Grundwissen

9. Jahrgangsstufe

Mathematik

1 Reelle Zahlen

1.1 Rechnen mit Quadratwurzeln

- ➔ $\sqrt{a}$ ist diejenige nicht negative Zahl, die zum Quadrat a ergibt.
- ➔ d.h.: -2 ist keine Wurzel aus 4. Eine Wurzel kann nicht negativ sein.
- ➔ das geht nur für positive a! Unter der Wurzel darf nichts negatives stehen.
- ➔ Für alle a gilt, $\sqrt{a^2}=|a|$

Rechenregeln:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

Rechenregeln gibt es nur für mal und geteilt, für plus und minus gibt es keine Rechenregeln.

Rechne ohne Taschenrechner

Vereinfache	**Radiziere teilweise**
$\sqrt{100x^2+21x^2}=\sqrt{121x^2}=\sqrt{11^2\cdot x^2}=\underline{\underline{11\lvert x\rvert}}$	$\sqrt{24}=\sqrt{6\cdot 4}=\underline{\underline{2\cdot\sqrt{6}}}$
$\sqrt{-a(-8a-a)}=\sqrt{-a\cdot(-9a)}=\sqrt{9a^2}=\underline{\underline{3\lvert a\rvert}}$	$\sqrt{5x-x}=\sqrt{4x}=\underline{\underline{2\sqrt{x}}}$
$\sqrt{3a}\cdot\sqrt{3a}=\underline{\underline{3a}}$	$\sqrt{18u^2}=\sqrt{2\cdot 9\cdot u^2}=\underline{\underline{3\cdot\lvert u\rvert\cdot\sqrt{2}}}$
$\frac{\sqrt{3u^2}}{\sqrt{27u^2}}=\sqrt{\frac{3u^2}{27u^2}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\underline{\underline{\frac{1}{3}}}$	$\sqrt{2a^2}=\underline{\underline{\sqrt{2}\cdot\lvert a\rvert}}$

1.2 Binomische Formeln

Plus-Formel:	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Minus-Formel:	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
Plus-Minus-Formel:	$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Beispiele:

Schreibe ohne Klammern	**Schreibe ohne Wurzel**
$(4-a)^2=16-8a+a^2$	$\sqrt{a^2-6a+9}=\sqrt{(a-3)^2}=\underline{\underline{\lvert a-3\rvert}}$
$(5+y)^2=25+10y+y^2$	$\sqrt{x^4+4x^2+4}=\sqrt{(x^2+2)^2}=\underline{\underline{x^2+2}}$
$(2x-3)^2=4x^2-12x+9$	$\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(2x-1)^2}=\underline{\underline{\lvert 2x-1\rvert}}$
$(x-3)(3+x)=(x-3)(x+3)=x^2-9$	$\sqrt{9x^2+12x+4}=\sqrt{(3x+2)^2}=\underline{\underline{\lvert 3x+2\rvert}}$

Kürze

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}=\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}=\underline{\underline{\frac{x+3}{x-3}}}$$

$$\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}=\underline{\underline{1}}$$

$$\frac{a-1}{\sqrt{a}+1}=\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{\sqrt{a}+1}=\underline{\underline{\sqrt{a}-1}}$$

1.3 n-te Wurzeln

Für $a \geqslant 0$ ist $\sqrt[n]{a}$ diejenige nicht negative Zahl mit $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$

Beachte: Unter der Wurzel darf nie was Negatives stehen, und die Wurzel selbst kann auch nie negativ sein.

Löse die Gleichungen

$x^4=16$ $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{16}$ $\underline{\underline{x_{1,2}=\pm 2}}$	$x^5=11$ $\underline{\underline{x=\sqrt[5]{11}}}$
$x^6=5$ $\underline{\underline{x_{1,2}=\pm\sqrt[6]{5}}}$	$x^3=-10$ $\underline{\underline{x=-\sqrt[3]{10}}}$

1.4 Rationale Exponenten

Für positive a ist $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$ und $a^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

Beachte: $\sqrt[q]{a^p}=\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

Schreibe mit Wurzelzeichen	Schreibe als Potenz
$25^{\frac{3}{2}}=\sqrt{25^3}$	$\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{2}{4}}=3^{\frac{1}{2}}$
$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}$	$\sqrt[6]{2^3}=2^{\frac{3}{6}}=2^{\frac{1}{2}}$

Rechenregeln

$$a^r\cdot a^s=a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$$

$$a^r\cdot b^r=(a\cdot b)^r \qquad \frac{a^r}{b^r}=\left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$\left(a^r\right)^s=a^{r\cdot s}$$

Vereinfache

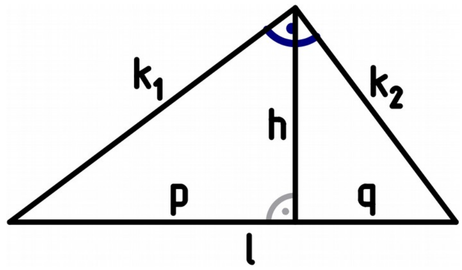
$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{(2\text{x})^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}=\underline{\underline{2^{-\frac{2}{3}}}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\cdot\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x^{-1}}\cdot x^{\frac{-1}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\underline{\underline{x^{-\frac{2}{3}}}}$
$\frac{x^{-1}}{x^{-\frac{3}{2}}}=x^{-1-\left(-\frac{3}{2}\right)}=\underline{\underline{x^{\frac{1}{2}}}}$	$\left(\sqrt[4]{x}\right)^{-2}=x^{\frac{-2}{4}}=\underline{\underline{x^{-\frac{1}{2}}}}$

2 Pythagoras

Im rechtwinkligen Dreieck gilt

$$k_1^2 + k_2^2 = l^2$$

$$h^2 = p \cdot q$$



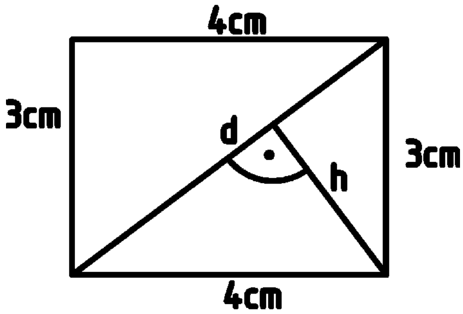
Wenn eine der beiden Gleichungen gilt, dann weiß man schon, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Zum Rechnen ist auch die Flächenformel nützlich

$$A = \frac{1}{2} \cdot l \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot k_2$$

Beispiel:

Berechne die Längen der Diagonale d und der eingezeichneten Höhe h im Rechteck rechts.



$$d = \sqrt{(3\text{cm})^2 + (4\text{cm})^2} = \underline{\underline{5\text{cm}}}$$

Fläche Dreieck rechts unten

$$\frac{1}{2} \cdot 4\,cm \cdot 3\,cm = \frac{1}{2} \cdot d \cdot h$$

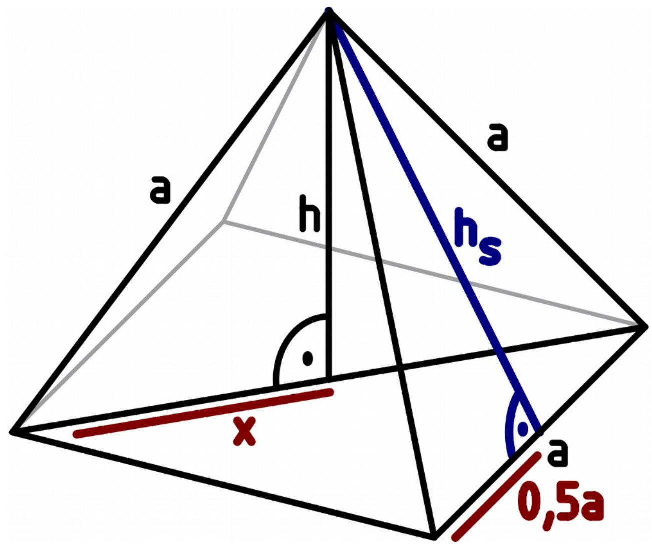
$$\frac{1}{2} \cdot 4\,cm \cdot 3\,cm = \frac{1}{2} \cdot 5\text{cm} \cdot h$$

$$6\text{cm}^2 = 2{,}5\,cm \cdot h \quad / : (2{,}5\,cm)$$

$$\underline{\underline{h = 2{,}4\,cm}}$$

Beispiel:

In der quadratischen Pyramide rechts haben alle Kanten die Länge a. Berechne die Höhe der Pyramide h und die Höhe der Seitenflächendreiecke h_s in Abhängigkeit von a.



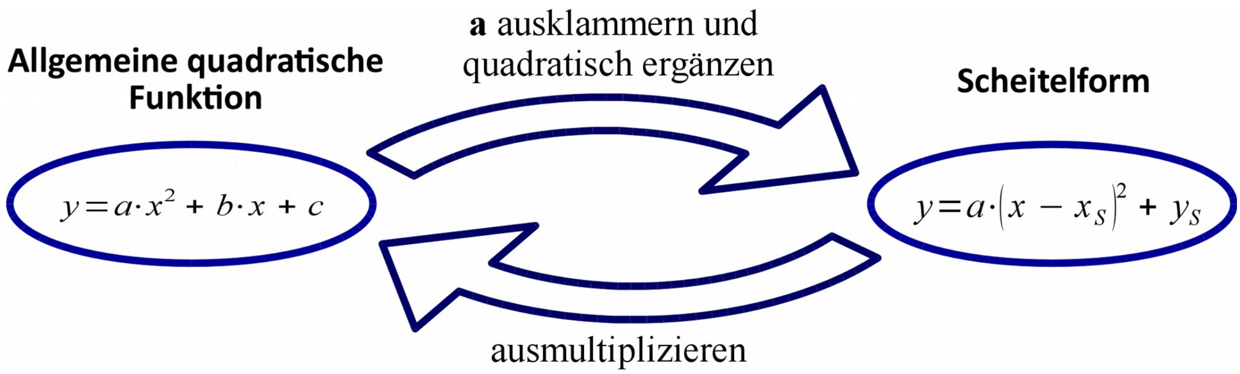
$$h_s^2+(0{,}5a)^2=a^2$$
$$h_s=\sqrt{a^2-0{,}25a^2}$$
$$\underline{\underline{h_s=\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a}}$$

$$d=2x$$
$$d^2=a^2+a^2$$
$$d=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\cdot a \quad \rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$$
$$a^2=x^2+h^2$$
$$h^2=a^2-x^2=a^2-\frac{2}{4}\cdot a^2=\frac{1}{2}\cdot a^2$$
$$h=\sqrt{\frac{1}{2}a^2}=\sqrt{\frac{2}{4}a^2}$$
$$\underline{\underline{h=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a}}$$

Nenner rational machen

3 Quadratische Funktionen und Gleichungen

3.1 Parabeln



Zum Zeichnen der Parabel geht man vom Scheitel aus ...

... um 1 nach rechts und um a nach oben
... um 2 nach rechts und um 4a nach oben
... um 3 nach rechts und um 9a nach oben

Wenn das a negativ ist, dann ist die Parabel nach unten geöffnet!

Beispiele:

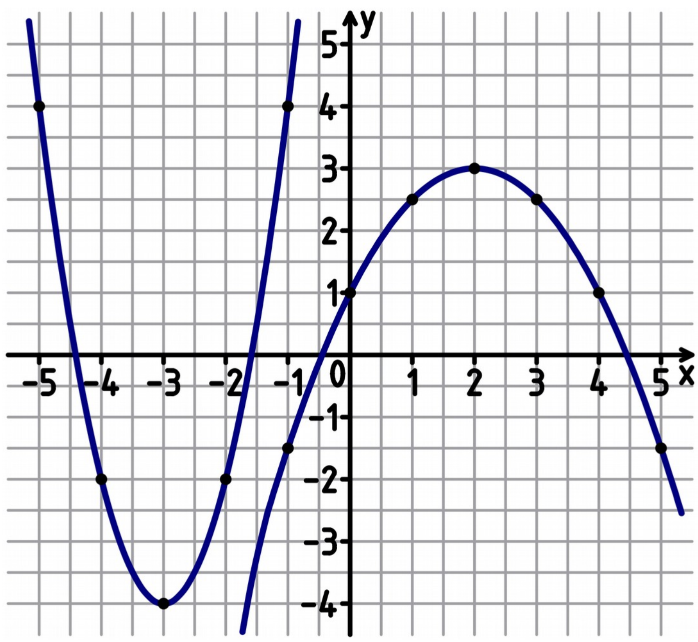
Bringe die Parabelgleichungen auf Scheitelform und zeichne die Parabeln in das KOSY rechts.

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 12x + 14 \\ &= 2 \cdot (x^2 + 6x) + 14 \\ &= 2 \cdot (x^2 + 6x + 9 - 9) + 14 \\ &= 2 \cdot (x^2 + 6x + 9) - 18 + 14 \\ &= 2 \cdot (x+3)^2 - 4 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ $\underline{S(-3/-4)}$

$$\begin{aligned} y &= -0{,}5x^2 + 2x + 1 \\ &= -0{,}5 \cdot (x^2 - 4x + 4 - 4) + 1 \\ &= -0{,}5 \cdot (x - 4x + 4) + 2 + 1 \\ &= -0{,}5 \cdot (x-2)^2 + 3 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ $\underline{S(2/3)}$

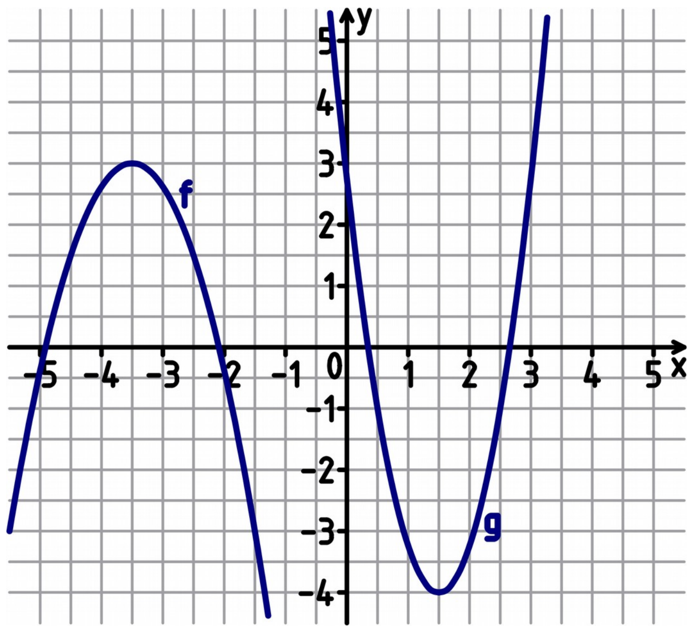


3.2 Bestimmen des Funktionsterms

Oft kann man die Funktionsterme in der Scheitelform einfach ablesen.

$f: \ y = -1{,}5 \cdot (x + 3{,}5)^2 + 3$
vom Scheitel aus um 1 nach rechts und um 1,5 nach unten!

$g: \ y = 3 \cdot (x - 1{,}5)^2 - 4$
vom Scheitel aus um 1 nach rechts und um 3 nach oben



Wenn man die Nullstellen x_1 und x_2 kennt, dann kann man für die Parabelgleichung den Ansatz

$$y = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

machen. Das a bekommt man durch einsetzen eines zusätzlichen Punktes.

Beispiel:

Bestimme die Gleichung einer Parabel mit den Nullstellen -1 und 3 und dem Scheitel (1/-4).

$$y = a \cdot (x + 1)(x - 3)$$

Scheitel einsetzen gibt

$$-4 = a(1 + 1)(1 - 3)$$
$$-4 = a \cdot 2 \cdot (-2)$$
$$-4 = -4 \cdot a \ \rightarrow \ a = 1$$
$$\Rightarrow y = 1 \cdot (x + 1)(x - 3)$$
$$\underline{\underline{y = x^2 - 2x - 3}}$$

3.3 Schnittpunkte und Nullstellen

Mitternachtsformel

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Damit man die Mitternachtsformel benutzen kann, muss man die Gleichung erst auf die Form $ax^2+bx+c=0$ bringen.
Wenn die Diskriminante negativ ist, dann gibt es keine Lösung.
Wenn die Diskriminante Null ist, dann gibt es nur eine Lösung.
Die Mitternachtsformel kann auch zum Faktorisieren quadratischer Terme benutzt werden.

Beispiele:
Bestimme die Nullstellen und faktorisiere den Funktionsterm.

$f(x)=2x^2+4x-6$

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+4\cdot2\cdot6}}{4}=\frac{-4\pm8}{4}$$

$$x_1=-3 \quad x_2=1$$

$$\Rightarrow \quad f(x)=2\cdot(x+3)(x-1)$$

$g(x)=-3x^2-18x-24$

$$x_{1,2}=\frac{18\pm\sqrt{18^2-4\cdot3\cdot24}}{-6}=\frac{-18\pm6}{-6}$$

$$x_1=4 \quad x_2=2$$

$$\Rightarrow \quad g(x)=-3\cdot(x-4)(x-2)$$

Beispiele:
Berechne jeweils die Schnittpunkte der beiden Graphen.

$f(x)=x^2-3x+1;\quad g(x)=-x+4$

$$x^2-3x+1=-x+4 \quad /+x-4$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot3}}{2}=\frac{2\pm4}{2}$$

$$x_1=-1 \quad x_2=3$$

Einsetzen in g(x) gibt

$$y_1=-(-1)+4=5$$

$$y_2=-3+4=1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_1(-1/5)}} \quad \underline{\underline{S_2(3/1)}}$$

$f(x)=\frac{1}{x};\quad g(x)=x-1{,}5$

$$\frac{1}{x}=x-1{,}5 \quad /\cdot x$$

$$1=x^2-1{,}5x \quad /-1$$

$$x^2-1{,}5x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1{,}5\pm\sqrt{2{,}25+4}}{2}=\frac{1{,}5\pm2{,}5}{2}$$

$$x_1=-0{,}5 \quad x_2=2$$

Einsetzen in g(x) gibt

$$y_1=-0{,}5-1{,}5=-2$$

$$y_2=2-1{,}5=0{,}5$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S_1(-0{,}5/-2)}} \quad \underline{\underline{S_2(2/0{,}5)}}$$

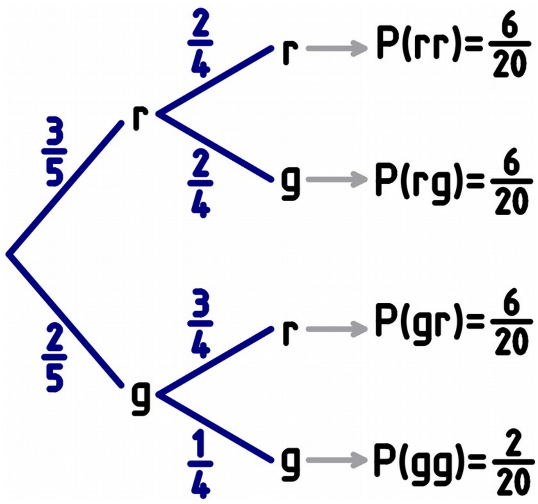
4 Mehrstufige Zufallsexperimente

Im Baumdiagramm
Das Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades gibt die Wahrscheinlichkeit für das entstehende Ergebnis.
Die Summe der Zweige mit gleichem Ursprung gibt 1.
Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller endgültigen Ergebnisse gibt 1.

Beispiel:

In einem Korb liegen 3 rohe r und 2 gekochte g Eier. Es werden zwei Eier nacheinander rausgenommen.
a) Zeichne ein Baumdiagramm mit allen Wahrscheinlichkeiten.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ein rohes und ein gekochtes Ei zu erwischen?

a)

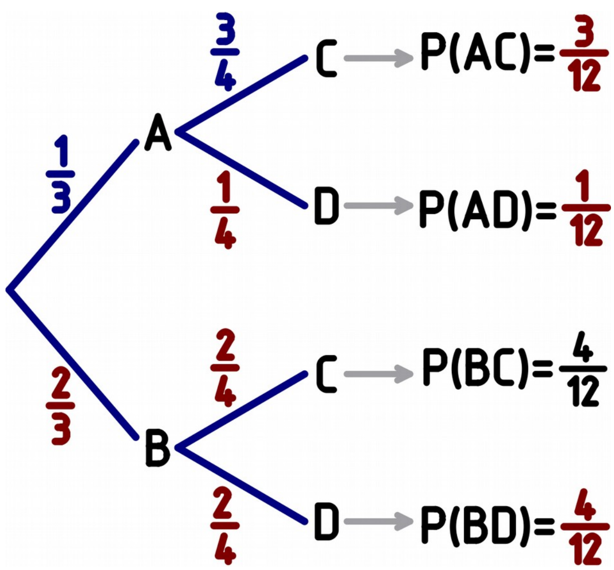


b)

$$P(\text{ein r und ein g}) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \underline{\underline{0{,}6}}$$

Beispiel:

Trage alle fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm rechts ein.



5 Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

Im rechtwinkligen Dreieck gilt

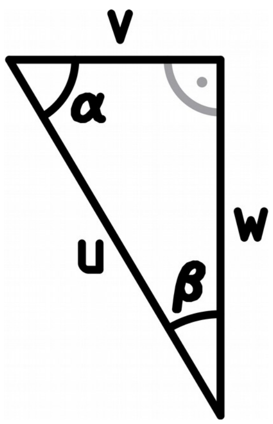
$$\sin\alpha=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \cos\alpha=\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \qquad \tan\alpha=\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Beispiel:

$$\sin\alpha=\frac{w}{u} \qquad \cos\alpha=\frac{v}{u}$$

$$\tan\alpha=\frac{w}{v} \qquad \sin\beta=\frac{v}{u}$$

$$\cos\beta=\frac{w}{u} \qquad \tan\beta=\frac{v}{w}$$



Beispiel:

Berechne die fehlenden Seiten und Winkel.

$$\beta=180°-90°-60°=\underline{\underline{30°}}$$

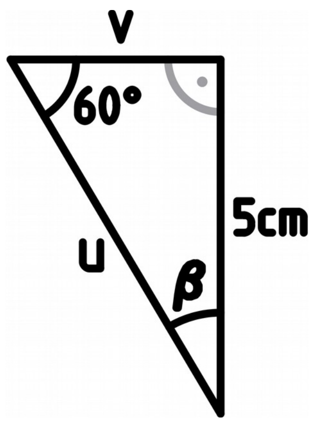
$$\sin 60°=\frac{5\text{cm}}{u}$$

$$u=\frac{5\text{cm}}{\sin 60°}=\frac{5\text{cm}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{10}{\sqrt{3}}cm=\frac{10}{3}\sqrt{3}\,cm$$

$$\underline{\underline{u=\frac{10}{3}\sqrt{3}\,cm}}$$

$$v=u\cdot\cos 60°=\frac{10}{3}\sqrt{3}\,cm\cdot\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{v=\frac{5}{3}\sqrt{3}\,cm}}$$



6 Raumgeometrie

6.1 Winkel zwischen Gerade und Ebene

Wenn eine Gerade senkrecht auf zwei Geraden einer Ebene steht, dann heißt diese Gerade ein Lot auf der Ebene.

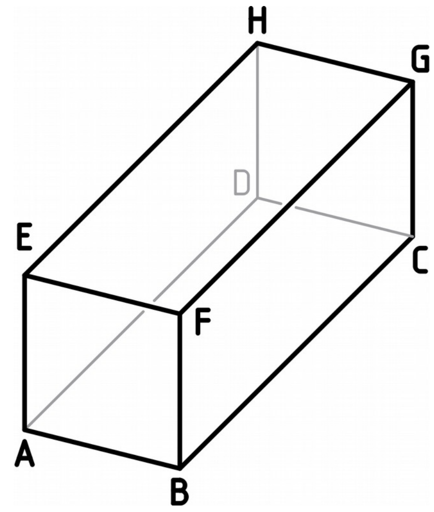
Beispiel:

Der Körper rechts ist ein Quader.
Welche Geraden stehen senkrecht auf ...

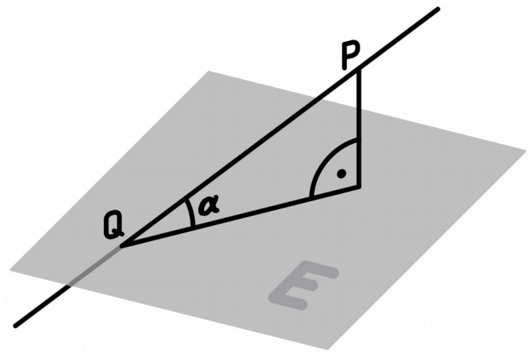
a) ... der Ebene ABE?
Die Geraden: AD ; EH ; BC ; FG

b) ... der Ebene BCG?
Die Geraden: AB ; CD ; EF ; HG

c) ... der Ebene EFG?
Die Geraden: AE ; BF ; CG ; DH



Um den Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene E zu bestimmen, braucht man den Schnittpunkt Q und von einem beliebigen Punkt P der Gerade aus ein Lot auf die Ebene.



Beispiel:

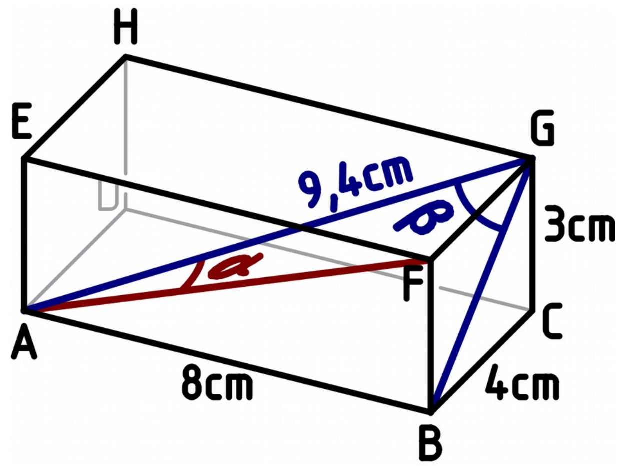
Berechne ohne weitere Längen zu berechnen den Winkel zwischen der Raumdiagonale ...

a) ... und der Ebene ABE

$$\sin\alpha = \frac{4\,cm}{9{,}4\,cm} = 0{,}426 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 25\,°}}$$

b) ... und der Ebene BCG

$$\sin\beta = \frac{8\,cm}{9{,}4\,cm} = 0{,}85 \quad \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 58\,°}}$$

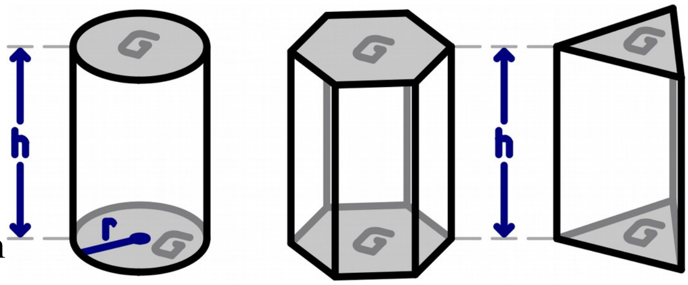


6.2 Körper

Prismen und Zylinder
(Boden und Deckel sind gleich)

$$V = G \cdot h$$

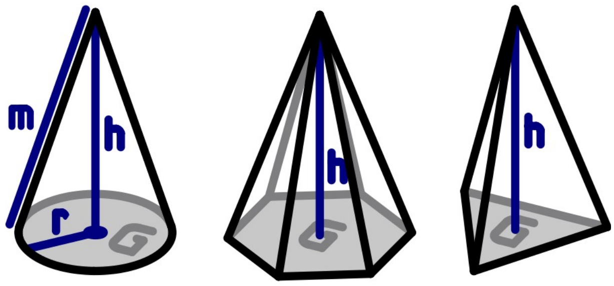
Oberfläche aus Teilen zusammensetzen



Pyramiden und gerader Kegel
(haben eine Spitze)

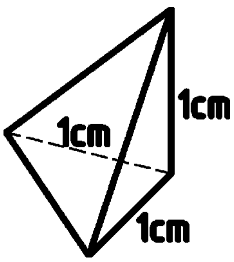
$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Mantelfläche Kegel: $M = \pi \cdot r \cdot m$



Beispiele:

Von einem Würfel wurde eine Ecke abgeschnitten.



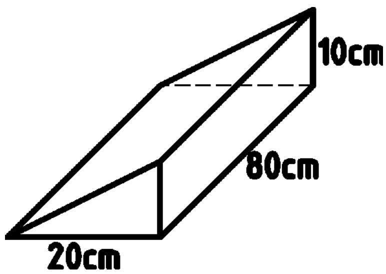
Berechne das Volumen der Ecke.

Die Kante rechts außen ist die Höhe der Pyramide. Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\,cm \cdot 1\,cm \cdot 1\,cm$$

$$\underline{\underline{V = \frac{1}{6}\,cm^3}}$$

Antons Lesekissen ist ein gerades Prisma.



Berechne das Volumen des Lesekissens.

$$V = \frac{1}{2} \cdot 20\text{cm} \cdot 10\text{cm} \cdot 80\text{cm}$$

$$\underline{\underline{V = 8000\,cm^3}}$$