Grundwissen

8. Jahrgangsstufe

Mathematik

1 Proportionalität

1.1 Direkte Proportionalität

Eigenschaften:

Quotientengleichheit → Bei $\frac{y}{x}$ kommt immer das Gleiche raus; $\frac{y}{x}=q$

Zuordnungsvorschrift → $y=q\cdot x$

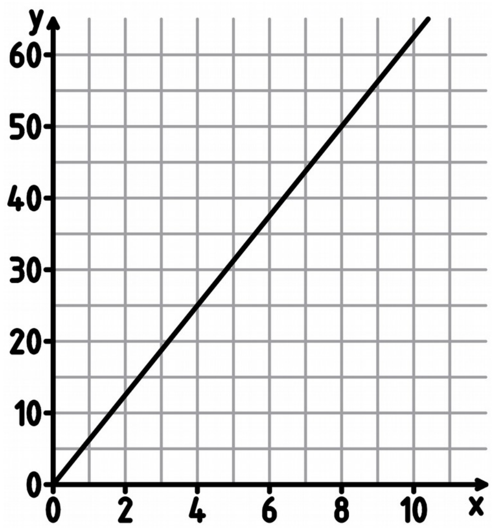
Diagramm → Ursprungsgerade

Beispiele:

In drei Minuten (x) läuft Egon 600m (y) . Stelle die Zuordnungsvorschrift auf!

$$q=\frac{600\text{m}}{180\text{s}}=\frac{10}{3}\frac{m}{s}\approx 3{,}3\frac{m}{s} \Rightarrow \underline{\underline{y=3\frac{1}{3}\frac{m}{s}\cdot x\approx 3{,}3\frac{m}{s}\cdot x}}$$

Bestimme aus dem Diagramm die Zuordnungsvorschrift!



$$q=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}=6{,}25$$

$$\underline{\underline{y=6\frac{1}{4}\cdot x=6{,}25\cdot x}}$$

1.2 Indirekte (umgekehrte) Proportionalität

Eigenschaften:

Produktgleichheit → Bei $y\cdot x$ kommt immer das Gleiche raus; $y\cdot x=p$

Zuordnungsvorschrift → $y=\frac{p}{x}$

Diagramm → Hyperbel

Beispiele:

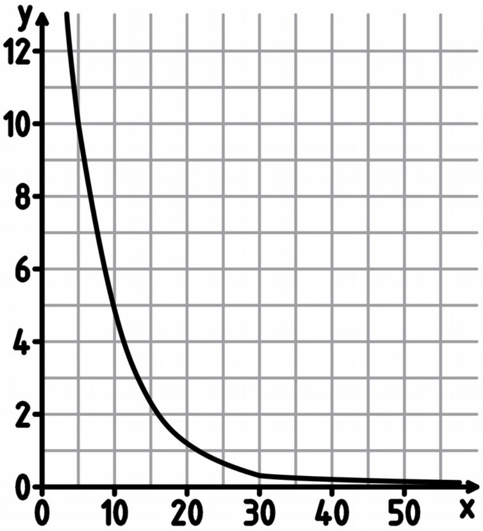
Bei einem Tempo von 4 m/s (x) braucht Egon für die 1000m-Strecke 4min10s (y). Stelle die Zuordnungsvorschrift auf!

$$p=4\frac{m}{s}\cdot 250\,s=1000\,m \Rightarrow \underline{\underline{y=\frac{1000\text{m}}{x}}}$$

Bestimme aus dem Diagramm die Zuordnungsvorschrift!

$p = 5 \cdot 10 = 50$

$y = \dfrac{50}{x}$



1.3 Kreis

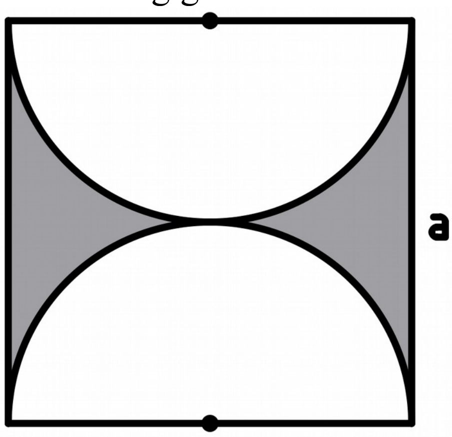
Kreiszahl → $\pi \approx 3{,}14$ **Umfang →** $U = 2 \cdot \pi \cdot r$ **Fläche →** $A = \pi \cdot r^2$

Beispiel:

Unten rechts ist ein Quadrat. Die markierten Punkte sind Mittelpunkte von Kreisen. Bestimme Umfang und Fläche der grau gefärbten Figur in Abhängigkeit von a!

$$U = 2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} + 2 \cdot a = (\pi + 2) \cdot a$$

$$A = a^2 - \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) a^2$$

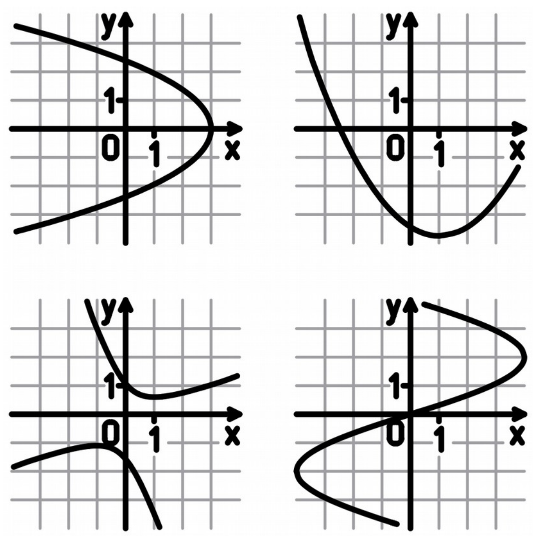


2 Funktionen

2.1 Graphen von Funktionen

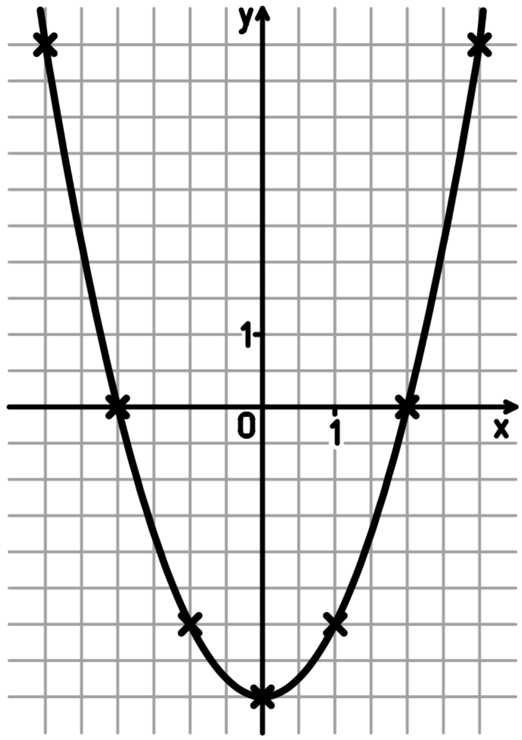
Beispiele:

Welcher Graph gehört zu einer Funktion? Begründe!



Nur der Graph rechts oben, denn bei den anderen gibt es x-Werte, für die mehrere y-Werte in Frage kommen.

Zeichne den Graphen der Funktion f(x) mit $f(x)=x^2-4$



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

2.2 Lineare Funktionen → Geradengleichungen

Funktionsgleichung: $f(x)=m\cdot x+t$

m → Steigung ; t → y-Achsenabschnitt

Zur Steigung: $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Beispiele:

Bestimme den Schnittpunkt der Geraden g ung h

$g(x)=-2x+3 \quad ; \quad h(x)=3x-7$

$$g(x)=h(x)$$
$$-2x+3=3x-7 \quad /+2x+7$$
$$10=5x \quad /:5$$
$$x=2$$

Einsetzen in g(x) gibt

$$y=-2\cdot 2+3=-1$$
$$\underline{\underline{S(2/-1)}}$$

Bestimme die Gleichung der Gerade h durch die Punkte P(2/3) und Q(5/-6)!

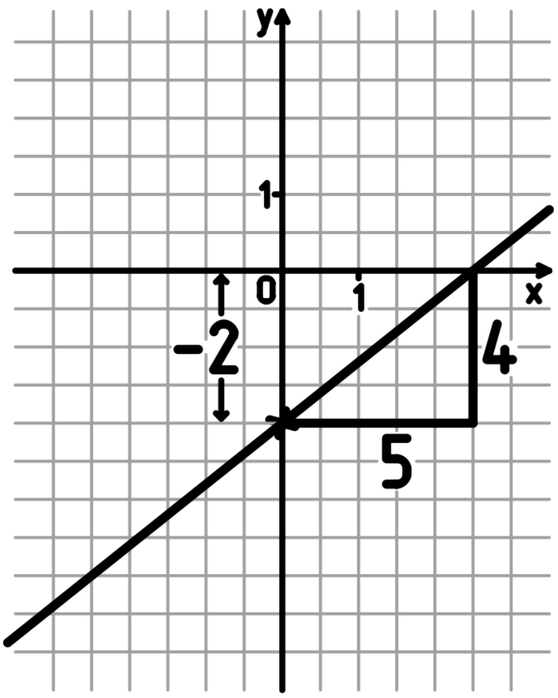
$$m=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{3-(-6)}{2-5}=-3$$

m und P einsetzen gibt

$$3=-3\cdot 2+t$$
$$3=-6+t \quad /+6$$
$$t=9$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{h:\ y=-3\cdot x+9}}$$

Zeichne mit y-Achsenabschnitt und Steigungsdreieck die Gerade g mit der Gleichung

$g:\quad y=0{,}8\,x-2$



Berechne die Schnittpunkte von g mit den Koordinatenachsen

$g:\quad y=-2x+6$

S_y aus t

$$\underline{\underline{S_y(0/6)}}$$

S_x aus Nullstelle

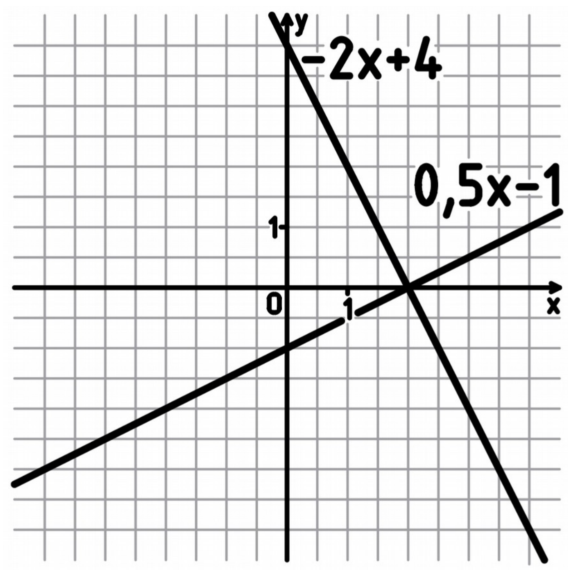
$$0=-2x+6 \quad /+2x$$
$$2x=6 \quad /:2$$
$$x=3$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{S_x(3/0)}}$$

2.3 Ungleichungen

Vorsicht:

Wenn man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, dann muss man das Ungleichheitszeichen umdrehen.

Beispiele:

Berechne die Lösungsmenge der Ungleichung $3-2x \leqslant x+12$ $3-2x \leqslant x+12 \quad / -3-x$ $-3x \leqslant 9 \quad / :(-3)$ $x \geqslant 3$!!Umdrehen!! $\Rightarrow \underline{\underline{L=[-3;\infty[}}$	Bestimme zeichnerisch die Lösungsmenge der Ungleichung $0{,}5x-1 \geqslant -2x+4$  Die Gerade mit 0,5x-1 muss oberhalb der anderen liegen $\Rightarrow \underline{\underline{L=[2;\infty[}}$

3 Gleichungssysteme mit zwei Variablen

3.1 Einsetzungsverfahren

Man löst eine Gleichung nach einer Variablen auf und setzt in die andere Gleichung ein.

Beispiel:

Bestimme die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} I: \quad -12x+2y &= -10 \\ II: \quad 15x-3y &= 15 \end{aligned}$$

Aus Gleichung I:

$$\begin{aligned} -12x+2y &= -10 && /+12x \\ 2y &= 12x-10 && /:2 \\ y &= 6x-5 && \text{I*} \end{aligned}$$

Einsetzen in II gibt

$$\begin{aligned} 15x-3\cdot(6x-5) &= 15 \\ 15x-18x+15 &= 15 \\ -3x+15 &= 15 && /-15 \\ -3x &= 0 && /:(-3) \end{aligned}$$

$\underline{\underline{x=0}}$

Einsetzen in I* gibt

$y=6\cdot 0-5$

$\underline{\underline{y=-5}}$

3.2 Additionsverfahren

Man addiert oder subtrahiert die beiden Gleichungen so, dass eine der beiden Variablen rausfällt. Vorher muss man:

- ➔ die beiden Gleichungen so hinschreiben, dass die Variablen richtig untereinander stehen
- ➔ die beiden Gleichungen geschickt multiplizieren

Beispiel:

Bestimme die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} I:&\quad 12a-25b &=&\ 1\\ II:&\quad 18a-35b &=&\ -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\cdot I:&\quad 36a-75b &=&\ 3\\ 2\cdot II:&\quad 36a-70b &=&\ -2 \end{aligned}$$

$3\cdot I-2\cdot II$ *gibt*

$$-5b=5 \quad /:(-5)$$

$\underline{\underline{b=-1}}$

Einsetzen in I gibt

$$\begin{aligned} 12a-25\cdot(-1) &= 1 &&\\ 12a+25 &= 1 && /-25\\ 12a &= -24 && /:12 \end{aligned}$$

$\underline{\underline{a=-2}}$

4 Laplace-Wahrscheinlichkeit

4.1 Ergebnisse und Ereignisse

Ergebnisraum Ω:

Die Menge aller möglichen Ergebnisse → Systematisch sortiert aufschreiben!

Beispiele:

Eine Münze wird dreimal geworfen. Schreib 0 für Kopf und 1 für Zahl und gib den Ergebnisraum an. Mit Reihenfolge! $\Omega=\{000;001;010;011;100;101;110;111\}$	Die Ruderboote A, B und C fahren um die Wette. Gib den Ergebnisraum an. $\Omega=\{ABC;ACB;BAC;BCA;CAB;CBA\}$

Ein Ereignis ist eine Teilmenge des Ergebnisraums

Beispiel:
Wir betrachten einen Wurf mit einem Würfel

Beschreibung des Ereignisses	Das Ereignis als Menge
A: Die geworfene Zahl ist gerade	$A=\{2;4;6\}$
B: Die geworfene Zahl ist eine Primzahl	$B=\{2;3;5\}$
C: Die geworfene Zahl ist durch drei teilbar.	$C=\{3;6\}$

4.2 Laplace-Wahrscheinlichkeiten

- Laplace-Experiment $\rightarrow$ alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich
- Wichtig: Damit alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind muss man das Experiment mit Reihenfolge betrachten!
- Die Wahrscheinlichkeit von A berechnet man dann so
  $$P(A)=\frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in A}}{\text{Anzahl aller möglichenn Ergebnisse}}=\frac{|A|}{|\Omega|}$$
- Zählprinzip $\rightarrow$ Die Anzahl der Möglichkeiten erhält man, indem man die Anzahlen der Möglichkeiten der aufeinander folgenden Stufen multipliziert.

Beispiele:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus 32 Spielkarten einen König zu ziehen? A: Ein König wird gezogen $\lvert\Omega\rvert=32 \quad \lvert A\rvert=4$ $P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}=\underline{\underline{0{,}125}}$	Fünf Schüler stellen sich zufällig in einer Reihe auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich alphabetisch geordnet aufstellen? A: Aufstellung ist alphabetisch $\lvert\Omega\rvert=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ $\lvert A\rvert=1$ $P(A)=\underline{\underline{\frac{1}{120}\approx0{,}0083}}$

Fünf Schüler stellen sich zufällig in einer Reihe auf. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Egon auf keinem der beiden linken Plätze steht? A: Egon steht auf keinem linken Platz $\lvert\Omega\rvert = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$ $\lvert A\rvert = 4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot1 = 72$ $P(A) = \frac{72}{120} = \frac{6}{10} = \underline{\underline{0{,}6}}$	Wie groß ist bei einem Wurf mit zwei Würfeln die Wahrscheinlichkeit für Augensumme 5? <u>Vorsicht:</u> Mit Reihenfolge betrachten! $\lvert\Omega\rvert = 6\cdot6 = 36$ $\lvert A\rvert = 4\cdot1 = 4$ $P(A) = \frac{4}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{9} \approx 0{,}11}}$

5 Gebrochen rationale Funktionen

5.1 Graphen gebrochen rationaler Funktionen

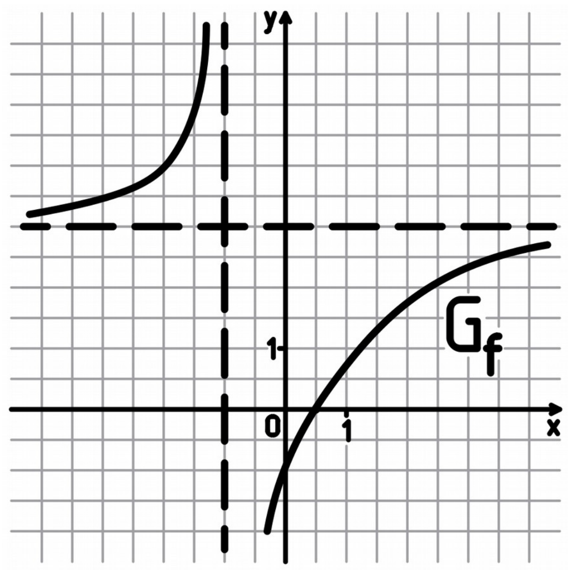
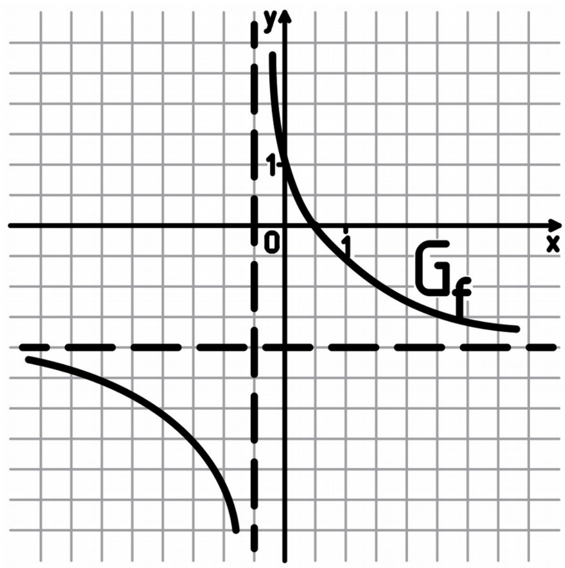
Definitionsmenge → **der Nenner darf nicht Null werden**

Nullstellen → **den Zähler gleich Null setzen**

vertikale Asymptoten → **bei den Nullstellen des Nenners**

horizontale Asymptoten → **wenn man ganz große x-Werte einsetzt (TR)**

Beispiele:
Bestimme Definitionsmenge, Nullstellen und skizziere den Graphen inklusive Asymptoten.

$f(x)=\frac{6x-3}{2x+2}$ $f(x)=\frac{6\cdot(x-0{,}5)}{2\cdot(x+1)}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-1\}$ $NST: x_1=0{,}5$ für große x kommt ungefähr 3 raus 	$f(x)=\frac{-4x+2}{2x+1}$ $f(x)=\frac{-4(x-0{,}5)}{2(x+0{,}5)}$ $D=\mathbb{Q}\setminus\{-0{,}5\}$ $NST: x_1=0{,}5$ für große x kommt ungefähr -2 raus 

5.2 Rechnen mit Bruchtermen

Beim Addieren und Subtrahieren erweitert man auf den gemeinsamen Nenner
Vorsicht: Zuerst die Nenner faktorisieren, damit der Nenner nicht zu groß wird!

Beispiele:

$$\frac{a}{a-4}-\frac{2a}{12-3a}=\quad\frac{-3\cdot a}{-3\cdot(a-4)}-\frac{2a}{-3\cdot(-4+a)}=$$

$$=\frac{-5a}{-3\cdot(a-4)}=\underline{\underline{\frac{5a}{3(a-4)}}}$$

$$\frac{4x+1}{2x-10}-\frac{x}{3x-15}= \quad \frac{4x+1}{2(x-5)}-\frac{x}{3(x-5)}=$$

$$=\frac{3\cdot(4x+1)}{3\cdot2\cdot(x-5)}-\frac{2\cdot x}{2\cdot3\cdot(x-5)}=\frac{12x+3-2x}{6(x-5)}=\underline{\underline{\frac{10x+3}{6(x-5)}}}$$

Beim Multiplizieren und Dividieren braucht man keinen gleichen Nenner!

$$\frac{4x^2}{7y}:\frac{6x}{35y^2}= \quad \frac{4x^2}{7y}\cdot\frac{35y^2}{6x}=\frac{4x^2\cdot35y^2}{7y\cdot6x}=\frac{2x\cdot5y}{1\cdot3}=\frac{10xy}{3}=\underline{\underline{3\frac{1}{3}xy}}$$

$$\frac{3x}{x+2}\cdot\frac{2-x}{x^2-2x}= \quad \frac{3x\cdot(2-x)}{(x+2)\cdot x\cdot(x-2)}=\frac{-3x(x-2)}{(x+2)\cdot x\cdot(x-2)}=\underline{\underline{\frac{-3x}{x\cdot(x+2)}}}$$

Zum Lösen einer Bruchgleichung bringt man alles auf den gleichen Nenner und multipliziert anschließend mit diesem Hauptnenner. Definitionsmenge beachten!

$$\frac{12}{x}=\frac{6}{x-2} \qquad D=\mathbb{Q}\setminus\{0;2\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{12\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)} &= \frac{6x}{x\cdot(x-2)} && /\cdot x(x-2)\\
12(x-2) &= 6x\\
12x-24 &= 6x && /-12x\\
-24 &= -6x && /:(-6)
\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{x=4}}$$

$$\frac{2x-3{,}5}{x-3}=\frac{5}{2x-6} \qquad D=\mathbb{Q}\setminus\{3\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2\cdot(2x-3{,}5)}{2\cdot(x-3)} &= \frac{5}{2\cdot(x-3)} && /\cdot 2\cdot(x-3)\\
2\cdot(2x-3{,}5) &= 5 &&\\
4x-7 &= 5 && /+7\\
4x &= 12 && /:4\\
x &= 3 &&
\end{aligned}$$

Keine Lösung, denn die Ungleichung ist für x=3 nicht definiert!

5.3 Negative Exponenten

Hoch "minus" bedeutet eins durch $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$ $\quad a^{-3}=\frac{1}{a^3}$

Beispiele:

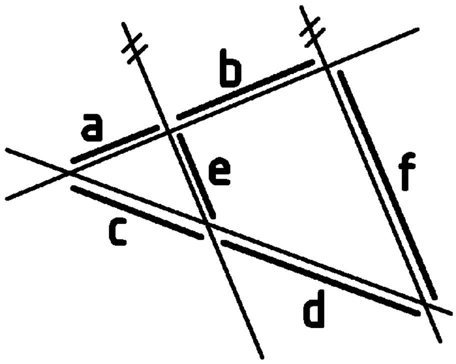
Schreibe mit Zehnerpotenzen	Berechne
$0{,}0000045 = 4{,}5\cdot 10^{-6}$ $0{,}00032 = 3{,}2\cdot 10^{-4}$ $120000000 = 12\cdot 10^{7}$	$x^{-2}\cdot x^{3}= \frac{x^3}{x^2}=\underline{\underline{x}}$ $x^5 : x^{-3}= x^5:\frac{1}{x^3}=x^5\cdot x^3=\underline{\underline{x^8}}$

6 Ähnlichkeit

6.1 Strahlensatz

Der Strahlensatz gilt nur dann, wenn man zwei parallele Geraden hat.
Tipp: Schreib die gesuchte Größe in den Zähler!

V-Figur

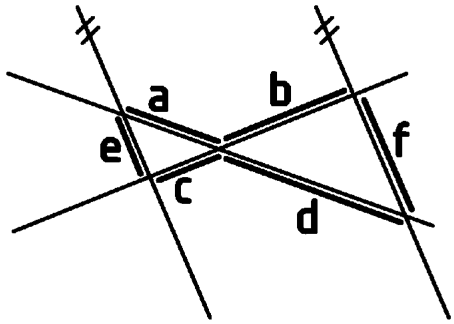


$$\frac{f}{e}=\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$$

$$\frac{c}{c+d}=\frac{a}{a+b}=\frac{e}{f}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

X-Figur



$$\frac{a}{d}=\frac{c}{b}=\frac{e}{f}$$

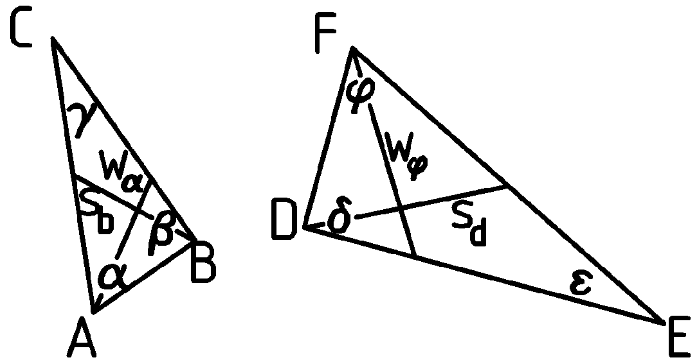
$$\frac{f}{e}=\frac{d}{a}=\frac{b}{c}$$

6.2 Ähnlichkeitssätze für Dreiecke

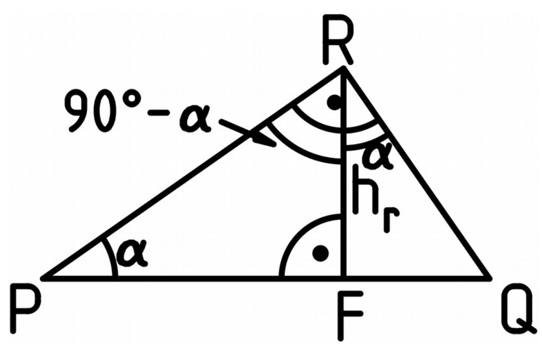
Was bedeutet der Begriff **"ähnlich" ?**	Wenn man ein Dreieck so Vergrößern kann, dass es zu dem anderen Dreieck kongruent (deckungsgleich) ist, dann heißen die beiden Dreiecke ähnlich.
Wozu ist es nützlich wenn man weiß, dass zwei Dreiecke ähnlich sind?	Wenn zwei Dreiecke ähnlich sind, dann stimmen sie in allen Winkeln und in allen Längenverhältnissen überein.

Wie kann man rausfinden, dass zwei Dreiecke ähnlich sind?	**Ähnlichkeitssätze** Wenn zwei Dreiecke in zwei Innenwinkeln übereinstimmen, dann sind sie ähnlich zueinander. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seitenverhältnissen übereinstimmen, dann sind sie ähnlich zueinander.

Beispiel:
Fehlende Längen einzeichnen!

Die beiden rechtwinkligen Dreiecke unten sind ähnlich.  	$\alpha = \varphi \quad \beta = \delta \quad \gamma = \epsilon$ $\frac{a}{b} = \frac{f}{d} \qquad \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ $\frac{w_\alpha}{b} = \frac{w_\varphi}{d} \qquad \frac{s_d}{d} = \frac{s_b}{b}$

Beispiel:

 	Zeige, dass die Dreiecke PQR, PFR, und FQR ähnlich zueinander sind. Alle drei Dreiecke enthalten einen 90°-Winkel und den Winkel α. Da die drei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, sind sie ähnlich.