Grundwissen

5. Jahrgangsstufe

Mathematik

1 Natürliche Zahlen

1.1 Große Zahlen und Zehnerpotenzen

eine Million	=	1 000 000	=	10^6
eine Milliarde	=	1 000 000 000	=	10^9
eine Billion	=	1 000 000 000 000	=	10^{12}

1.2 Zahlenmengen

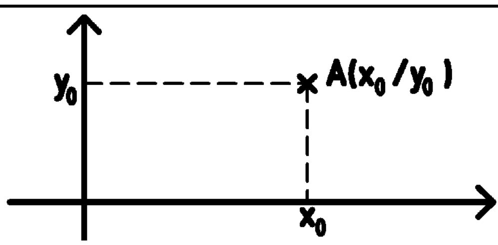
Menge der natürlichen Zahlen: $\mathbb{N}=\{1;2;3;4;5;...\}$
Menge der natürlichen Zahlen mit der Null: $\mathbb{N}_0=\{0;1;2;3;4;5;...\}$
Geschweifte Klammern machen deutlich, dass Zahlen zu einer Menge zusammengefasst werden.
$34\in\mathbb{N}_0$ „34 ist ein Element der Menge $\mathbb{N}_0$." $13\notin\{2;4;6;8;10;12;14;...\}$ „13 ist kein Element der Menge der geraden Zahlen."

2 Die ganzen Zahlen

2.1 Die Menge der ganzen Zahlen

Zur Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gehören die positiven Zahlen, die negativen Zahlen und die Zahl 0.
Die positiven Zahlen haben das Vorzeichen +.
Die negativen Zahlen haben das Vorzeichen –.

2.2 Koordinatensystem

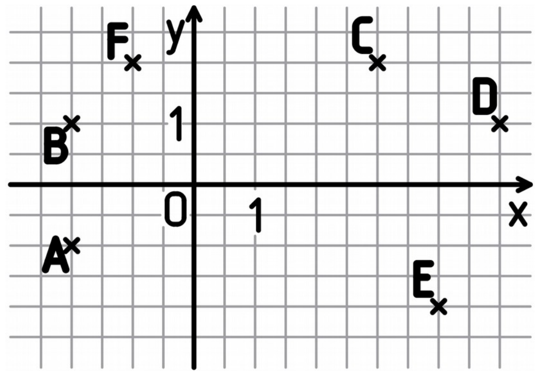


Beispiel:

Lies die Koordinaten von A, B und C ab.

A(−2/−1) ; B(−2/1) ; C(3/2)

Trage die Punkte D(5/1), E(4/-2) und F(-1/2) im KOSY ein.



2.3 Gegenzahl, Betrag

Gegenzahl zu einer Zahl ist die Zahl, die auf dem Zahlenstrahl zur Null symmetrisch liegt.
z. B.: Zur Zahl –2 ist 2 die Gegenzahl; zur Zahl 5 ist –5 die Gegenzahl.

Der Abstand einer Zahl a von der Zahl 0 heißt der Betrag von a.
Man schreibt dafür |a|

z. B.: $|6| = 6$; $|-5| = 5$; $|4-7| = |-3| = 3$

3 Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

3.1 Bezeichnungen beim Addieren und Subtrahieren

	Summe			
a	+	b	=	c
1. Summand	+	2. Summand	=	Wert der Summe
	Differenz			
a	−	b	=	c
Minuend	−	Subtrahend	=	Wert der Differenz

3.2 Terme

Terme bestehen aus Zahlen, Rechenoperationen und Klammern.
z. B.: $(34-7)+4\cdot 9$

Bei der Berechnung von Termen gilt für Reihenfolge der Rechenschritte:
1. Was in Klammern steht, wird zuerst berechnet
2. Potenzen vor Punktrechnung vor Strichrechnung

Klammern werden von innen nach außen berechnet.

Die zuletzt auszuführende Rechenart legt die Art des Terms fest.
z. B.: Der Term $(34-7)+4\cdot 9$ ist eine Summe.

3.3 Addieren und Subtrahieren ganzer Zahlen

Addieren ganzer Zahlen:

Gleiche Vorzeichen:	Verschiedene Vorzeichen:
1. Addiere die Beträge. 2. Gib der Summe das gemeinsame Vorzeichen.	1. Subtrahiere vom größeren Betrag den kleineren Betrag. 2. Gib der Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag.
z. B.:	z. B.:
$5 + 8 = 13$	$(+5) + (-8) = -3$
$(-5) + (-8) = -13$	$(-5) + (+8) = 3$

Subtrahieren ganzer Zahlen:
Subtrahieren einer Zahl bedeutet dasselbe wie Addieren ihrer Gegenzahl.
z. B.:

$(+5) - (+8) = 5 + (-8) = -3$

$(+5) - (-8) = 5 + 8 = 13$

3.4 Rechengesetze

Kommutativgesetz:
Für alle ganzen Zahlen a, b gilt: $a + b = b + a$

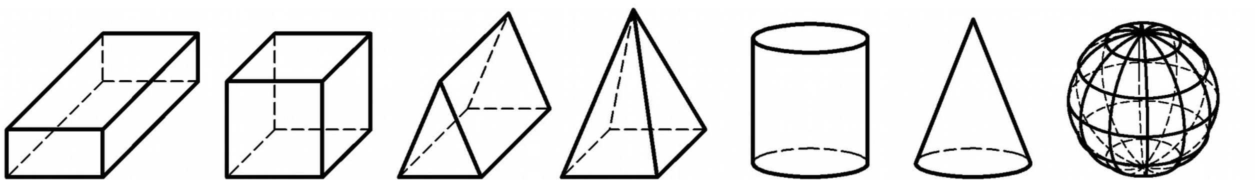
Assoziativgesetz:
Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt: $(a + b) + c = a + (b + c)$

Mit Rechengesetzen lassen sich Rechenvorteile ausnutzen.

Terme mit Plus- und Minusgliedern können stets als Summen aufgefasst werden.

Beim Vertauschen von Gliedern in einer Summe sind die Vorzeichen immer mitzunehmen.

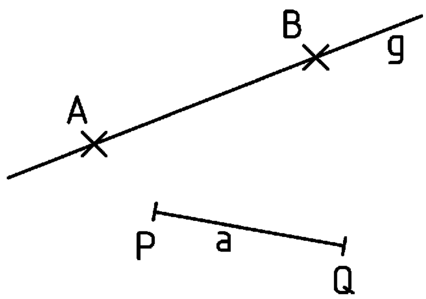
4 Geometrische Grundbegriffe



Quader | Würfel | Prisma | quadratische Pyramide | Zylinder | Kegel | Kugel

4.1 Punkte, Geraden, Strecken

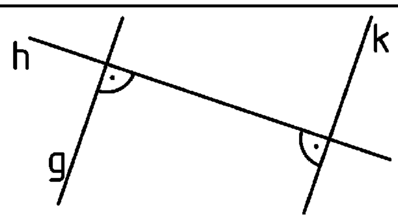
Punkte werden mit großen Buchstaben,
Geraden mit kleinen Buchstaben benannt.
Kurzschreibweisen:
Gerade: $g = AB$
Strecke: $a = [PQ]$
Länge der Strecke $a = \overline{PQ} = 2{,}5$ cm



4.2 Besondere gegenseitige Lage von Geraden

Gerade g steht senkrecht auf h: $g \perp h$

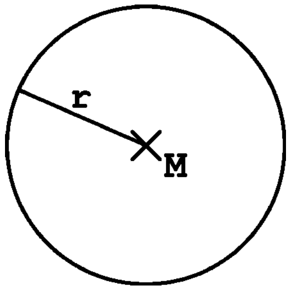
Gerade g ist parallel zu k: $g \| k$



4.3 Kreis

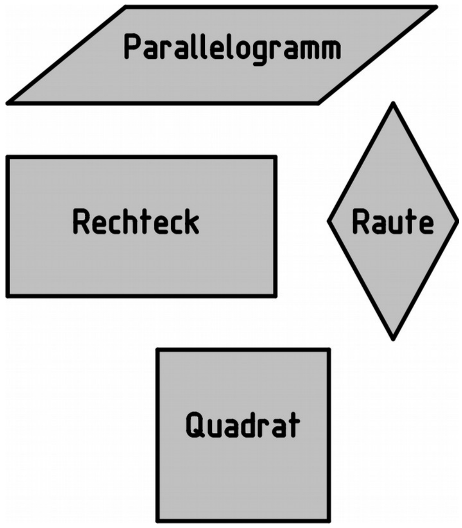
Ein Kreis wird durch seinen Mittelpunkt M und seinen Radius r festgelegt.

Die Punkte der Kreislinie haben vom Mittelpunkt genau den gleichen Abstand.



4.4 Vierecke

Im Parallelogramm
sind einander gegenüberliegende Seiten parallel.
Ein Rechteck
ist ein Parallelogramm, in dem die Seiten aufeinander senkrecht stehen.
Eine Raute
ist ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten.
Ein Quadrat
ist ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten, die aufeinander senkrecht stehen.

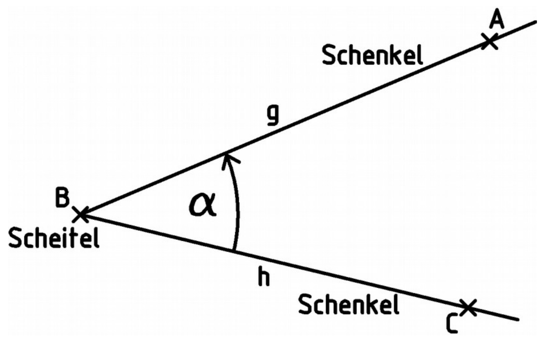


4.5 Winkel

Ein Winkel wird durch seinen Scheitel und seine Schenkel festgelegt.

Die Bezeichnung erfolgt mit griechischen Buchstaben (α, β, γ, …) oder über die Punkte (hier: $\sphericalangle$CBA) oder Geraden des Winkels (hier: $\sphericalangle$(h;g)).

Immer gegen den Uhrzeigersinn!



5 Multiplikation und Division ganzer Zahlen

5.1 Bezeichnungen beim Multiplizieren und Dividieren

	Produkt			
a	**·**	**b**	**=**	**c**
1. Faktor	·	2. Faktor	=	Wert des Produkts
	Quotient			
a	**:**	**b**	**=**	**c**
Dividend	:	Divisor	=	Wert des Quotienten

5.2 Rechengesetze

Kommutativgesetz: gilt nur für die Multiplikation!
Für alle ganzen Zahlen a, b gilt: $a \cdot b = b \cdot a$

Assoziativgesetz: gilt nur für die Multiplikation!
Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributivgesetz:
Für alle ganzen Zahlen a, b, c gilt:
$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$
$(a + b) : c = a : c + b : c$ (mit $c \neq 0$)
$(a - b) : c = a : c - b : c$ (mit $c \neq 0$)

5.3 Besondere Zahlen: 0 und 1

$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
$0 : a = 0$, **aber: Durch 0 kann man nicht dividieren!**
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
$a : 1 = a$

5.4 Potenz

Eine Potenz ist Kurzschreibweise für die mehrfache Multiplikation einer Zahl mit sich selbst:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^7$$

Dabei ist
4 die Basis
und
7 der Exponent.
Der Exponent gibt an, wie oft die Basis als Faktor auftritt.

5.5 Multiplizieren und Dividieren ganzer Zahlen

Multiplizieren zweier ganzer Zahlen:
1. Multipliziere die Beträge.
2. Bei gleichen Vorzeichen erhält das Produkt das Vorzeichen $+$, bei verschiedenen Vorzeichen erhält das Produkt das Vorzeichen $-$.

$(+5) \cdot (+3) = 15$; $(-5) \cdot (-3) = +15$

$(+5) \cdot (-3) = -15$; $(-5) \cdot (+3) = -15$

Dividieren zweier ganzer Zahlen:
1. Dividiere die Beträge.
2. Bei gleichen Vorzeichen erhält der Quotient das Vorzeichen $+$, bei verschiedenen Vorzeichen erhält der Quotient das Vorzeichen $-$.

$(+15) : (+3) = 5$; $(-15) : (-3) = +5$

$(+15) : (-3) = -5$; $(-15) : (+3) = -5$

Merke: Durch Null darf man nicht teilen.

6 Größen und ihre Einheiten

6.1 Bezeichnung von Größen

Jede Größe besteht aus Maßzahl und Maßeinheit, z. B. 4 kg, 9 min, 6 m

Längen:

1 km = 1 000 m
1 m = 10 dm
1 dm = 10 cm
1 cm = 10 mm

Massen:

1 t = 1 000 kg
1 kg = 1 000 g
1 g = 1 000 mg

Zeitdauern:

1 d = 24 h
1 h = 60 min
1 min = 60 s

Geldwerte:

1 € = 100 ct

6.2 Rechnen mit Größen

1. Vor dem Addieren und Subtrahieren müssen die Größen in die gleiche Einheit umgerechnet werden.
2. Eine Größe wird mit einer Zahl multipliziert (durch eine Zahl dividiert), indem man die Maßzahl mit der Zahl multipliziert (durch die Zahl dividiert) und die Einheit beibehält.
3. Der Quotient zweier Größen der gleichen Art (z. B. zweier Längen) ist eine reine Zahl.

Beispiele:

1. 3 m + 5 cm = 300 cm + 5 cm = 305 cm
2. 7,3 kg : 25 = 7300 g : 25 = 292 g
3. 5 h 40 min : 20 min = 340 min : 20 min = 17

6.3 Maßstab

Die Angabe Maßstab 1 : 200 in einem Plan bedeutet:
Die Länge in der Wirklichkeit beträgt das 200-fache der Länge im Plan.
Die Länge im Plan ist der 200. Teil der Länge in der Wirklichkeit.

Beispiel: Straßenkarte von Österreich

Bestimme mit Hilfe der 10km Linie unten links den Maßstab der Karte.

$$10\,km : 2\,cm = 10\,000\,m : 2\,cm =$$

$$= 1\,000\,000\,cm : 2\,cm = 500\,000$$

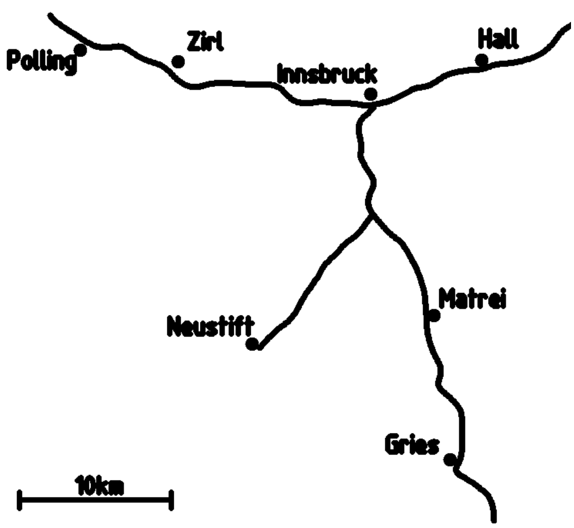
Maßstab ist 1 : 500 000

Bestimme die Länge der Fahrstrecke von Polling nach Gries. Rechne mit einem Maßstab von 1 : 500 000.

$$4\,cm + 5\,cm = \underline{9\,cm}$$

$$9\,cm \cdot 500\,000 = 4\,500\,000\,cm =$$

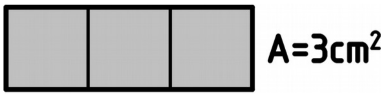
$$= 45\,000\,m = \underline{\underline{45\,km}}$$



7 Größen und ihre Einheiten

7.1 Flächeninhalte

Der Flächeninhalt A gibt an, wie groß eine Fläche ist.
A = 3 cm² bedeutet: Die Fläche ist dreimal so groß wie ein Zentimeterquadrat.



7.2 Einheiten bei Flächeninhalten

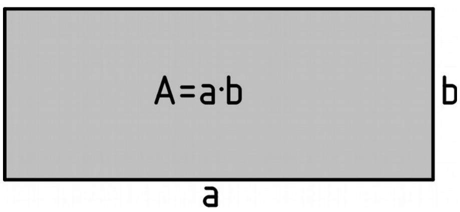
Zur Flächenmessung verwenden wir Quadrate mit den Seitenlängen:	Sie haben die Flächeninhalte:	
1 mm	1 mm²	Quadratmillimeter
1 cm	1 cm²	Quadratzentimeter
1 dm	1 dm²	Quadratdezimeter
1 m	1 m²	Quadratmeter
10 m	1 a	Ar
100 m	1 ha	Hektar
1 km	1 km²	Quadratkilometer

Umrechnungen:

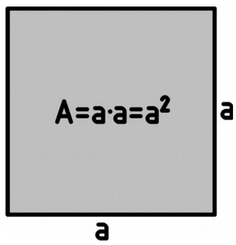
1 km² = 100 ha
1 ha = 100 a
1 a = 100 m²
1 m² = 100 dm²
1 dm² = 100 cm²
1 cm² = 100 mm²

7.3 Flächeninhalte von Rechtecken

Für Rechtecke gilt:



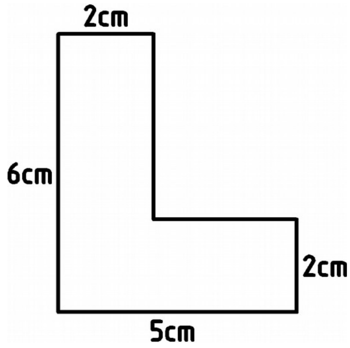
Für Quadrate gilt:



Flächeninhalt = Länge · Breite

Beispiel:

Bestimme den Flächeninhalt des L rechts durch Zerlegen und Addieren.



$$F=2\,cm\cdot 6\,cm+2\,cm\cdot 3\,cm=12\,cm^2+6\,cm^2=\underline{\underline{18\,cm^2}}$$

Bestimme den Flächeninhalt des L rechts mit der Abzieh-Methode.

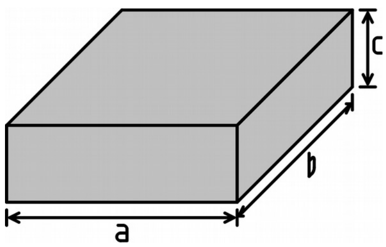
$$F=6\,cm\cdot 5\,cm-3\,cm\cdot 4\,cm=30\,cm^2-12\,cm^2=\underline{\underline{18\,cm^2}}$$

7.4 Oberflächeninhalte

Zur Bestimmung des Oberflächeninhalts O ermittelt man die Flächeninhalte der Begrenzungsflächen und addiert diese.

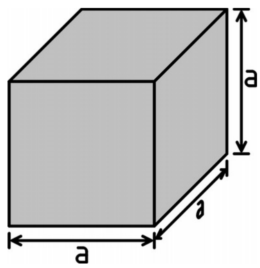
Quader:

$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$
$\quad = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$



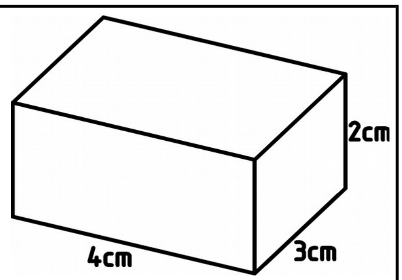
Würfel:

$O = 6 \cdot a \cdot a$
$\quad = 6 \cdot a^2$



Beispiel:

Bestimme den Oberflächeninhalt des Quaders rechts.



$$O=2\cdot 4\,cm\cdot 2\,cm+2\cdot 4\,cm\cdot 3\,cm+2\cdot 2\,cm\cdot 3\,cm=$$

$$=2\cdot 8\,cm^2+2\cdot 12\,cm^2+2\cdot 6\,cm^2=$$

$$=16\,cm^2+24\,cm^2+12\,cm^2=\underline{\underline{52\,cm^2}}$$