'(x_g) > 0$ oder $f'(x_k) < 0 \;\&\; f'(x_g) < 0$, mit $x_k < x_e < x_g$
  - **Monotonie**: Mit Hilfe des Vorzeichens der ersten Ableitung $f'(x)$ können Auskünfte über das Steigungsverhalten des Graphen der Funktion f gegeben werden:

$f'(x_0) < 0$	Der Graph von f fällt streng monoton an der Stelle x_0.
$f'(x_0) = 0$	Der Graph von f hat an der Stelle x_0 eine waagrechte Tangente.
$f'(x_0) > 0$	Der Graph von f steigt streng monoton an der Stelle x_0.

  - **Tangentengleichung t(x) = m·x + t an der Funktion f(x)**:
    Tangentensteigung m an der Stelle x_0: $m_t = f'(x_0)$
    y-Achsenabschnitt t durch Einsetzen der Steigung und des Punktes $(x_0|f(x_0))$ in t(x)
  - **Normalengleichung n(x) = m_n·x + n an der Funktion f(x)**:
    Normalensteigung an der Stelle x_0: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x)}$
    y-Achsenabschnitt n durch Einsetzen der Steigung und des Punktes $(x_0|f(x_0))$ in n(x)
  - **Newtonverfahren** (die Nullstelle der Tangente der Funktion f an dem Punkt $(x_0,f(x_0))$ liefert einen besseren Näherungswert für die Nullstelle der Funktion):
    Berechnen der Tangente:
    - Steigungsfaktor $m = f'(x_0)$
    - y-Achsenabschnitt: $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + t$, wobei $t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$
    - Tangente: $t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \;\Rightarrow\; t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$
    - Nullstelle x_1 der Tangente: $t(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
    - $\Rightarrow$ Allgemeiner Näherungswert: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Wichtige CAS-Befehle:
  - **Tangente**: tanLine(Term, Variable, Stelle)
  - **Normale**: normal(Term, Variable, Stelle)
  - **Maximum**: fMax(Term, Variable) bzw. fMax(Term, Variable, Anfangswert, Endwert)
  - **Minimum**: fMin(Term, Variable) bzw. fMin(Term, Variable, Anfangswert, Endwert)

Umkehrfunktion, Verkettung und natürliche Exponential- und Logarithmusfunktionen

CAS-Befehle:

- solve(Gleichung, Variable)
- $\frac{d}{dx}(Term)$; diff(Term, Variable, Ordnung)

Umkehrfunktionen

- Wann ist eine Funktion umkehrbar?
  $\rightarrow$ Wenn jedem y-Wert genau ein x-Wert zugeordnet wird. Wenn die Funktion streng monoton ist.
- Bezeichnung: f^{-1}
- Bestimmen des Funktionsterms $f^{-1}(x)$:
  - Auflösen der Funktionsgleichung y = f(x) nach x
  - Variablentausch x $\Leftrightarrow$ y, wobei nun y = $f^{-1}(x)$
  - CAS-Befehl: solve(f(x), x)
- $\mathbb{D}_f = \mathbb{W}_{f^{-1}}$
- $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f$
- Die Winkelhalbierende y = x ist die Symmetrieachse der Funktion mit der Umkehrfunktion.

Verkettung von Funktionen

Es gibt innere Funktion v(x) und äußere Funktionen u(x): (u ∘ v)(x) = u(v(x))

Die Definitionsmenge von u ∘ v besteht nur aus ein x ∈ $\mathbb{D}_v$, für die v(x) ∈ $\mathbb{D}_u$ ist.

Ableitung verketteter Funktionen: $f'(x) = (u \circ v)'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihre Ableitung

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{x}^{\frac{p}{q}} = \mathrm{a} \cdot \sqrt[q]{\mathrm{x}^p}$ mit a ∈ ℝ; p ∈ ℤ; q ∈ ℕ

$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \frac{p}{q} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{x}^{\frac{p}{q}-1}$

Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion

- $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx$ 2,718281828459…
- $f(x) = e^x \quad \Rightarrow$ Ableitung: $f'(x) = e^x$
- $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

- Die e-Funktion nimmt für x → ∞ viel stärker zu als jede Potenzfunktion.
- Die natürliche Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion
- $g(x) = \ln x$ mit $\in \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow$ Ableitung: $g'(x) = \frac{1}{x}$
- Die ln-Funktion nimmt für x → ∞ viel schwächer zu als jede Potenzfunktion.
- Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} (e^x - x^n) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x\to 0} (x^n \cdot lnx) = 0$$

Koordinatengeometrie im Raum

Definition: **Vektor** $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

Alle zueinander parallele, gleich lange und gleich gerichtete „Pfeile“ bezeichnet man als einen **Vektor**. Jeder Pfeil ist ein Repräsentant des Vektors. Ein **Gegenvektor** ist zum ursprünglichen Vektor parallel und gleich lang, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung. Fallen bei einem Vektor Fußpunkt und Spitze zusammen, so heißt dieser Vektor **Nullvektor**, geschrieben $\vec{\mathbf{0}}$. Beginnt der Repräsentant eines Vektors im Ursprung, bezeichnet man ihn als **Ortsvektor**.

Addition und Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (S-Multiplikation):

Für einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl r gilt: $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$.

Betrag eines Vektors:

CAS: Aktion → Vektor → norm(Vektor)

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Länge eines zu $\vec{a}$ gehörenden Repräsentanten. Der Betrag von $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

Hat ein Vektor die Länge 1, so nennt man ihn Einheitsvektor. Zu jedem Vektor $\vec{a}$ lässt sich sein Einheitsvektor $\vec{a_0}$ durch $\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ bilden, wobei $\vec{a}$ nicht Nullvektor sein darf.

CAS: Aktion → Vektor → unitV(Vektor)

Skalarprodukt, Winkel zwischen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

CAS: Aktion → Vektor → dotP(Vektor 1, Vektor 2)

Skalarprodukt: $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

Koordinatendarstellung: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zueinander orthogonal (senkrecht), wenn ihr Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ ergibt.

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zueinander parallel und gleich gerichtet ($\varphi = 0°$), wenn ihr Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zueinander parallel und entgegengesetzt gerichtet ($\varphi = 180°$), wenn ihr Skalarprodukt $\vec{a} \circ \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

- Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$: $\cos\varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2}}$

  CAS: Aktion → Vektor → angle(Vektor 1, Vektor 2)

Vektorprodukt/Kreuzprodukt, Parallelogrammfläche und Spatvolumen:

- **CAS**: Aktion → Vektor → crossP(Vektor 1, Vektor 2)
- Kreuzprodukt von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
- Es gilt: $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$
- Der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms beträgt $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$.
- Der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Spat hat das Volumen $V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$, für eine dreiseitige Pyramide ABCS gilt $V_{Pyramide} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \circ \overrightarrow{AS}\right|$

Kreis- bzw. Kugelgleichung:

- Gleichung in Vektorendarstellung: $\left(\vec{X} - \vec{M}\right)^2 = r^2$
- Gleichung in Koordinatendarstellung:

  Kreis: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$

  Kugel: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

Wahrscheinlichkeitsbegriff und Unabhängigkeit

(der CAS Rechner ist für dieses Kapitel nicht notwendig)

Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit

Eine Funktion P: A→ P(A) mit A ⊂ Ω und $\mathrm{P}(A) \in \mathbb{R}$ heißt **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn sie folgende Bedingungen, auch **Axiome von Kolmogorow** genannt, erfüllt:

Axiom I: $P(A) \geqq 0$
Axiom II: $P(\Omega) = 1$
Axiom III: Wenn $A \cap B = \{\}$, dann muss gelten: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

P(A) heißt Wahrscheinlichkeit von A.

Zusammengesetzte Ereignisse

Gegenereignis von A:	$\bar{A} = \Omega \backslash A$	(alles ohne A)
Ereignis A **und** Ereignis B:	$A \cap B$	(Schnittmenge von A und B)
Ereignis A **oder** Ereignis B:	$A \cup B$	(mind. eines der beiden Ereignisse)
Ereignis A **ohne** Ereignis B:	$A \backslash B = A \cap \bar{B}$	(Ereignis A ohne A∩ B)

Gesetze von de Morgan

Weder Ereignis A **noch** Ereignis B:	$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$	(Ω ohne die beiden Ereignisse A und B)
Nicht beide Ereignisse A und B **gleichzeitig**:	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	(Ω ohne die Schnittmenge von A und B)

Additionssatz

Für beliebige Ereignisse A und B gilt:

$$\boldsymbol{P(\mathrm{A} \cup B) = P(A) + P(B) - P(\mathrm{A} \cap B)}$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Zwei Ereignisse A und B heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$\boldsymbol{P(A) \cdot P(B) = P(\mathrm{A} \cap B)}$$

andernfalls nennt man A und B voneinander abhängig.

Bsp.: Gegeben P(A) = $\frac{2}{9}$; P(B) = $\frac{3}{9}$; $P(\mathrm{A} \cap B) = \frac{1}{9}$

$P(\mathrm{A} \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, da $\frac{1}{9} \neq \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9}$

Es folgt: A und B sind voneinander abhängig.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Unter der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ versteht man die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist.