9 Spezielle Relativitätstheorie

9.1 Masse und Energie

Masse und Energie sind zueinander äquivalente physikalische Größen. D.h. jede Energie, egal in welcher Form, entspricht einer Masse und jede Masse entspricht einer Energie. Für die Umrechnung zwischen Masse und Energie gilt:

<u>Äquivalenz von Masse und Energie</u>

$$E = m \cdot c^2$$

mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c

➔ Überall, wo eine Masse steht können wir die ganz einfach durch eine Energie ersetzen ($m = E/c^2$). Überall wo eine Energie steht, können wir die ganz einfach durch eine Masse ersetzen ($E = m \cdot c^2$).

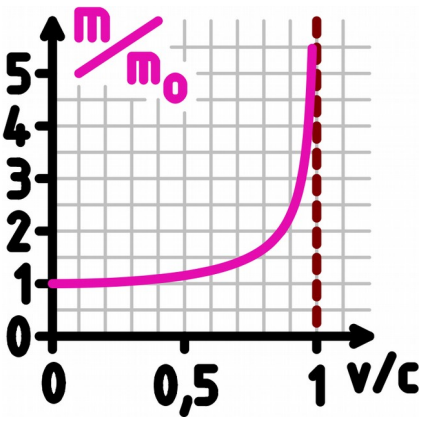
Um die Geschwindigkeit eines Körpers zu steigern, muss man ihm Energie zuführen. Mit der Geschwindigkeit eines Körpers steigt deshalb seine Energie, also auch seine Masse. Genauer:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

mit Ruhemasse des Körpers m_0 bzw. Ruheenergie E_0

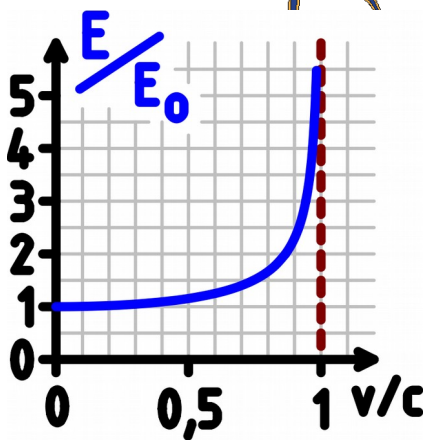
➔ Nicht immer sind SI-Einheiten das bequemste zum Rechnen. Oft ist es bequemer die Geschwindigkeit als v/c in Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit zu skalieren.

➔ Wenn die Geschwindigkeit gegen die Lichtgeschwindigkeit geht, dann geht der Nenner gegen Null, und die Masse geht gegen unendlich (siehe Diagramm).



☠ Die Gleichung gilt nur für Teilchen, die eine Ruhemasse besitzen. Für alle Teilchen, auch für solche ohne Ruhemasse, wie zum Beispiel Photonen, gilt die Formel $E = m \cdot c^2$.

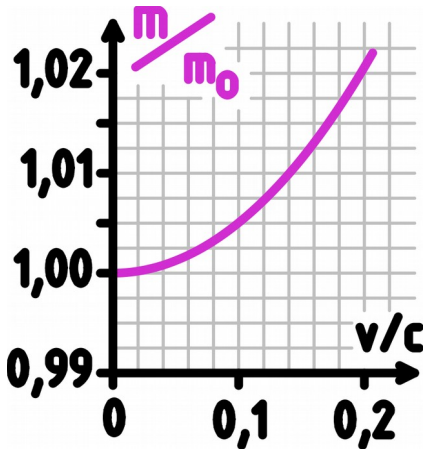
Wegen der Äquivalenz von Masse und Energie kann man genau dasselbe Diagramm wie für die Masse auch für die Energie machen.



Am Diagramm sieht man, dass die Energie eines Teilchens, das eine Ruhemasse besitzt, gegen unendlich geht, wenn die Geschwindigkeit sich der Lichtgeschwindigkeit annähert. Deshalb gilt:

☠ Ein Objekt, das eine Ruhemasse besitzt, kann niemals die Lichtgeschwindigkeit erreichen oder gar überschreiten.

Aufgabe 9.143:



Bei den meisten Rechnungen sind wir zufrieden, wenn wir auf zwei geltende Ziffern genau sind. D.h. ein Abweichung unter einem Prozent ist für uns normalerweise akzeptabel. Diese Aufgabe soll mit Hilfe des Diagramms bearbeitet werden.

Bemerkung: Durch die Streckung in y-Richtung und meine dicken Striche ist das nicht mehr gut erkennbar, aber das Diagramm hat für $v/c = 0$ eine horizontale Tangente.

a) Ab welcher Geschwindigkeit - in Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit und in m/s weicht die Masse eines Körpers um mehr als 1% von seiner Ruhemasse ab?

b) Wie groß ist die Abweichung der Masse eines Teilchens von der Ruhemasse - gemessen in Prozent der Ruhemasse - wenn das Teilchen sich mit 10% der Lichtgeschwindigkeit bewegt?

Lösung:

a) Abweichung um 1% heißt, dass $m/mo \approx 1{,}01$ sein muss. Aus dem Diagramm liest man ab: $v/c \approx 0{,}14 \cdot c = 42$ Mio m/s

b) $m/mo \approx 1{,}005$, d.h. die Masse weicht bei 10% Lichtgeschwindigkeit um 0,5% von der Ruhemasse ab.

☠ Laut amtlicher Vorschrift muss an bayerischen Schulen ab $v = 0{,}1 \cdot c$ relativistisch gerechnet werden.

9.2 Ruheenergie; kinetische Energie

Wegen der Äquivalenz von Masse und Energie $E = m \cdot c^2$ besitzt jedes Teilchen mit einer Ruhemasse m_0 auch eine Ruheenergie E_0 .

$$\boxed{E_0 = m_0 \cdot c^2}$$

Wird dem Teilchen von außen Energie in Form von kinetischer Energie zugeführt, dann steigt seine Energie auf den Wert E.

$$\boxed{E = E_0 + \Delta E = E_0 + E_{kin} \quad ; \quad E = E_0 + E_{kin} \quad ; \quad E_{kin} = E - E_0}$$

Die kinetische Energie ist also die Differenz von Nachher- und Vorher-Energie, in unserem Fall die Differenz zwischen Gesamt- und Ruheenergie.

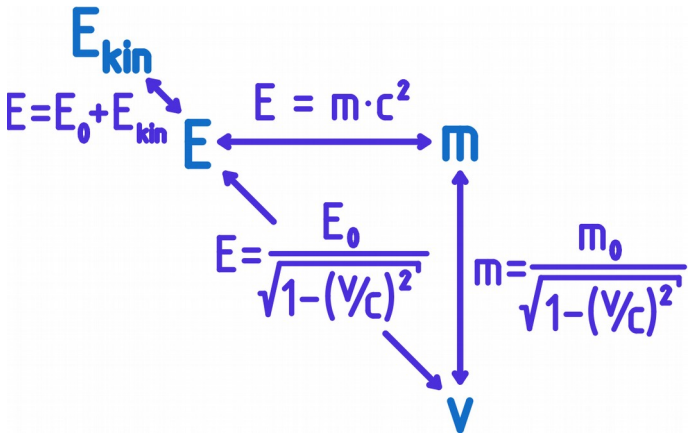
☠ Niemals rechnen wir direkt mit der kinetischen Energie, dass ist viel zu kompliziert.

☺ Wenn die kinetische Energie (oder die Beschleunigungsspannung) gegeben ist rechnen wir zuerst die Gesamtenergie aus und rechnen mit der Gesamtenergie weiter.

☺ Wenn die kinetische Energie (oder die Beschleunigungsspannung) gesucht ist, berechnen wir einfach die Gesamtenergie und ziehen ganz zum Schluss die Ruheenergie ab.

Aufgabe 9.144: Lücken ausfüllen

Elektronen	Protonen	allgemeines Teilchen
$E = 600\,keV$ $E_{kin} =$	$E = 1{,}5\,GeV$ $E_{kin} =$	$E = 1{,}05 \cdot E_0$ $E_{kin} =$
$E =$ $E_{kin} = 2{,}0\,MeV$	$E =$ $E_{kin} = 500\,Gev$	$E =$ $E_{kin} = 2{,}0 \cdot E_0$
$E =$ $U_B = 20\,kV$	$E = 3{,}0\,GeV$ $U_B =$	$E = 1{,}0 \cdot 10^6 \cdot E_0$ $E_{kin} =$



Rechnen ist schwierig

Denken Sie beim Rechnen daran, dass Sie an jeder Stelle an der eine Energie steht ganz leicht eine Masse hinschreiben können und umgekehrt. Vielleicht ist es hilfreich, wenn Sie zu Anfang beim Rechnen das Schema im Bild neben sich liegen haben. (Die Ecke unten links kommt später).

Lorentzfaktor, γ

Der Term mit der Wurzel taucht beim Rechnen relativ oft auf. Als Abkürzung schreibt man dafür ein kleines Gamma. Manchmal spart man sich ein bisschen Schreibarbeit, wenn man als Zwischenergebnis den Lorentzfaktor ausrechnet.

Lorentzfaktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Der Lorentzfaktor ist ein Maß dafür, wie stark die relativistischen Effekte bei einer bestimmten Geschwindigkeit sind. Mit dem Lorentzfaktor lauten die Gleichungen für Geschwindigkeitsabhängigkeit von Masse und Energie:

$$E = \gamma \cdot E_0 \qquad \text{bzw.} \qquad m = \gamma \cdot m_0$$

Wenn man Energie oder Masse kennt kann man den Lorentzfaktor ausrechnen:

$$\gamma = \frac{E}{E_0} \qquad \text{bzw.} \qquad \gamma = \frac{m}{m_0}$$

Aufgabe 9.145: Lorentzfaktor

a) Protonen im Teilchenbeschleuniger haben eine Energie von 79,92 GeV.

Bestimme den Lorentzfaktor für diese Protonen.

Zeige durch Rechnung, dass sich diese Protonen annähernd mit Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Die Protonen müssen durch ein Magnetfeld auf eine Kreisbahn mit Radius 400 m gebracht werden. Bestimme das dazu notwendige Magnetfeld.

b) Wir untersuchen Elektronen die sich mit 29,85% der Lichtgeschwindigkeit bewegen.

Bestimme den Lorentzfaktor für diese Elektronen.

Berechne die Masse und die kinetische Energie dieser Elektronen.

Die Elektronen bewegen sich in einem Magnetfeld der Flussdichte B = 0,8 T. Bestimme den Bahnradius der Flugbahn dieser Elektronen.

c) Wie groß muss der Lorentzfaktor eines Teilchens sein, damit es sich annähernd mit Lichtgeschwindigkeit bewegt? Annähernd heißt hier mindestens mit 99,9% Lichtgeschwindigkeit.

Wie groß ist dann seine kinetische Energie in Vielfachen seiner Ruheenergie?

Lösung:

a)
$$\gamma=\frac{E}{E_0}=\frac{79{,}92\,GeV}{0{,}9383\,GeV}=\underline{85{,}175}$$
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow v=\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}\cdot c=\sqrt{1-\frac{1}{85{,}175^2}}\cdot c=\underline{0{,}99993\cdot c}$$

Geschwindigkeit ist 99,993% Lichtgeschwindigkeit, also annähernd c. Für das B-Feld brauchen wir zuerst die Masse.

$$E=m\cdot c^2 \rightarrow m=\frac{E}{c^2}=\frac{79{,}92\cdot 10^9\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}J}{(3\cdot 10^8\,m/s)^2}=\underline{1{,}421\cdot 10^{-25}\,kg}$$
$$F_L=F_z \rightarrow q\cdot v\cdot B=m\cdot\frac{v^2}{r} \rightarrow B=\frac{m\cdot v}{q\cdot r}=\frac{1{,}421\cdot 10^{-25}\,kg\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 400\,m}=\underline{\underline{666\,mT}}$$

b)
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}2985^2}}=\underline{1{,}048}$$

$$m=\gamma\cdot m_0=1{,}048\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg=\underline{9{,}537\cdot 10^{-31}\,kg}$$

$$E=\gamma\cdot E_0=1{,}048\cdot 511\,keV=\underline{535{,}5\,keV}$$ -> Ekin = 24,5 keV

$$F_L=F_z \rightarrow q\cdot v\cdot B=m\cdot\frac{v^2}{r} \rightarrow r=\frac{m\cdot v}{q\cdot B}=\frac{9{,}537\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 0{,}2985\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 0{,}8\,T}=\underline{\underline{667\,\mu m}}$$

c)
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}999^2}}=\underline{22{,}4} \Rightarrow E=22{,}4\cdot E_0 \quad ; \quad E_{kin}=21{,}4\cdot E_0$$

klassisch oder relativistisch?

Bis zu einer Geschwindigkeit von 0,1c dürfen wir klassisch rechnen, darüber müssen wir relativistisch rechnen.

Aufgabe 9.146:

Berechne wie viel Prozent vom Betrag der Ruheenergie die kinetische Energie eines Teilchens ist, das sich mit 0,1c bewegt.

Lösung:

$$\frac{E}{E_0}=\frac{m\cdot c^2}{m_0\cdot c^2}=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-0{,}1^2}}=1{,}005$$

Die kinetische Energie ist also 0,5% vom Betrag der Ruheenergie.

D.h. sobald die kinetische Energie mehr als 0,5% vom Betrag der Ruheenergie ist, m.a.W. sobald E/Eo größer als 1,005 ist müssen wir relativistisch rechnen.

Aufgabe 9.147:

a) Vorher ruhende Elektronen (Protonen) werden von der Beschleunigungsspannung Ub beschleunigt. Ab welcher Beschleunigungsspannung müssen wir bei Elektronen (bei Protonen) relativistisch rechnen?

b) Die meisten Alpha-Strahler emittieren Alpha-Teilchen mit kinetischen Energien von 4 MeV bis 6 MeV. Muss man die Geschwindigkeiten dieser Alpha-Teilchen relativistisch berechnen?

Lösung:

a) Elektronen: 0,5% von Eo $=0{,}005\cdot 511\,keV=\underline{2{,}56\,keV}$

Protonen: 0,5% von Eo $=0{,}005\cdot 938\,MeV=\underline{4{,}7\,MeV}$

Bei Elektronen müssen wir also ab einer Beschleunigungsspannung von 2,6 kV relativistisch rechnen, bei Protonen ab 4,7 MV.

b) $0{,}005\cdot E_0=0{,}005\cdot 3{,}73\,GeV=\underline{18{,}7\,MeV}$

Die Alpha-Teilchen bis 6 MeV sind also deutlich nichtrelativistisch.

Aufgabe 9.148: Alles natürlich relativistisch

a) Berechne die Geschwindigkeit eines Protons in Prozent der Lichtgeschwindigkeit, wenn das Proton eine kinetische Energie von 500MeV besitzt.

b) Berechne die kinetische Energie eines Protons, das 95% der Lichtgeschwindigkeit hat. Wie groß muss eine Beschleunigungsspannung sein, um das Proton auf diese Geschwindigkeit zu bringen?

c) Berechne die notwendige Beschleunigungsspannung, um ein Elektron auf eine Geschwindigkeit von $2{,}0 \cdot 10^8 m/s$ zu beschleunigen.

d) Berechne die relativistische Massenzunahme eines Körpers in Prozent der Ruhemasse, wenn sich der Körper mit einer Geschwindigkeit von 30 000 m/s - Geschwindigkeit der Erde um die Sonne - bewegt.

e) Wie groß muss die Geschwindigkeit eines Körpers sein, damit seine Masse um 1% größer als seine Ruhemasse ist.

f) Berechne die Geschwindigkeit von Alpha-Teilchen, die eine kinetische Energie von 5 MeV (typischer Wert bei Alpha-Zerfall) besitzen. (Bemerkung: Hier ist eine relativistische Rechnung eigentlich nicht erforderlich; vergleiche das Ergebnis mit einer klassischen Rechnung.)

g) Berechne die Masse von Elektronen in Vielfachen der Ruhemasse, wenn sich die Elektronen mit 99% der Lichtgeschwindigkeit bewegen. Welche Beschleunigungsspannung ist erforderlich, um die Elektronen auf diese Geschwindigkeit zu beschleunigen?

h) Mit welcher Geschwindigkeit muss sich ein Teilchen bewegen, damit seine Masse auf das doppelte der Ruhemasse steigt?

i) Im Innern der Sonne herrscht eine Temperatur von ca. 15 Mio. Kelvin. Für die mittlere thermische, kinetische Energie der Teilchen in Abhängigkeit der Temperatur gilt die Formel: $E_{kin} = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T$ (mit der Boltzmann-Konstante $k = 1{,}4 \cdot 10^{-23} J/K$). Bestimme die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen im Kern der Sonne; vergleiche auch hier mit einer klassischen Rechnung.

k) Protonen, die bereits eine kinetische Energie von 500 MeV besitzen, werden mit einer Beschleunigungsspannung von 400 MV "nachbeschleunigt". Bestimme die Gesamtenergie und die Geschwindigkeit dieser Protonen im Anschluss an die "Nachbeschleunigung".

Lösung:

a) $E_0+E_{kin}=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad /\cdot\sqrt{\cdots} \quad /:(E_0+E_{kin})$

$\sqrt{1-(v/c)^2}=\frac{E_0}{E_0+E_{kin}} \rightarrow 1-(v/c)^2=\left(\frac{E_0}{E_0+E_{kin}}\right)^2 \rightarrow (v/c)^2=1-\left(\frac{E_0}{E_0+E_{kin}}\right)^2$

$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E_0+E_{kin}}\right)^2}$

Weil sich bei der Energie die Einheiten rauskürzen können wir alles in MeV einsetzen.

$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{938\,MeV}{938\,MeV+500\,MeV}\right)^2}=\underline{\underline{0{,}76}}$ Das Proton hat 76% der Lichtgeschwindigkeit.

b) $E_{kin}=E-E_0=m\cdot c^2-E_0=\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-E_0=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-E_0=E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right)$

☺ Die Angabe bedeutet v/c = 0,95

$E_{kin}=938\,MeV\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}}-1\right)=\underline{\underline{2066\,MeV=2{,}1\,GeV}}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{U_B=2{,}1\,GV}}$

c) $E=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{511\,keV}{\sqrt{1-(2/3)^2}}=\underline{686\,keV}$

$E_{kin}=686\,keV-511\,keV=\underline{175}$

Es ist also eine Beschleunigungsspannung von 175 kV erforderlich.

d) $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{3\cdot10^4\,m/s}{3\cdot10^8\,m/s}\right)}}=\underline{1{,}00005\cdot m_0}$

Die Masse ist um 0,005% größer als die Ruhemasse.

e) $1{,}01\cdot m_0=m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow 1-(v/c)^2=\frac{1}{1{,}01^2} \rightarrow v/c=\sqrt{1-\frac{1}{1{,}01^2}}=\underline{0{,}14}$

$v=0{,}14\cdot c=\underline{\underline{42\cdot10^6\,m/s}}$

f) $E=E_0+E_{kin}=3{,}727\,GeV+0{,}005\,GeV=\underline{3{,}732\,GeV}$

$$E=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow 1-(v/c)^2=\left(\frac{E_0}{E}\right)^2 \rightarrow v/c=\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{3{,}727\,GeV}{3{,}732\,GeV}\right)^2}=\underline{0{,}0517}$$

$\underline{v=1{,}55\cdot 10^7\,m/s}$ Eine klassische Rechnung liefert $\underline{v=1{,}55\cdot 10^7\,m/s}$

g) $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-0{,}99^2}}=\underline{\underline{7{,}089\cdot m_0}}$

$E=7{,}089\cdot E_0=7{,}089\cdot 511\,keV=\underline{3{,}622\,MeV}$

$E_{kin}=E-E_0=3{,}11\,MeV$

Es ist also eine Beschleunigungsspannung von 3,1 MV erforderlich.

h) $m=2\cdot m_0$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow 1-(v/c)^2=\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \rightarrow v/c=\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\underline{0{,}866}$$

$v=0{,}866\cdot c=\underline{2{,}6\cdot 10^8\,m/s}$

i) $E_{kin}=\frac{3}{2}\cdot k\cdot T=\frac{3}{2}\cdot 1{,}4\cdot 10^{-23}\,J/K\cdot 15\cdot 10^6\,K=\underline{3{,}15\cdot 10^{-16}\,J=1{,}97\,keV}$

$E=E_0+E_{kin}=511\,keV+1{,}97\,keV=\underline{513\,keV}$

$$E=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow 1-(v/c)^2=\left(\frac{E_0}{E}\right)^2$$

$$\rightarrow v/c=\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{511\,keV}{513\,keV}\right)^2}=\underline{0{,}088}$$

$v=0{,}088\cdot c=\underline{2{,}64\cdot 10^7\,m/s}$; klassische Rechnung liefert: $\underline{v=2{,}63\cdot 10^7\,m/s}$

k) $E=E_0+500\,MeV+400\,MeV=938\,MeV+900\,MeV=\underline{1838\,MeV}$

$$v/c=\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{938\,MeV}{1838\,MeV}\right)^2}=\underline{0{,}86}$$

$\underline{v=0{,}86\cdot c=2{,}56\cdot 10^8\,m/s}$

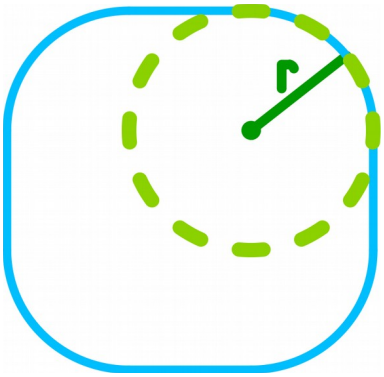
Aufgabe 9.149: Formeln herleiten; alles relativistisch

a) Ein Teilchen der Ladung q und der Ruheenergie Eo wird durch eine Spannung U beschleunigt. Bestimme eine Formel für die Geschwindigkeit v des Teilchens in Abhängigkeit dieser drei Parameter.

b) Ein Teilchen der Ruhemasse mo und der Ladung q bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in einem Magnetfeld der Flussdichte B auf einer Kreisbahn. Bestimme eine Formel für die Umlaufdauer T in Abhängigkeit dieser vier Parameter.

c) Ein Teilchen der Ruheenergie Eo, der kinetischen Energie Ekin und der Ladung q bewegt sich in einem Magnetfeld der Flussdichte B auf einer Kreisbahn. Bestimme Formeln für die Umlaufdauer T und den Radius r der Kreisbahn in Abhängigkeit der gegebenen vier Parameter.

d) War schon öfter im Abi dran: Ein Teilchen der Ladung q bewegt sich in einem Teilchenbeschleuniger annähernd mit Lichtgeschwindigkeit, d.h. v ≈ c (<- das bedeutet, dass man beim Rechnen für die Geschwindigkeit v = c einsetzten soll). Durch Magnetfelder der Flussdichte B wird es in Abschnitten auf Kreisbahnsegmente mit Radius r gezwungen. Zeige, dass zwischen der Energie des Teilchens und der benötigten magnetischen Flussdichte der folgende Zusammenhang besteht:



$$E = q \cdot r \cdot c \cdot B$$

Lösung:

a) $E = E_0 + E_{kin} = E_0 + U \cdot q$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow 1-(v/c)^2 = \left(\frac{E_0}{E}\right)^2 \rightarrow v/c = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \rightarrow \underline{\underline{v = c \cdot \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E_0+U \cdot q}\right)^2}}}$$

b) $F_L = F_z \rightarrow q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow q \cdot r \cdot B = m \cdot v = m \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow q \cdot B \cdot T = 2 \cdot \pi \cdot m$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{q \cdot B} \cdot m = \underline{\underline{\frac{2 \cdot \pi}{q \cdot B} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}}$$

c) Wie in b) ist $T = \frac{2 \cdot \pi}{q \cdot B} \cdot m = \frac{2 \cdot \pi}{q \cdot B} \cdot \frac{E}{c^2} = \underline{\underline{\frac{2 \cdot \pi}{q \cdot B} \cdot \frac{E_0 + E_{kin}}{c^2}}}$

mit $v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$ (siehe a))

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow r = \frac{T}{2 \cdot \pi} \cdot v = \frac{T}{2 \cdot \pi} \cdot c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} = \underline{\underline{\frac{T}{2 \cdot \pi} \cdot c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_0 + E_{kin}}\right)^2}}}$$

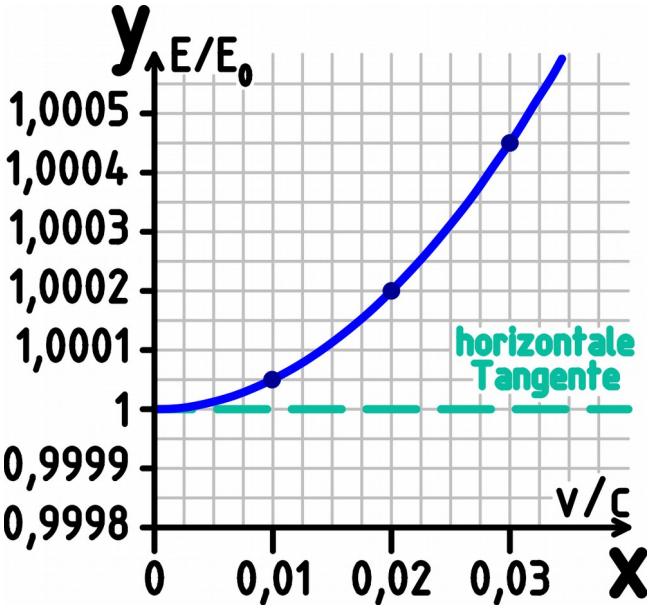
d) $F_z = F_L \rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = q \cdot v \cdot B$ Mit v = c gibt dass:

$$q \cdot c \cdot B = m \cdot \frac{c^2}{r} = \frac{m \cdot c^2}{r} = \frac{E}{r} \rightarrow \underline{\underline{E = q \cdot r \cdot c \cdot B}}$$

Aufgabe 9.150: Näherungsformel für die kinetische Energie

Das Rechnen mit den komischen Wurzeltermen ist recht lästig. Für kleine Geschwindigkeiten kann man versuchen die Energie mit einer einfachen Funktion anzunähern. Eine Gerade als Näherung funktioniert nicht, weil das v - E - Diagramm an der Stelle v = 0 eine horizontale Tangente hat, d.h. bei Näherung mit einer Geraden wäre die Energie unabhängig von der Geschwindigkeit und es gäbe gar keine kinetische Energie.

Man kann aber versuchen die Energie mit einer Parabel anzunähern. Das Bild zeigt die Energie (Gesamtenergie) eines Teilchens in Vielfachen der Ruheenergie in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Gezeigt wird ein Ausschnitt für recht kleine Geschwindigkeiten (bis ca. 12 Mio. m/s). Aus dem Diagramm soll in mehreren kleinen Arbeitsschritten eine Näherungsformel für die Gesamtenergie bei niedrigen Geschwindigkeiten und damit schließlich eine Näherungsformel für die kinetische Energie gewonnen werden (wir müssen dann ja nur noch die Ruhe-Energie abziehen).



a) Da der Scheitel der Parabel bei x = 0 liegt, lautet die Gleichung für die Näherungsparabel $y = a \cdot x^2 + c$. Bestimme a und c und schreibe die Parabelgleichung für y(x) auf. Am einfachsten geht es wenn man einen der markierten Punkte benutzt. Kontrolliere die benutzten Punkte am besten durch nachrechnen mit der exakten Formel mit dem Taschenrechner. (Kontrolle: $y = 0{,}5 \cdot x^2 + 1$)

b) Setze nun für x = (v/c) und für y = (E/Eo) ein und löse die Gleichung nach E auf. Löse beim Rechnen immer sofort jede Klammer auf, die entsteht. Jetzt haben wir eine Näherungsformel für die Gesamtenergie des Teilchens bei niedrigen Geschwindigkeiten.

c) Jetzt fehlen noch zwei Schritte. Bestimme zuerst aus dem Ergebnis von b) eine Näherungsformel für die kinetische Energie. Setze nun für die Ruheenergie Eo die noch drin steht Eo = mo · c² ein und vereinfache den Term soweit wie möglich.

Lösung:

a) Scheitel bei (0/1) -> c = 1 ; Noch ein Punkt, z.B: (0,02/1,0002) in die Parabelgleichung einsetzen gibt:

$$1{,}0002 = a \cdot 0{,}02^2 + 1 \quad / -1$$
$$0{,}0002 = a \cdot 0{,}0004 \quad / \ :0{,}0004$$
$$\underline{a = 0{,}5}$$

Also lautet die Parabelgleichung: $\underline{\underline{y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1}}$

b)
$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} + 1 \quad / \ \cdot E_0$$
$$\underline{\underline{E = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0}{c^2} \cdot v^2 + E_0}}$$

c) $$E_{kin} = E - E_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_0}{c^2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0 \cdot c^2}{c^2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$$

Damit haben wir die Näherungformel für die kinetische Energie bei kleinen Geschwindigkeiten gefunden:

$$\underline{\underline{E_{kin} \approx \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2}}$$

Aufgabe 9.151:

In großen Teilchenbeschleunigern werden Protonen mit dem 100-fachen ihrer Ruheenergie injiziert und bis auf das 7½-tausendfache ihrer Ruheenergie beschleunigt. Ihre Geschwindigkeit steigt dabei um 0,005% der Anfangsgeschwindigkeit.

Erkläre, weshalb sich die Geschwindigkeit der Protonen bei diesem Beschleunigungsprozess kaum verändert. Was verändert sich dagegen schon?

9.3 Energie-Impuls-Beziehung

klassisch: $E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=\frac{m\cdot v^2}{2}=\frac{m^2\cdot v^2}{2\cdot m}=\frac{(m\cdot v)^2}{2\cdot m}=\frac{p^2}{2\cdot m}$

$$\boxed{\text{Energie-Impuls-Beziehung: } E_{kin}=\frac{p^2}{2\cdot m}}$$

➔ Das bedeutet, dass ein Teilchen mit einer sehr großen Masse einen großen Impuls haben kann, ohne viel kinetische Energie zu besitzen.

➔ Ein Teilchen mit einer sehr kleinen Masse hat auch bei kleinem Impuls schon eine große kinetische Energie.

relativistisch:

Auch hier gilt p = m · v , nur muss man die relativistische Masse einsetzen.

$$E=m\cdot c^2=\frac{m_0\cdot c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad /\cdot\sqrt{\cdots} \qquad \text{gibt dann} \qquad E\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=E_0$$

Wir erweitern den Bruch in der Wurzel mit m (nicht mit m_0) , damit der Impuls rein-kommt

$$E\cdot\sqrt{1-\left(\frac{m\cdot v}{m\cdot c}\right)^2}=E_0 \qquad \text{Klammer auflösen gibt} \qquad E\cdot\sqrt{1-\frac{(m\cdot v)^2}{m^2\cdot c^2}}=E_0$$

Dann erweitern wir den Bruch in der Wurzel noch mit c^2 damit im Nenner die Gesamt-energie kommt

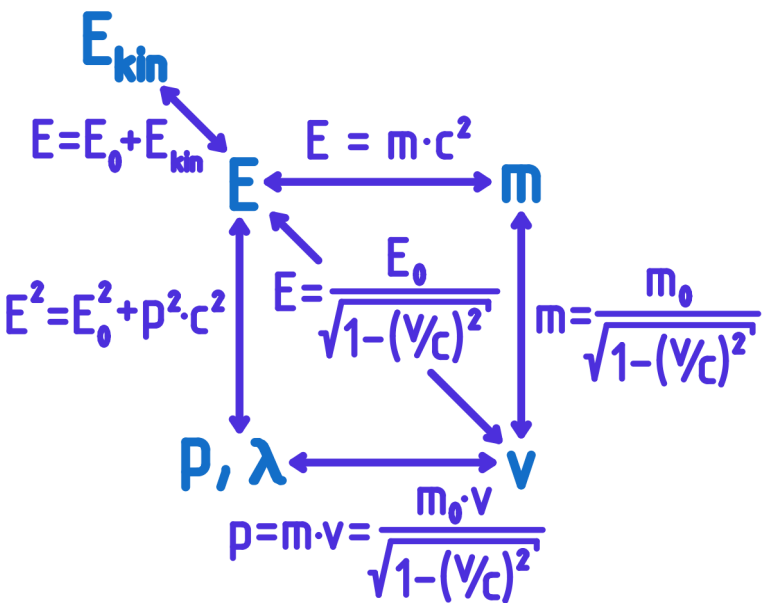
$$E\cdot\sqrt{1-\frac{(m\cdot v)^2\cdot c^2}{m^2\cdot c^2\cdot c^2}}=E_0 \qquad \text{Einsetzen von } m\cdot c^2=E \text{ gibt dann} \qquad E\cdot\sqrt{1-\frac{p^2\cdot c^2}{E^2}}=E_0$$

Jetzt quadrieren wir erst mal die ganze Gleichung

$$E^2\cdot\left(1-\frac{p^2\cdot c^2}{E^2}\right)=E_0^2 \qquad \text{Klammer auflösen gibt} \qquad E^2-p^2\cdot c^2=E_0^2$$

und erhalten

$$\boxed{\begin{array}{c} E^2=E_0^2+p^2\cdot c^2=\left(m_0\cdot c^2\right)^2+p^2\cdot c^2 \\ \text{relativistische Energie-Impuls-Beziehung} \end{array}}$$



Damit können wir jetzt die linke Ecke in unserem Rechen-diagramm ausfüllen.

Am häufigsten braucht man die relativistische Energie-Impuls-Relation zum Ausrechnen von Wellenlängen hochenergetischer Teilchen. Das lernen Sie erst in der 12ten. Weil das aber Ihre Hauptanwendung ist, gleich mal ein Beispiel dazu.

Aufgabe 9.152: Mit "de Broglie"

De Broglie sagt, dass mikroskopische Teilchen Welleneigenschaften besitzen. Die Wellenlänge λ der Teilchen ergibt sich aus ihrem Impuls p. Für diesen Zusammenhang gilt die Gleichung

$$p=\frac{h}{\lambda} \quad \text{bzw.} \quad \lambda=\frac{h}{p}$$

mit dem Planckschen Wirkungsquantum h (Zahlenwert siehe Formelsammlung).

a) Berechne die kinetische Energie und damit die notwendige Beschleunigungsspannung, die ein Proton haben muss, um eine Wellenlänge von 10^{-18}m zu erreichen.

b) Berechne die Wellenlänge eines Elektrons mit einer Energie von 50MeV.

Lösung:

a) $E=\sqrt{E_0^2+p^2\cdot c^2}=\sqrt{E_0^2+\frac{h^2}{\lambda^2}\cdot c^2} \rightarrow E_{kin}=E-E_0=\sqrt{E_0^2+\frac{h^2}{\lambda^2}\cdot c^2}-E_0$

$$=\sqrt{\left(938\cdot 10^6 eV\right)^2+\frac{\left(4{,}1\cdot 10^{-15} eV/s\right)^2}{\left(10^{-18} m\right)^2}\cdot\left(3\cdot 10^8 \frac{m}{s}\right)^2}-938\cdot 10^6 eV=$$

$$=\underline{1{,}2\cdot 10^{12} eV=1{,}2\,TeV}$$

D.h. es ist eine Beschleunigungsspannung von 1,2TV erforderlich.

b)
$$E^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2 = E_0^2 + \frac{h^2}{\lambda^2} \cdot c^2$$
$$\frac{h^2}{\lambda^2} \cdot c^2 = E^2 - E_0^2 \quad / \cdot \lambda^2 \quad / : (E^2 - E_0^2)$$
$$\lambda^2 = \frac{h^2 \cdot c^2}{E^2 - E_0^2}$$
$$\lambda = \sqrt{\frac{(4{,}1 \cdot 10^{-15}\, eV/s)^2 \cdot (3 \cdot 10^8\, m/s)^2}{(50 \cdot 10^6\, eV)^2 - (511 \cdot 10^3\, eV)^2}} = \underline{2{,}5 \cdot 10^{-14}\, m = 0{,}000025\, nm}$$

Aufgabe 9.153:

Elektronen bewegen sich in einem Magnetfeld der Flussdichte B auf einer Keisbahn mit Radius r.

a) Zeige, dass für den Impuls der Elektronen gilt: $p = e \cdot r \cdot B$

b) Berechne mit Hilfe der Energie-Impuls-Beziehung und der in a) gefundenen Formel die Energie von Elektronen, die sich in einem Magnetfeld der Flussdichte B = 0,5 T auf einer Kreisbahn mit Radius r = 8,0 cm bewegen. Wie groß ist die Geschwindigkeit dieser Elektronen?

c) Ab einer Energie von 1,005 · Eo sind die Elektronen relativistisch. Bestimmen Sie mit Hilfe von a) und der Energie-Impuls-Beziehung wie groß der Radius der Kreisbahn bei B = 0,5 T höchstens sein darf, damit wir noch klassisch rechnen können.

Lösung:

a) $F_L = F_z \rightarrow q \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow \underline{e \cdot r \cdot B = m \cdot v = p}$

b)
$$E^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2 = E_0^2 + (e \cdot r \cdot B)^2 \cdot c^2$$
$$E = \sqrt{(511 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J)^2 + (1{,}6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 0{,}08\, m \cdot 0{,}5\, T)^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^2}$$
$$\underline{E = 1{,}92 \cdot 10^{-12}\, J = 12\, MeV}$$

$$\underline{v = 0{,}999 \cdot c = 3{,}0 \cdot 10^8\, m/s}$$

c)
$$E^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2 \rightarrow p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}$$
$$r = \frac{p}{e \cdot B} = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c \cdot e \cdot B} = \frac{\sqrt{(1{,}005^2 - 1) \cdot (511 \cdot 10^3\, eV)^2}}{3 \cdot 10^8\, m/s \cdot e \cdot 0{,}5\, T} = \underline{0{,}34\, mm}$$

9.4 Raum und Zeit

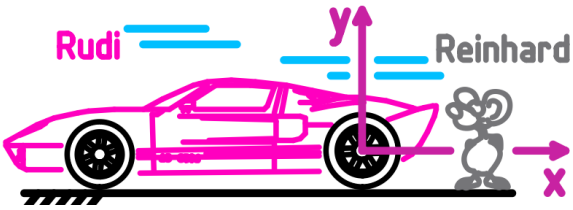
"Spezielle" Relativitätstheorie heißt: Keine Beschleunigung, also nur konstante Geschwindigkeit; alles was hier gesagt wird gilt nur unter dieser Bedingung.

9.4.1 Begriff: Bezugssystem; System

Um Bewegungsvorgänge beschreiben zu können braucht man zuerst mal ein Koordinatensystem, also ein Bezugssystem. Unser Koordinatensystem werden wir irgendwie in "unser Labor" legen. Ein Physiker im Andromedanebel wird sein Koordinatensystem in "sein Labor" legen. Die beiden Koordinatensysteme werden sich dann gegeneinander bewegen. Wenn sie ihr Koordinatensystem "richtig" wählen, dann werden alle Physiker im Universum dieselben physikalischen Gesetze finden.

Inertialsystem: Was heißt "richtig"?

Wir halten ein Bezugssystem für "richtig", wenn in dem System das erste Newtonsche Gesetz gilt. Dann gelten automatisch auch die anderen Newtonschen Gesetze und alle anderen physikalischen Gesetze die wir gefunden haben. Ein solches Bezugssystem, in dem das erste Newtonsche Gesetz gilt, nennen wir ein Inertialsystem.



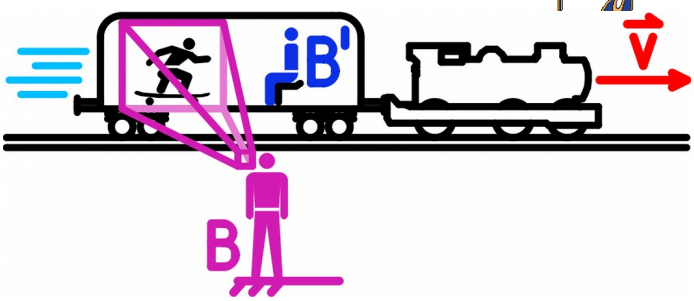
Wenn wir unser Koordinatensystem an Rudi Rasers Auto festmachen, bekommen wir beim Start an der Ampel kein Inertialsystem. Reinhard die Ratte wird in diesem System beschleunigt, obwohl keine Kraft auf ihn wirkt. Sobald Rudi allerdings auf der Autobahn ist, und mit 320 Sachen nach Würzburg fliegt haben wir ein Inertialsystem. Reinhard, auf den keine Kraft wirkt, bewegt sich in diesem System zwar mit hoher Geschwindigkeit, wird aber nicht weiter beschleunigt. D.h. sobald Rudi mit konstanter Geschwindigkeit fährt, egal wie schnell, ist das Koordinatensystem ein Inertialsystem.

9.4.2 Postulate der speziellen Relativitätstheorie

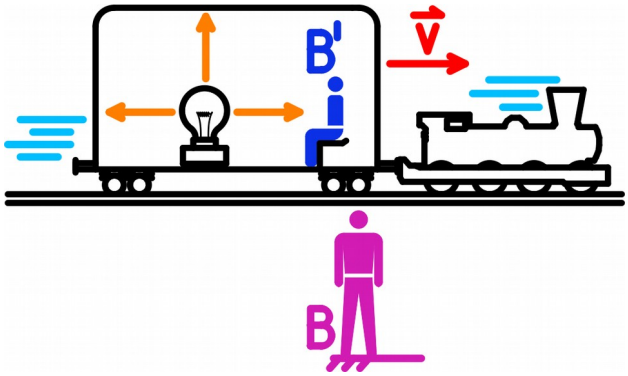
- ➔ Es gibt ein Inertialsystem und jedes Bezugssystem, das sich relativ zum ersten mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ist ebenfalls ein Inertialsystem in dem alle physikalischen Gesetze genau dieselbe Gestalt haben.

- ➔ Die Lichtgeschwindigkeit c ist in allen Inertialsystemen bei allen Bedingungen, d.h. auch in allen Richtungen, immer gleich groß.

Was bedeutet das?

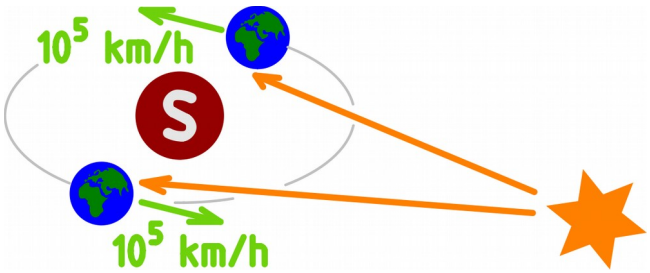


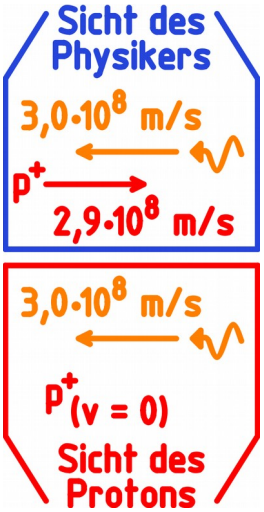
Wenn Franziska im Zug (v = 25m/s) Skateboard fährt (ist verboten) dann misst der Beobachter B' im Zug ihre Geschwindigkeit zu u' = 5m/s. Ein Beobachter außerhalb des Zuges misst für ihre Geschwindigkeit den Wert u = 30m/s. Das bedeutet die Geschwindigkeit von Franziska ist abhängig vom Bezugssystem des Beobachters.



Wenn man dasselbe Experiment mit Licht macht dann stellt man fest, dass beide Beobachter immer exakt dieselbe Größe für die Geschwindigkeit der Lichtstrahlen (Photonen) messen, und zwar unabhängig von der Richtung. Die Richtung ist nicht für beide gleich, denn ein Lichtstrahl, der für B' vertikal nach oben geht, der geht für B nach schräg rechts oben.

Für Lichtstrahlen, die von einem fernen Stern kommen, messen wir unabhängig von unserer momentanen Position auf der Umlaufbahn der Erde immer dieselbe Geschwindigkeit, obwohl wir einmal dem Lichtstrahl entgegen fliegen und ein anderes mal von ihm weg.





Selbst für ein Proton, dass im Teilchenbeschleuniger fast mit Lichtgeschwindigkeit fliegt, bewegt sich der ihm entgegenkommende Lichtstrahl mit derselben Geschwindigkeit an ihm vorbei.

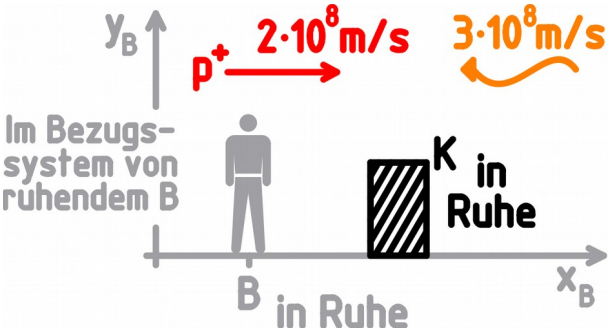
☠ Aus Sicht des Physikers im Labor haben Proton und Lichtstrahl eine Relativgeschwindigkeit von $5{,}9 \cdot 10^8 m/s$. Die Relativgeschwindigkeit zweier Körper kann in einem Bezugssystem also größer sein als die Lichtgeschwindigkeit. Aber die Geschwindigkeit eines Körpers gemessen in einem beliebigen Bezugssystem kann niemals größer als Lichtgeschwindigkeit sein.

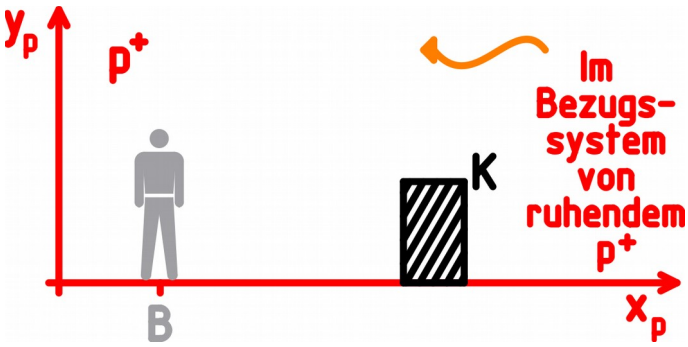
Die beiden aus unserer physikalischen Erfahrung kommenden Postulate von oben führen zu weitreichenden Schlussfolgerungen.

☠ Im Folgenden werden die Schlussfolgerungen nur dargestellt, nicht begründet. Es wird also nicht erklärt, weshalb das so sein muss.

Zuerst aber eine Aufgabe 9.154:

Im Bezugssystem, in dem der Beobachter B in Ruhe ist, bewegt sich ein Proton mit der angegebenen Geschwindigkeit nach rechts. Ein Photon bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit nach links. Die Kiste K und der Beobachter B sind in Ruhe.



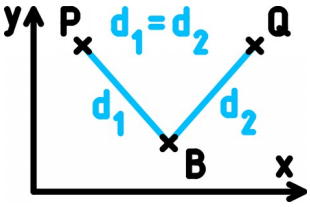


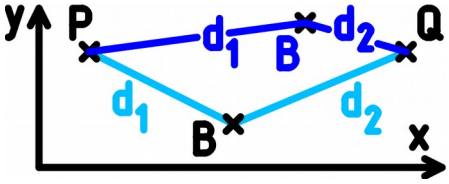
Wie groß sind die Geschwindigkeiten der vier Körper (Teilchen) im Bezugssystem, in dem das Proton ruht? Zeichne die Geschwindigkeiten in das zweite Bild ein.

9.4.3 Gleichzeitigkeit

Um den Begriff gleichzeitig benutzen zu können, muss man erst ein Bezugssystem wählen, das man dann nicht mehr verlassen darf. Der Begriff gleichzeitig ist unproblematisch, wenn zwei Ereignisse an ein und demselben Ort stattfinden. Nur wenn die Ereignisse an zwei verschiedenen Orten P und Q passieren, brauchen wir eine Definition für den Begriff. Dafür nutzen wir die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit.

Wir stellen den Beobachter B so, dass er von beiden Orten P und Q gleich weit entfernt ist. Das Ereignis bei P sendet einen Lichtstrahl zu B, genauso das Ereignis bei Q. Wenn beide Lichtstrahlen gleichzeitig bei B eintreffen, dann waren die Ereignisse bei P und Q gleichzeitig.

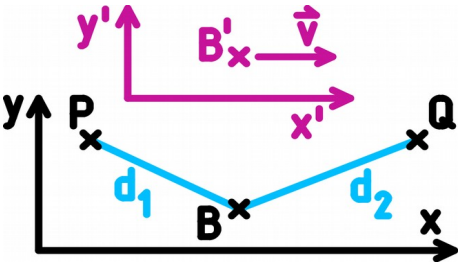




Das kann auch jeder andere Beobachter, der in unserem Bezugssystem in Ruhe ist (man sagt "der sich in unserem Bezugssystem befindet"). Wenn er die verschiedenen Laufweglängen für die beiden Lichtstrah-

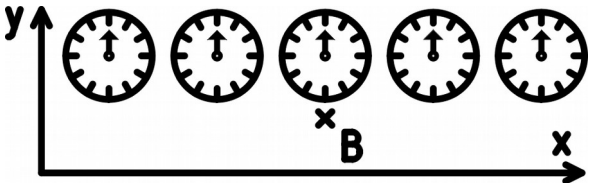
len berücksichtigt, dann stellt auch er genau dieselbe Gleichzeitigkeit wie B fest. Ein relativ zu unserem Bezugssystem bewegter Beobachter hat andere Bedingungen und stellt die Gleichzeitigkeit nicht fest.

Zwei räumlich getrennte Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, sind in keinem anderen, relativ dazu bewegten Bezugssystem, gleichzeitig.

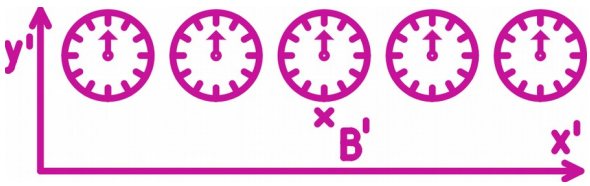


Wir stellen uns einen Beobachter B' vor, der sich zu dem Zeitpunkt, zu dem die Lichtstrahlen bei B eintreffen genau an der selben Stelle wie B befindet, und der sich sehr schnell in Richtung Q bewegt. Wenn B und B' genau an der selben Stelle sind, sollen die Uhren von B und B' genau dieselbe Zeit anzeigen (Da die beiden Ereignisse an demselben Ort stattfinden haben wir kein Problem mit der Gleichzeitigkeit). Dann wird B' für das Ereignis Q (das sich auf ihn zu bewegt) einen früheren Zeitpunkt als B feststellen, und für das Ereignis bei P (das sich von ihm wegbewegt) einen späteren Zeitpunkt als B. Beide haben recht, ihre Messungen gelten aber nur innerhalb ihres eigenen Bezugssystems.

9.4.4 Uhrensynchronisation



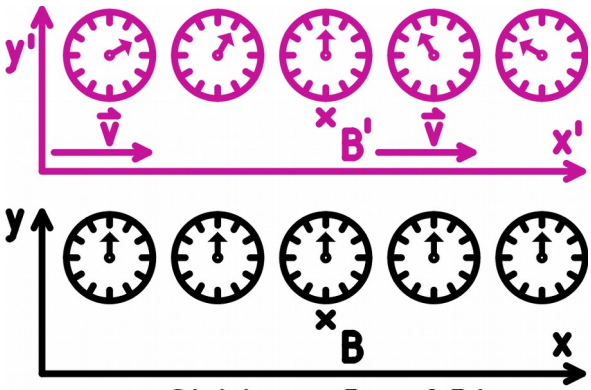
Jetzt, da wir Gleichzeitigkeit feststellen können, können wir auch in unserem Bezugssystem beliebig viele Uhren synchronisieren.



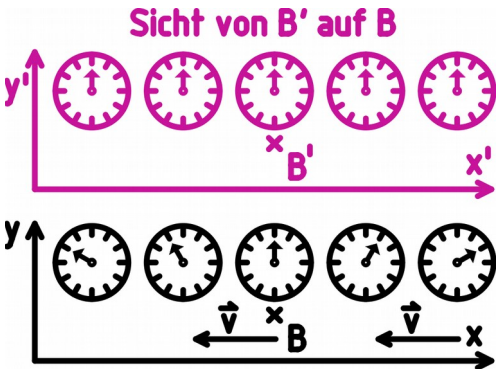
Wenn alle Uhren gleichzeitig dieselbe Zeit anzeigen, dann sind sie synchron. Dasselbe kann natürlich der relativ zu uns bewegte Beobachter B' in seinem eigenen Bezugssystem machen.

Wenn wir als Beobachter B jetzt die Uhren von B' ablesen stellen wir fest, dass die Uhren, die sich auf uns zu bewegen vorgehen und dass die Uhren, die sich von uns wegbewegen, nachgehen.

Genau dasselbe stellt natürlich der Beobachter B' fest. Aus seiner Sicht sind ja wir es, die sich bewegen, und zwar in die entgegengesetzte Richtung.



Sicht von B auf B'



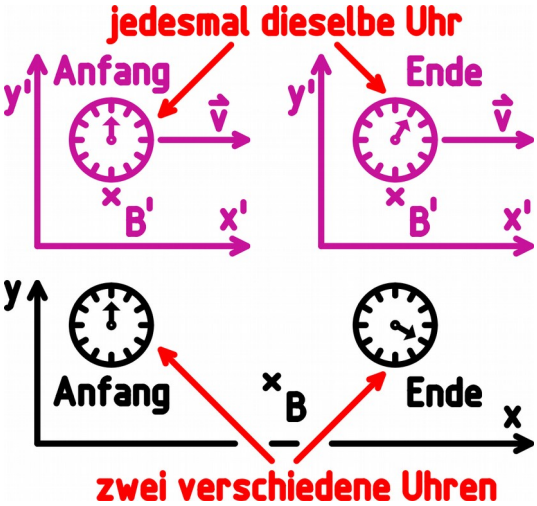
Für keinen von beiden gehen also die Uhren des anderen synchron.

> Zwei in einem Bezugssystem ruhende Uhren, die in diesem Berugssystem synchron gehen, gehen in keinem anderen, relativ dazu bewegten Bezugssystem synchron.

9.4.5 Zeitdilatation

Die Zeitdilatation handelt von der Zeitspanne zwischen zwei Ereignissen, gemessen in zwei verschiedenen Bezugssystemen. Außerdem behandelt die Zeitdilatation ausschließlich einen extremen Spezialfall:

☠ Von Zeitdilatation kann man nur sprechen, wenn in einem der beiden Systeme die beiden relevanten Ereignisse an derselben Position stattfinden.



Wir betrachten also zwei Ereignisse, die im System S' an ein und derselben Position stattfinden. Der Beobachter B' braucht nur eine Uhr, um die Zeitspanne zwischen den beiden Ereignissen $\Delta t'$ zu messen. Im System S finden die beiden Ereignisse an verschiedenen Positionen statt, und der Beobachter B braucht zwei verschiedene Uhren um die Zeitspanne zwischen den beiden Ereignissen Δt zu messen. Unter der Bedingung, dass beide Ereignisse im System S' an derselben Position stattfinden, misst der Beobachter B eine längere Zeitspanne zwischen den Ereignissen, als B'.

Es gilt:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}}$$

Im System S' besitzt der Vorgang eine kürzere Dauer, als vom System S ausgesehen.

Es gilt:

$$\boxed{\Delta t' = \sqrt{1-(v/c)^2} \cdot \Delta t}$$

➔ Der Beobachter, für den beide Ereignisse am selben Ort stattfinden, der misst die kürzere Zeitspanne.

Aufgabe 9.155:

☠ Scheinbares Paradoxon: Weil sich B' bewegt, misst B eine längere Zeit als B'. Von B' aus gesehen bewegt sich aber B, also muss B' eine längere Zeit messen als B.

Erkläre weshalb die Argumentation zum Herbeiführen des Widerspruchs nicht gültig ist.

Alles was bisher gesagt wurde gilt nur, für konstante Relativgeschwindigkeiten. Sobald eines der Bezugssysteme beschleunigt wird, gelten andere Bedingungen, und das bisher gesagte kann nicht mehr zur Argumentation herangezogen werden.

Aufgabe 9.156:

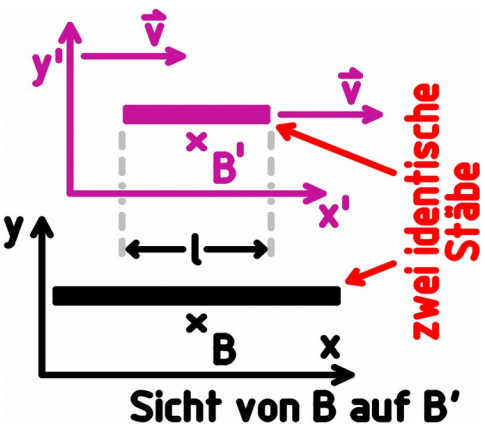
Zwillingsparadoxon: Von zwei 17jährigen Zwillingen Emil und Siegfried fliegt Siegfried mit einem schnellen Raumschiff zu den Sternen. Emil bleibt auf der Erde. Da Siegfried sich sehr schnell bewegt misst er für die Reise eine kürzere Zeitspanne als Emil. Wenn Siegfried zurück auf die Erde kommt, ist er 25 und sein Zwilling Emil ist 95. Aus der Sicht von Siegfried bewegt sich Emil, und deshalb sollte Emil die kürzere Zeitspanne messen, also müsste Emil nach der Reise jünger als Siegfried sein. Hierin liegt der Widerspruch, das Paradoxon.

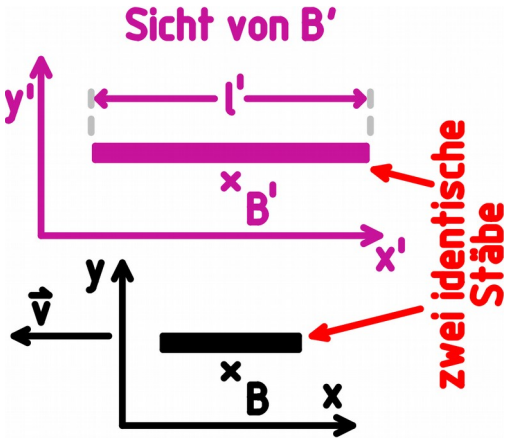
In Wirklichkeit ist nach der Landung von Siegfried auf der Erde der zu Hause gebliebene Zwilling Emil älter. Wir können das nicht ausrechnen, aber doch wenigstens ein bisschen davon verstehen.

Erkläre, weshalb die Situation nicht symmetrisch bezüglich der beiden Zwillinge ist, die beiden also in der Überlegung nicht austauschbar sind. Erkläre außerdem, weshalb dieses Problem nicht in unser Modell der "speziellen Relativitätstheorie" passt. Diese Theorie behandelt ja nur einen Spezialfall.

9.4.6 Längenkontraktion

Wir betrachten einen parallel zur Bewegungsrichtung liegenden Stab im System S'. Im Bild ist ein identischer Stab - der im System S ruht - eingezeichnet. Für den Beobachter B ist der sich für ihn bewegende Stab kürzer als sein eigener. Er misst für den aus seiner Sicht bewegten Stab die im Vergleich zur Länge seines eigenen Stabes kleinere Länge l.





Aus der Sicht von B' stellt sich die Situation umgekehrt dar. Er misst für den aus seiner Sicht ruhenden Stab die Länge l'. Mit den Variablen aus den Bildern gilt:

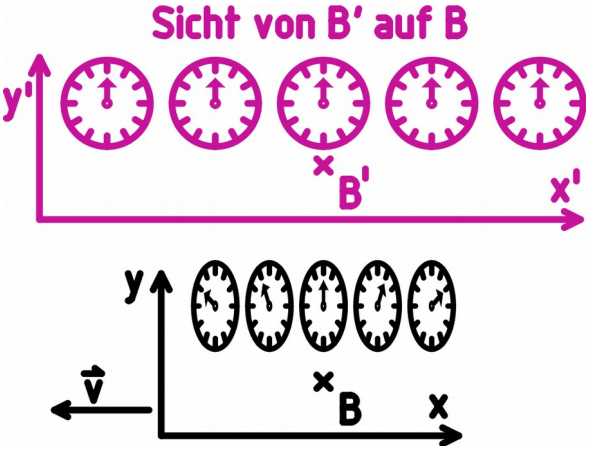
$$\boxed{l = l' \cdot \sqrt{1-(v/c)^2}}$$

➔ Der Beobachter, für den der Stab sich bewegt, misst ihn kürzer.

➔ Im Gegensatz zu der Situation, die wir bei der Zeitdilatation betrachtet haben, ist diese Situation (wenn in beiden Systemen derselbe Stab liegt) bezüglich der Systeme symmetrisch, d.h. die beiden Systeme sind austauschbar.

☠ Ihre Formelsammlung benutzt evtl. andere Bezeichnungen für die Variablen. Die Bedeutung der Variablen wird in einer Formelsammlung nicht sehr ausführlich erklärt. D.h. Sie müssen das wissen.

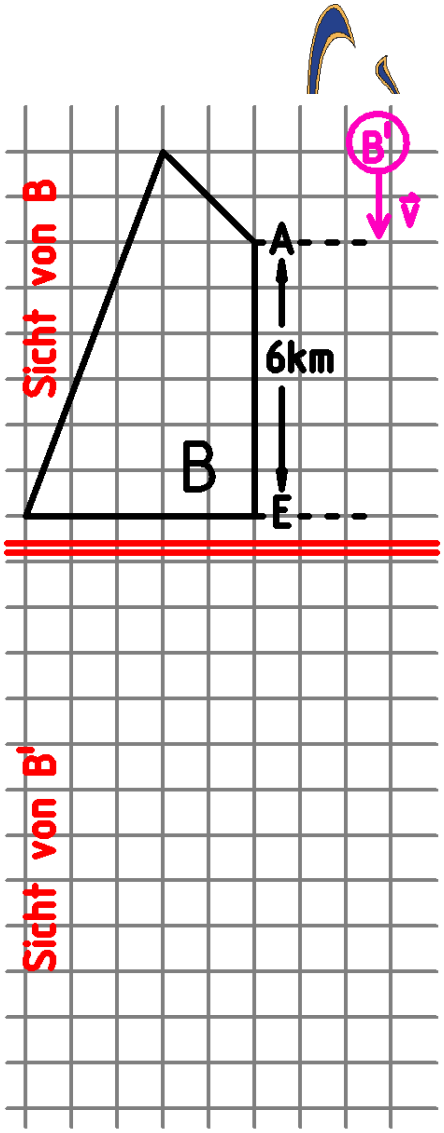
In Anbetracht der Längenkontraktion, müssen wir alle Bilder von vorhin in unserer Vorstellung nochmal korrigieren. Wenn zum Beispiel B' auf eine Reihe von Uhren blickt, die in S synchron laufen, dann gehen die Uhren nicht nur vor oder nach, sie werden für ihn auch in Bewegungsrichtung gestaucht und zusammengeschoben.



Bemerkung: Wer mehr über die Relativitätstheorie lesen will findet dazu einen regelrechten Überfluss im Internet. Die ersten üblichen Verdächtigen sind natürlich LEIFI und Wikipedia. Hier findet ihr dann auch weiterführende Links. Ein interessanter Suchbegriff wäre vielleicht noch "Relativistisches Additionstheorem für Geschwindigkeiten".

Aufgabe 9.157:

Durch kosmische Strahlung entstehen in der oberen Atmosphäre sehr schnelle Teilchen. Das Teilchen B' bewegt sich mit $v=\sqrt{3/4}\cdot c$ am Berg vorbei in Richtung Erdboden. Der Beobachter B steht auf der Erde und beobachtet den Vorgang.



a) Wir betrachten den Vorgang: "Das Teilchen B' bewegt sich von A nach E." Wer misst für diesen Vorgang die kürzere Zeitspanne, B oder B' ? Begründe deine Antwort.

b) Beobachter B misst für die Flugdauer des Teilchens B' von A nach E eine Zeit von 23µs. Wie lange dauert der Flug aus Sicht des Teilchens B' ?

c) Wie lang ist die Strecke von A nach E aus Sicht des Teilchens B' ?

d) Wie sieht der Berg aus der Sicht von B' aus? Zeichne in das Bild die Sicht von B' auf den Berg ein.

Lösung:

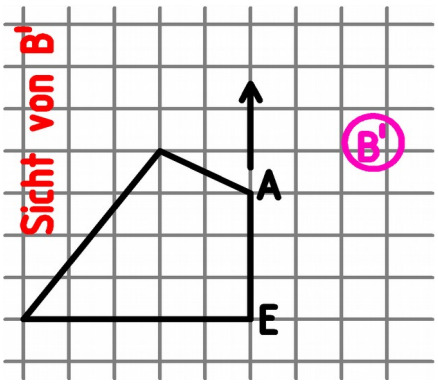
a) Es geht um die Zeitspanne zwischen den Ereignissen "B' ist bei A" und "B' ist bei E". Diese beiden Ereignisse finden aus der Sicht von B' am selben Ort statt, und deshalb misst B' dafür die kürzere Zeitspanne.

b) $t'=t\cdot\sqrt{1-(v/c)^2}=23\text{ns}\cdot\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\underline{11{,}5\,ns}$ die von B' gemessene Zeit

c) Aus der Sicht von B' bewegt sich die Strecke [AE]. Also misst er die Strecke kürzer.

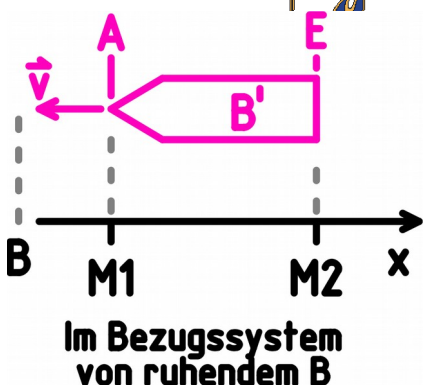
$$l'=l\cdot\sqrt{1-(v/c)^2}=6\text{km}\cdot\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\underline{3\text{km}}$$

d) siehe Bild



Aufgabe 9.158:

Eine Rakete mit Beobachter B' fliegt mit $v=\sqrt{3/4}\cdot c$ am Beobachter B vorbei. Das Bild zeigt einen Moment kurz vor dem Vorbeiflug der Rakete an B, und zwar im Bezugssystem des ruhenden Beobachters B.



a) Wer misst für den Vorbeiflug der Rakete an B - also die Zeitspanne von "A ist bei B" bis "E ist bei B" - die kürzere Zeitspanne, B oder B' ? Begründe deine Antwort.

b) Weshalb ist deine Antwort auf a) in Einklang mit der Längenkontraktion?

c) Wie lang ist die Zeit, die B' für den Vorbeiflug misst, wenn B dafür eine Zeit von 4ns misst?

d) Der Beobachter B hat sich zwei Markierungen M1 und M2 auf seiner x-Achse gemacht. In seinem Bezugssystem gibt es während des Vorbeiflugs einen Zeitpunkt, zu dem die Rakete genau zwischen die beiden Markierungen passt. Erkläre mit einer Gleichzeitigkeitsbetrachtung, weshalb es kein Widerspruch ist, dass die Rakete im Bezugssystem von B' nicht zwischen die beiden Markierungen passt.

Lösung:

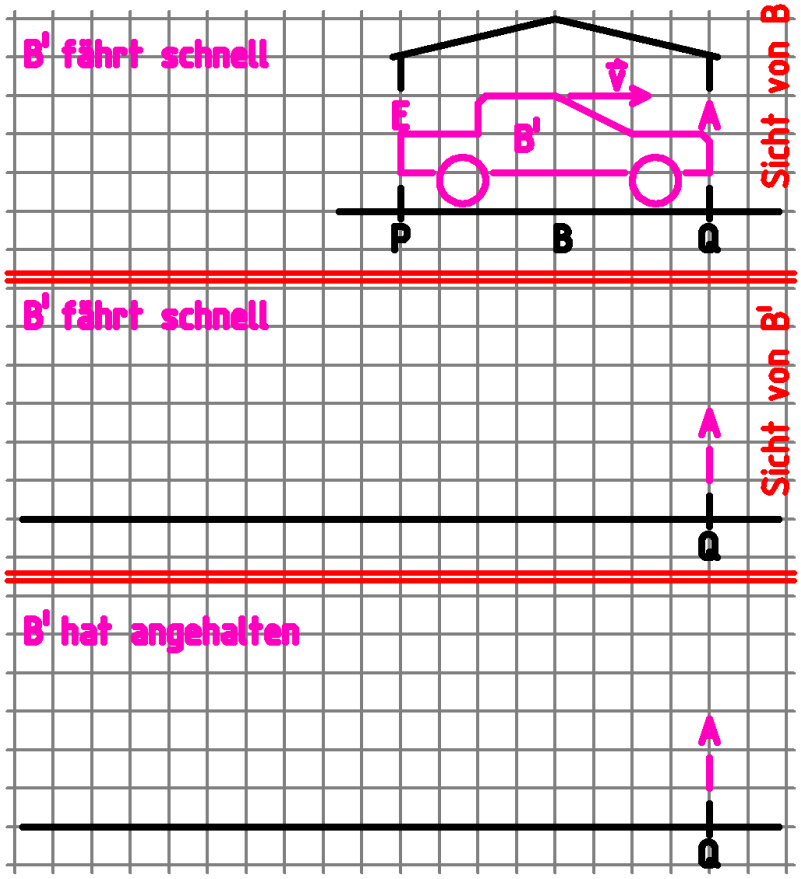
a) B misst die kürzere Zeitspanne, weil für ihn die beiden relevanten Ereignisse am selben Ort stattfinden, nämlich bei B.

b) Aus der Sicht von B' muss der Beobachter B mit der Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter einen Weg zurücklegen, welcher der Länge der Rakete entspricht. Aus der Sicht von B muss während des Vorgangs der Punkt E mit derselben Relativgeschwindigkeit einen Weg zurücklegen, welcher der Länge der Rakete entspricht. Weil aber die Rakete aufgrund ihrer Bewegung im Bezugssystem von B verkürzt wird muss der Punkt E nur einen kürzeren Weg zurücklegen und braucht deshalb weniger Zeit.

c) B' misst längere Zeit -> durch Wurzel teilen: $t'=\frac{t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{4\,ns}{\sqrt{1-3/4}}=\underline{\underline{8\text{ns}}}$

d) Die beiden Ereignisse "A ist bei M1" und "E ist bei M2" können im Bezugssystem von B' nicht gleichzeitig sein, weil sie für B gleichzeitig sind und sich B' relativ zu B bewegt. Deshalb kann die Rakete im Bezugssystem von B' auf keinen Fall genau zwischen die Markierungen passen.

Aufgabe 9.159:



B' fährt mit seinem Auto sehr schnell mit $v=\sqrt{3/4}\cdot c$ an B vorbei und durch die Garage. Die Punkte A und E sind Anfang und Ende vom Auto, die Punkte P und Q sind Anfang und Ende von der Garage. Das Bild zeigt die Sicht von B zum Zeitpunkt, wenn A gerade bei Q ist.

a) Zeichne Garage und Auto inklusive der Punkte P und E aus der Sicht von B' zu dem Zeitpunkt, wenn A gerade bei Q ist.

b) Aus der Sicht von B passt das Auto in die Garage rein, aus der Sicht von B' nicht. Weshalb ist das kein Widerspruch? Erkläre den Sachverhalt in Zusammenhang mit Gleichzeitigkeits-Betrachtungen.

c) Wir betrachten den Vorgang: "Das Auto fährt am Punkt P vorbei." Also den Zeitraum zwischen den Ereignissen "A ist bei P" und "E ist bei P". Wer misst für diesen Vorgang die kürzere Zeitspanne, B' oder B? Begründe deine Antwort.

d) Wir betrachten den Vorgang: "Die Kühlerhaube des Autos bewegt sich durch die Garage." Also den Zeitraum zwischen den Ereignissen "A ist bei P" und "A ist bei Q". Wer misst für diesen Vorgang die kürzere Zeitspanne, B' oder B? Begründe deine Antwort.

e) Genau wenn der Punkt A des Autos am Punkt Q der Garage ist, bleibt das Auto plötzlich stehen. Der Beobachter B' wechselt also in das Bezugssystem von B, und beide haben dieselbe Sicht auf die Situation. Zeichne für diesen Zeitpunkt Garage und Auto aus der gemeinsamen Sicht der beiden Beobachter.

f) Wir gehen nochmal zurück und betrachten die Durchfahrt des schnell fahrenden Autos durch die Garage. Die Garage hat eine Ruhelänge von 4m, das Auto hat eine Ruhelänge von 8m. Welche Zeit stoppt B' für die Durchfahrt durch die Garage, also für

den Zeitraum von "A ist bei P" bis "E ist bei Q". Welche Zeit stoppt B für diesen Vorgang? (38,5ns bzw. 30,8ns)

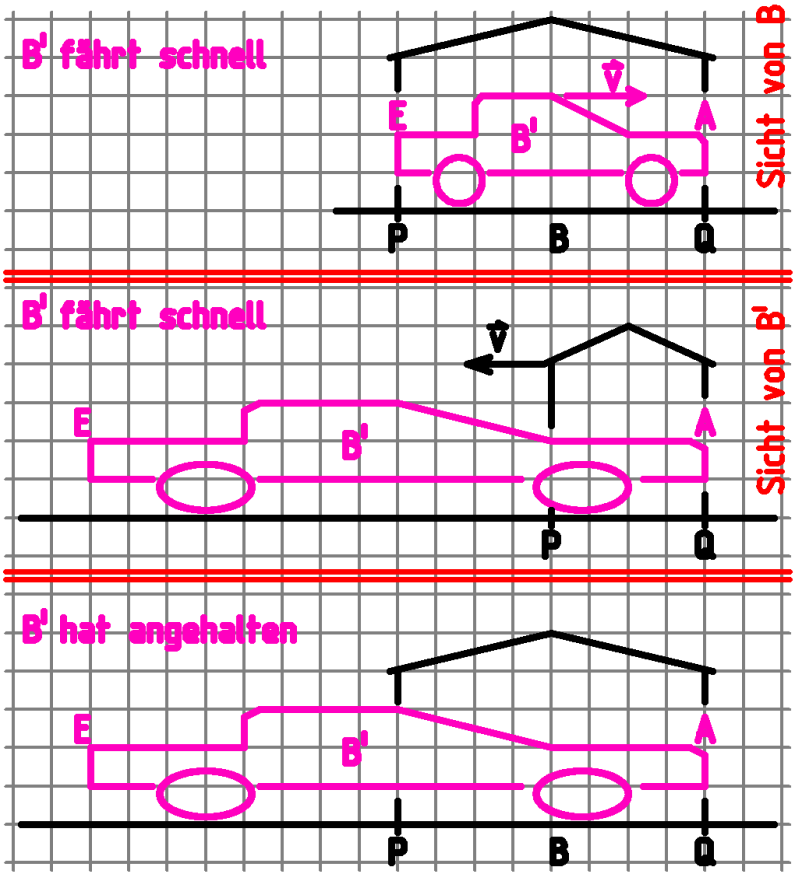
Lösung:

a) Als erstes muss man den Verkürzungsfaktor ausrechnen.

$$l_{kurz} = l_{lang} \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} = l_{lang} \cdot \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \underline{\frac{1}{2} \cdot l_{lang}}$$

D.h. die durch Bewegung verkürzte Länge erscheint halb so lang wie in Ruhe. Aus der Sicht von B erschien das sich bewegende Auto auf die Hälfte verkürzt. Da das Auto aus der Sicht von B' in Ruhe ist, ist es für ihn also doppelt so lang wie für B, außerdem hat das Auto in Wirklichkeit (in seinem Ruhesystem) ovale Reifen. Die Garage bewegt sich nur aus der Sicht von B', sie erscheint für B' also auf die Hälfte verkürzt.

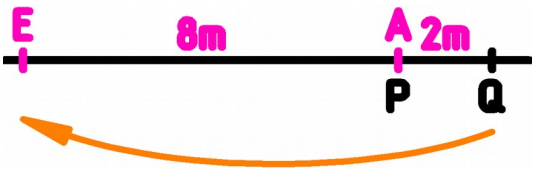
b) Aus der Sicht von B sind die Ereignisse "A ist bei Q" und "E ist bei P" gleichzeitig. Deshalb denkt er, dass das Auto in die Garage reinpasst. Da die beiden Ereignisse an zwei verschiedenen Orten stattfinden und sich der Beobachter B' relativ zu B bewegt, können die beiden Ereignisse für B' nicht gleichzeitig sein. Die Längen von Garage und Auto können für ihn also nicht gleich lang sein.



c) B misst die kürzere Zeit, weil für ihn die beiden Ereignisse am selben Ort stattfinden, nämlich bei P.

d) B' misst die kürzere Zeit, da für ihn die beiden Ereignisse am selben Ort stattfinden, nämlich bei A.

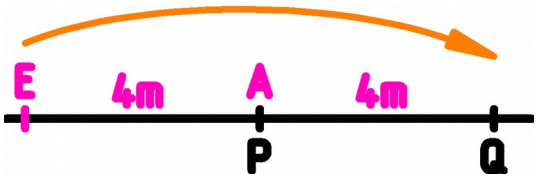
e) Alles in Ruhelänge; siehe Bild



f) Aus der Sicht von B' muss während des Vorgangs der Punkt Q der Garage mit der Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme die verkürzte Garagenlänge und die Ruhelänge des Autos zurücklegen.

$$v=\frac{\Delta x'}{\Delta t'} \rightarrow \Delta t'=\frac{\Delta x'}{v}=\frac{10\,m}{\sqrt{3/4}\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}=\underline{\underline{38{,}5\,ns}}$$ von B' gestoppte Zeit

Aus der Sicht von B muss der Punkt E des Autos mit derselben Relativgeschwindigkeit die verkürzte Autolänge und die Ruhelänge der Garage zurücklegen.

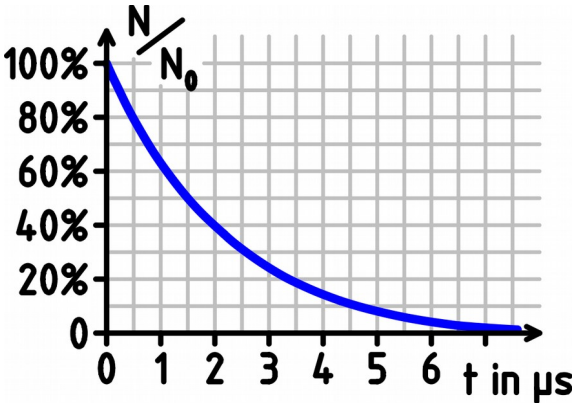


$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}=\frac{8\text{m}}{\sqrt{3/4}\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}=\underline{\underline{30{,}8\,ns}}$$ von B gestoppte Zeit

☠ Beachte, dass hier unser Modell der Zeitdilatation nicht anwendbar ist, weil wir kein Bezugssystem haben, in dem die beiden relevanten Ereignisse "A ist bei P" und "E ist bei Q" am selben Ort stattfinden.

Aufgabe 9.160:

Instabile Myonen (das sind Elementarteilchen aus der Klasse der Leptonen) entstehen in einer Höhe von 9000m über dem Erdboden und bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von 0,998c. Das Diagramm rechts zeigt den Anteil der noch nicht zerfallenen Myonen in Abhängigkeit von der nach der Entstehung verstrichenen Zeit.



a) Wie lange brauchen die Myonen um die Erdoberfläche zu erreichen? Wie groß ist der prozentuale Anteil der Myonen, die ohne Berücksichtigung relativistischer Effekte die Erdoberfläche erreichen sollten?

b) Weshalb erreichen in Wirklichkeit sehr viel mehr Myonen die Erdoberfläche?

c) Berechne die Zeit, die aus Sicht der Myonen während des Fluges zum Erdboden verstreicht. Wie viel Prozent der Myonen kommen also auf der Erdoberfläche an?

d) Berechne, wie groß aus Sicht der Myonen bei ihrer Entstehung die Entfernung zum Erdboden ist.

e) Berechne mit c) und d) die Geschwindigkeit mit der im Bezugssystem der Myonen der Erdboden auf sie zu kommt.

Lösung:

a) $v=\frac{s}{t} \Rightarrow t=\frac{s}{v}=\frac{9000\text{m}}{0{,}998\cdot 3\cdot 10^8\, m/s}=\underline{\underline{30\,\mu s}}$

Nach 30µs sind laut Diagramm so gut wie keine Myonen mehr vorhanden, d.h. es sollten so gut wie keine Myonen auf der Erdoberfläche ankommen.

b) Im Ruhesystem der Myonen verstreicht sehr viel weniger Zeit (Zeitdilatation) und deshalb sind die Myonen viel jünger als 30µs wenn sie auf der Erdoberfläche ankommen, und deshalb sind auch noch nicht so viele zerfallen, weshalb mehr Myonen auf der Erdoberfläche ankommen.

c) $t'=t\cdot\sqrt{1-(v/c)^2}=30\,\mu s\cdot\sqrt{1-0{,}998^2}=\underline{\underline{1{,}9\,\mu s}}$

Laut Diagramm kommen damit ungefähr 40% der Myonen auf der Erdoberfläche an.

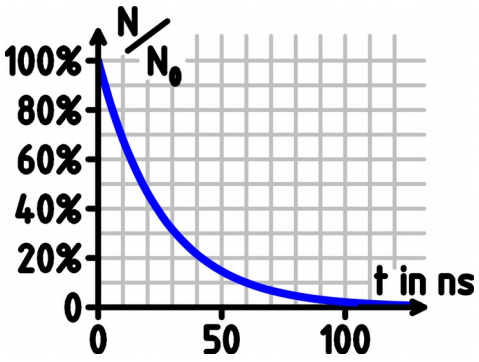
d) Aus Sicht der Myonen ist die 9000m lange Strecke kürzer (Längenkontraktion).

$l'=l\cdot\sqrt{1-(v/c)^2}=9000\text{m}\cdot\sqrt{1-0{,}998^2}=\underline{\underline{569\,m}}$

e) $v'=\frac{569\,m}{1{,}9\cdot 10^{-6}\,s}=2{,}995\cdot 10^8\,\frac{m}{s}=\underline{\underline{0{,}998\,c}}$

Über die Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Beobachtern kann es nie Missverständnisse geben. Aus der Sicht des Myons bewegen wir uns genauso schnell, wie sich das Myon aus unserer Sicht bewegt, nur in entgegengesetzte Richtung.

Aufgabe 9.161:



(ähnlich wie Abitur 2012) Das Diagramm rechts zeigt den Anteil der noch vorhandenen Pionen (π-Mesonen) in Abhängigkeit der seit der Entstehung verstrichenen Zeit. Die Pionen bewegen sich nach ihrer Entstehung mit einer Geschwindigkeit von 0,985c durch einen 8,0m langen Tunnel. Wie viel Prozent der Pionen kommen am Ende des Tunnels an.

a) Berechne die Laufzeit im Ruhesystem der Pionen und lies aus dem Diagramm ab. (Beachte: Längenkontraktion, Relativgeschwindigkeit systemunabhängig)

b) Rechne zuerst die Laufzeit im Laborsystem aus, anschließend über Zeitdilatation die Flugzeit für die Pionen und lies aus dem Diagramm ab.

c) Anton berechnet die Laufzeit der Pionen ohne relativistische Effekte zu berücksichtigen. Zu welcher Meinung kommt er wenn er ausrechnet, wie viel Prozent der Pionen am Ende des Tunnels ankommen?

Lösung:

a)
Längenkontraktion des Tunnels: $l'=8{,}0\,m\cdot\sqrt{1-0{,}985^2}=\underline{1{,}38\,m}$

Flugdauer: $v=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ → $\Delta t'=\frac{\Delta x'}{v}=\frac{1{,}38\,m}{0{,}985\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}=\underline{4{,}7\,ns}$

Aus dem Diagramm liest man ab, dass nach 4,7ns noch ca. 80% der Pionen übrig sind und am Ende des Tunnels ankommen.

b)
Laufzeit im Laborsystem: $\Delta t=\frac{\Delta x}{v}=\frac{8{,}0\,m}{0{,}985\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}=\underline{27\,ns}$

Zeit im Pionensystem: $\Delta t'=27\text{ns}\cdot\sqrt{1-0{,}985^2}=\underline{4{,}7\,ns}$

Ablesen aus dem Diagramm liefert natürlich dasselbe Ergebnis wie bei a).

c) Anton kommt auf eine Laufzeit von 27ns und liest aus dem Diagramm ab, dass nur ungefähr 33% der Pionen am Ende des Tunnels ankommen.

Aufgabe 9.162:

Ein Photon fliegt zum Andromedanebel (Entfernung: 2,5 Mio Lichtjahre = $2{,}4\cdot 10^{22}$ m) Wie lange dauert der Flug aus der Sicht des Photons? Wie lang ist die Flugstrecke aus Sicht des Photons?

Lösung:

Für die verstrichene Zeit bzw. den zurückgelegten Weg in unserem Bezugssystem schreiben wir t bzw. l und damit ergibt sich:

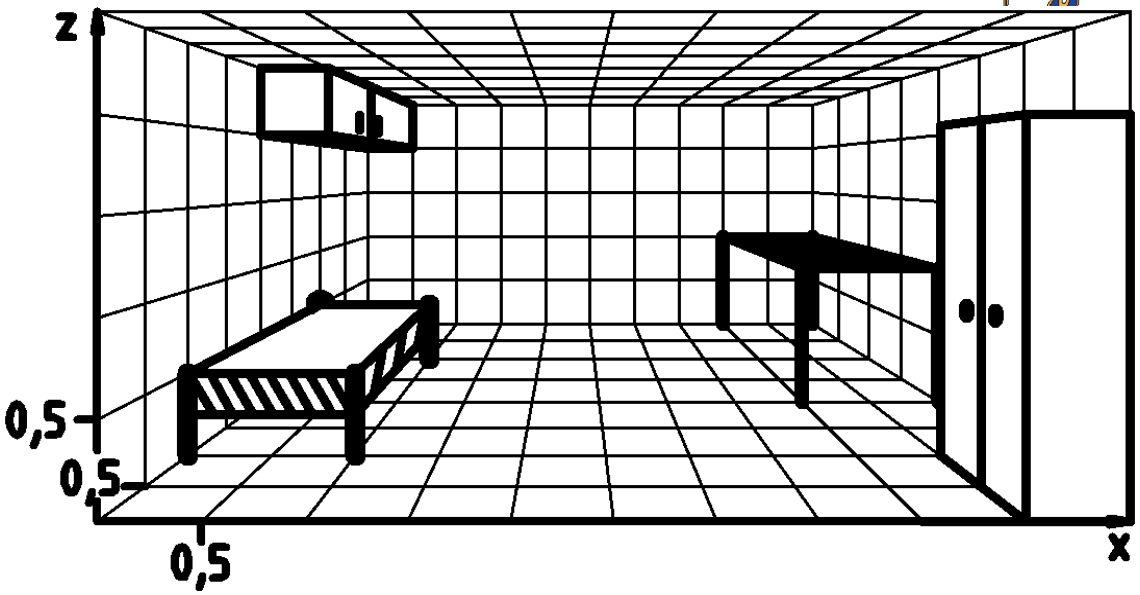
Zeitdilatation: $t_{Ph}=t\cdot\sqrt{1-(c/c)^2}=t\cdot 0=\underline{\underline{0{,}0\,s}}$

Längenkontraktion: $l_{Ph}=l\cdot\sqrt{1-(c/c)^2}=l\cdot 0=\underline{\underline{0{,}0\,m}}$

Für das Photon verstreicht also keine Zeit und es gibt auch keine Entfernung!

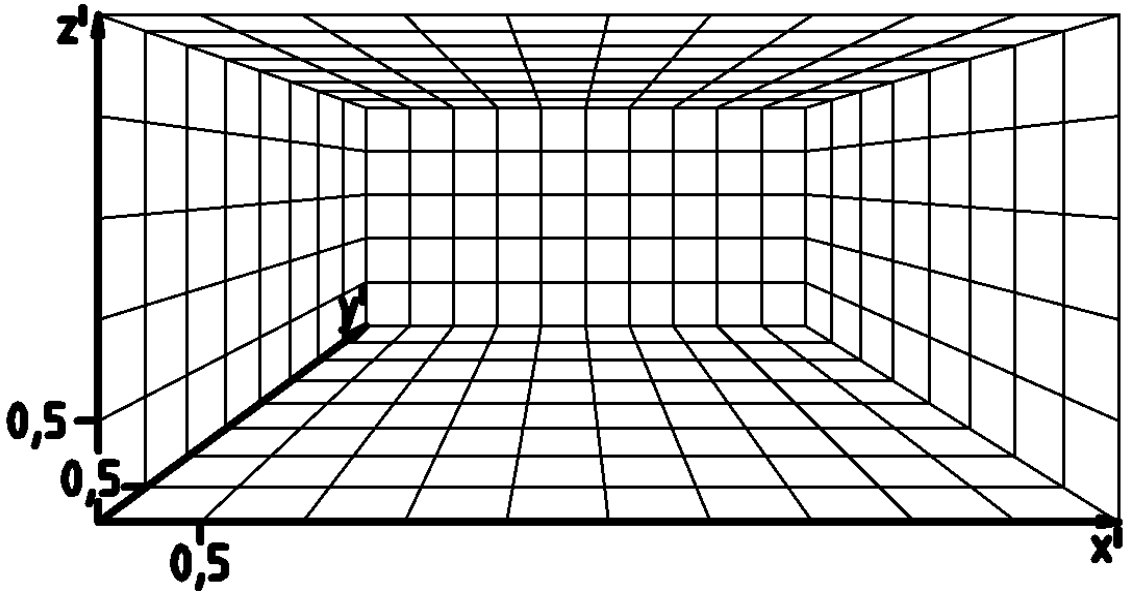
Aufgabe 9.163:

Das Bild zeigt Antons Zimmer, so wie er es sieht. Die Achsen sind in Metern skaliert. Zeichne in das KOSY unten das Zimmer, so wie es ein Beobachter sieht, der sich gerade mit $(\sqrt{3}/2)\cdot c$ in y-Richtung (in die Zeichenebene hinein) bewegt.



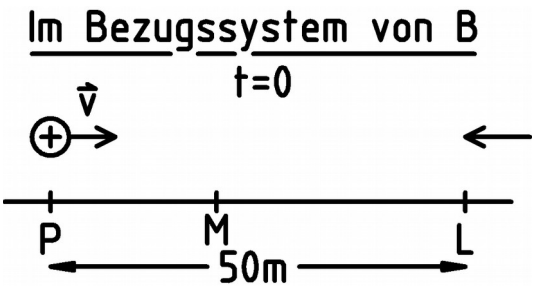
Lösung:

Beachte: Längenkontraktion nur in y-Richtung. Keine Veränderung in x- und in z-Richtung.



Aufgabe 9.164:

ISB_Zeitdilatation (Link-Ebene im Lehrplan)



Aufgabe 9.165:

Im Bezugssystem von B (Labor) bewegt sich ein Proton mit $v = 2 \cdot 10^8 m/s$ nach rechts und ein Photon (Lichtstrahl) nach links. Zum Zeitpunkt t=0 ist das Proton bei P und das Photon bei L (gleichzeitig).

➔ Im Bezugssystem von B

a) Wie lange dauert es im Bezugssystem von B, bis sich Proton und Photon am Punkt M treffen? Wie weit ist der Punkt M von P entfernt?

➔ Im Bezugssystem des Protons

Die Zeitmessung des Protons beginnt zum Zeitpunkt, wenn das Proton gerade bei P ist (t' = 0).

b) Begründe, dass die Ereignisse "Proton ist bei P" und "Lichtstrahl ist bei L" im Bezugssystem des Protons nicht gleichzeitig sind.

c) Wie lange dauert es im Bezugssystem des Protons vom Zeitpunkt an dem das Proton bei P ist bis zum Zusammentreffen mit dem Lichtstrahl bei M? (Tipp: Zeitdilatation)

d) Wie groß sind die Entfernungen von P nach L, von P nach M und von M nach L im Bezugssystem des Protons?

e) Wie lang ist die Strecke, die der Lichtstrahl während des Fluges des Protons von P nach M im Bezugssystem des Protons zurücklegt? Fertige eine maßstabsgetreue Zeichnung für die Lage der Punkte P, M, L und L' (der Punkt an dem der Lichtstrahl zum Zeitpunkt t' = 0 ist) im Bezugssystem des Protons an. Beschrifte die Abstände zwischen benachbarten Punkten.

f) Zu welchem Zeitpunkt war der Lichtstrahl im Bezugssystem des Protons beim Punkt L? Fertige eine skalierte Zeitachse für die zeitliche Wahrnehmung des Protons an und trage die Ereignisse "Lichtstrahl ist bei L", "Proton ist bei P" und "Lichtstrahl und Proton treffen sich bei M" ein. Fertige eine gleichwertige Zeitachse für die zeitliche Wahrnehmung von B (im Laborsystem) an.

Lösung:

Vom Proton zurückgelegter Weg: $\Delta x_{Pr} = 2\cdot 10^8 m/s \cdot \Delta t$

Vom Photon zurückgelegter Weg: $\Delta x_{Ph} = 3\cdot 10^8 m/s \cdot \Delta t$

a) Zusammen 50m: $2\cdot 10^8 m/s \cdot \Delta t + 3\cdot 10^8 m/s \cdot \Delta t = 50 m$

$5\cdot 10^8 m/s \cdot \Delta t = 50\text{m} \rightarrow \Delta t = \frac{50\,m}{5\cdot 10^8 m/s} = \underline{0{,}1\,\mu s}$

Flugstrecke des Protons: $\Delta x_{Pr} = 2\cdot 10^8 m/s \cdot 0{,}1\cdot 10^{-6} s = \underline{20\text{m}}$

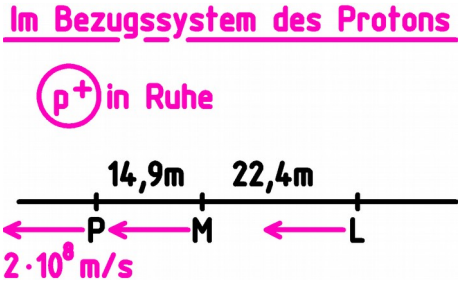
Im Bezugssystem von B dauert es also 0,1µs bis zum Zusammentreffen und der Punkt M ist 20m von P entfernt.

b) Die beiden Ereignisse finden an verschiedenen Orten statt, und sind aus der Sicht von B gleichzeitig. Weil das Proton sich relativ zu B bewegt, können die beiden Ereignisse für das Proton nicht gleichzeitig sein.

c) Für das Proton finden die Ereignisse "Proton ist bei P" und "Proton ist bei M" am selben Ort statt, deshalb misst es die kürzere Zeit.

$$\Delta t_{Pr} = \Delta t \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} = 0{,}1\cdot 10^{-6} s \cdot \sqrt{1-(2/3)^2} = \underline{0{,}0745\,\mu s}$$

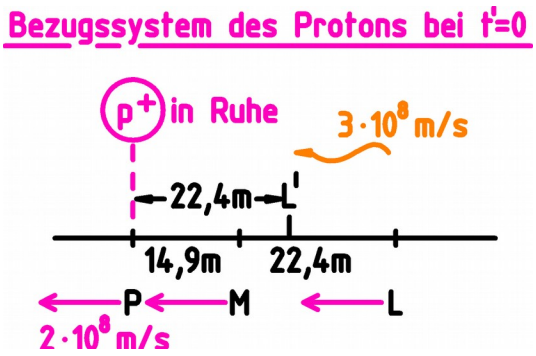
d) Aus der Sicht des Protons bewegen sich die Strecken [PM] und [ML]. Deshalb sind diese Strecken im Bezugssystem des Protons kürzer.



$$l' = l \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} = 20\text{m} \cdot \sqrt{1-(2/3)^2} = \underline{14{,}9\,m}$$
$$30\,m \cdot \sqrt{1-(2/3)^2} = \underline{22{,}4\,m}$$

Beachte auch, dass im Bezugssystem des Protons das Proton in Ruhe ist, und dass sich hier die Punkte P, M und L mit hoher Geschwindigkeit nach links bewegen.

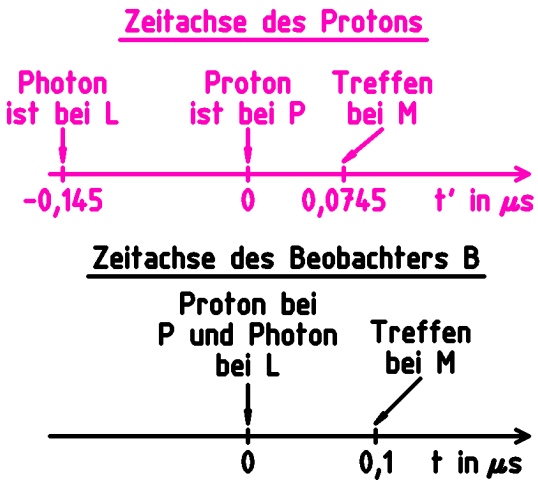
e) Flugstrecke des Photons im Bezugssystem des Protons während das Proton von P nach M fliegt.



$$\Delta x'_{Ph} = 3\cdot 10^8 m/s \cdot 0{,}0745\cdot 10^{-6} s = \underline{22{,}4\,m}$$

f) Im Bezugssystem des Protons befindet sich das Photon zum Zeitpunkt t' = 0 bereits 14,9m links vom Punkt L. Wenn man ausrechnen will, wie lang es her ist, dass das Photon und L am selben Ort waren, muss man berücksich-

tigen, dass sich der Punkt L im Bezugssystem des Protons auch bewegt.

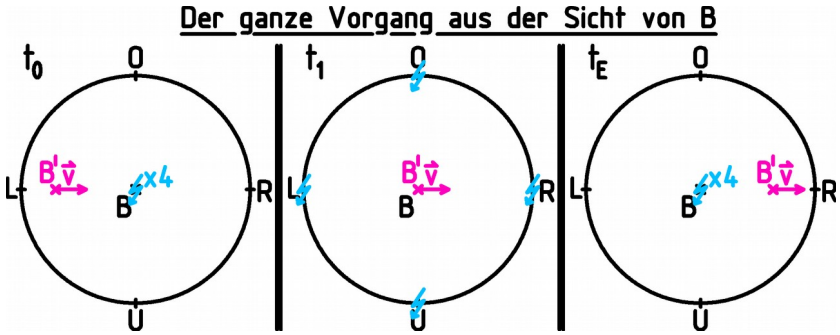


Das Photon ist im Bezugssystem des Protons nur um $1\cdot 10^8 m/s$ schneller als der Punkt L.

$$1\cdot 10^8 m/s = \frac{14{,}9\,m}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{14{,}9\,m}{1\cdot 10^8 m/s} = \underline{0{,}149\,\mu s}$$

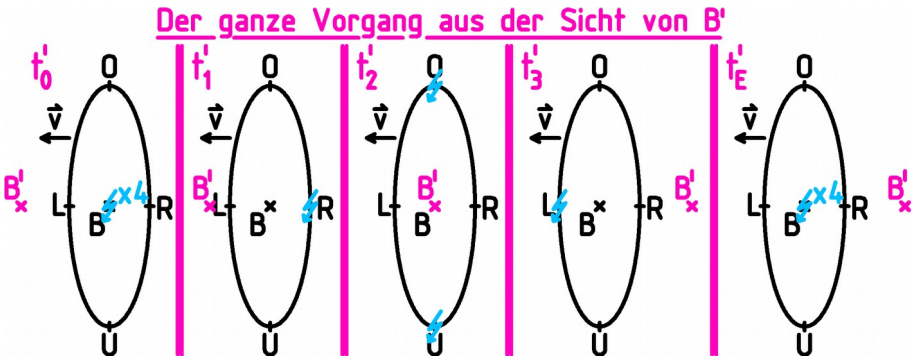
Wenn das Proton bei P ist, dann ist also aus Sicht des Protons das Ereignis "Photon ist bei L" längst vorbei, ganz anders als für den Beobachter B im Labor.

Aufgabe 9.166: Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, Gleichzeitigkeit



B hat um seine Position einen Kreisförmigen Spiegel mit Radius $r = 3\cdot 10^9 m$ angebracht. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ schickt er vier Lichtstrahlen von seiner Position aus zu dem Punkten O, U, L und R. Die Lichtstrahlen kommen in seinem Bezugssystem gleichzeitig bei den vier Punkten an, werden reflektiert (genau zu dem Zeitpunkt, wenn B' auf B liegt) und kommen in seinem Bezugssystem auch gleichzeitig wieder bei ihm an.

Der Beobachter B' bewegt sich relativ zu B in LR-Richtung mit einer Geschwindigkeit von $v = \sqrt{8/9}\cdot c$ und nimmt die zeitliche Reihenfolge der Ereignisse anders war, und zwar so wie im Bild dargestellt.



a) Aus der Sicht von B werden die vier Lichtstrahlen gleichzeitig ausgesendet und die vier Lichtstrahlen kommen auch wieder gleichzeitig bei ihm an. Begründe, weshalb das Aussenden der vier Lichtstrahlen und das wieder Ankommen der vier Lichtstrahlen bei B auch für B' gleichzeitig stattfindet.

b) Begründe, weshalb die Ereignisse "Lichtstrahl kommt bei O an", "Lichtstrahl kommt bei U an" und "B' liegt auf B" aus der Sicht von B' ebenfalls gleichzeitig stattfinden.

c) Wie lange dauert es im Bezugssystem von B, vom Aussenden der vier Lichtstrahlen, bis zur Ankunft an den vier Spiegeln, und von den Spiegeln wieder zurück zu B?

➔ Ab jetzt wechseln wir in das Bezugssystem von B'

d) Die Bewegung der Lichtstrahlen von B nach O und U, und wieder zurück nach B findet für B bezüglich der Bewegungsrichtung von B' am selben Ort statt. Berechne mit Hilfe der Zeitdilatation, wie lange der Flug der Lichtstrahlen von B nach O und U dauert, und wie lange der Flug wieder zurück zu B aus der Sicht von B' dauert.

➔ Wir betrachten den Vorgang: "Der Lichtstrahl läuft von B nach R"

e) Wie groß ist die Entfernung zwischen B und R aus der Sicht von B'? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Lichtstrahl aus der Sicht von B' nach rechts? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der Punkt R aus der Sicht von B' nach links? Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit von Lichtstrahl und Punkt R im Bezugssystem von B'? Wie lange dauert es im Bezugssystem von B', bis der Lichtstrahl von B bei R ankommt?

➔ Wir betrachten den Vorgang: "Der Lichtstrahl läuft von R nach B"

f) Wie groß ist im Bezugssystem von B' die Relativgeschwindigkeit von B und dem in Richtung B laufenden Lichtstrahl? Wie lange dauert im Bezugssystem von B' der Flug des Lichtstrahls von R nach B?

Mit der bis jetzt gesammelten Erfahrung kannst du die linke Seite selbst bearbeiten.

g) Wie lange dauert im Bezugssystem von B' der Flug des Lichtstrahls von B nach L? Wie lange dauert der Flug wieder zurück von L nach B?

h) Fertige eine maßstabsgetreue Zeichnung zweier bei Null beginnender, skalierter Zeitachsen für B und für B' an auf denen du alle wichtigen Ereignisse des ganzen Vorgangs einträgst. Für beide Beobachter soll dass Aussenden der Lichtstrahlen bei B zum Zeitpunkt Null geschehen.

9.5 Abi mit Lösung

Aufgabe 9.167: Abi 2001

In einem Synchrotron bewegen sich Protonen auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius r = 100 m in einer evakuierten Röhre. Das Magnetfeld von Elektromagneten hält die Protonen auf der Bahn. Vereinfachend soll hier angenommen werden, dass das Magnetfeld über dem gesamten Bereich homogen ist. Die Einschussgeschwindigkeit wird als vernachlässigbar angesehen. Elektrische Felder, die bei jeder Umrundung neu durchlaufen werden, beschleunigen die Protonen, bis sie nahezu Lichtgeschwindigkeit erreichen.

a) Wie kann man grundsätzlich erreichen, dass die Protonen trotz zunehmender Geschwindigkeit auf derselben Kreisbahn bleiben?

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v1 eines Protons, wenn es erstmals die Beschleunigungsspannung von 100 kV durchlaufen hat. Warum ist hier eine relativistische Rechnung nicht notwendig?

Nach einigen Umläufen haben die Protonen die Geschwindigkeit $2{,}62\cdot 10^8\,m/s$ erreicht.

c) Berechnen Sie relativistisch die Gesamtenergie E der Protonen in GeV. Um wie viel Prozent hat sich dabei ihre Masse vergrößert? (Kontrolle: E = 1,93 GeV)

d) Bestimmen Sie die Flussdichte, die das Magnetfeld haben muss, damit die Protonen aus Teilaufgabe c) auf der Bahn gehalten werden?

Lösung:

a) Die magnetische Flussdichte des Magnetfeldes muss ständig an die gesteigerte Geschwindigkeit der Protonen angepasst also permanent erhöht werden.

b) Die kinetische Energie von 100 keV = 0,1 MeV ist deutlich weniger als 0,5% der Ruheenergie des Protons von 938 MeV -> klassische Rechnung

$$E_{kin}=E_{el} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=U\cdot e \rightarrow v=\sqrt{\frac{2\cdot U\cdot e}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 100\cdot 10^3\,V\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C}{1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg}}=\underline{\underline{4{,}38\cdot 10^6\,m/s}}$$

Bemerkung: Auch am Ergebnis sieht man, dass eine relativistische Rechnung nicht notwendig ist, weil die Geschwindigkeit unter 0,1c liegt.

c) $E_{ges}=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{0{,}938\,GeV}{\sqrt{1-(2{,}62/3)^2}}=\underline{\underline{1{,}926\,GeV}}$

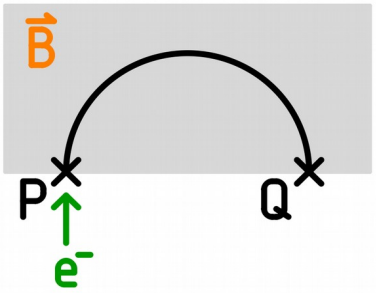
$\frac{m}{m_0}=\frac{E}{E_0}=\frac{1{,}93\,GeV}{0{,}938\,GeV}=\underline{2{,}06}$

D.h. die Masse hat sich um 106% auf 206% der Ruhemasse vergrößert.

d) $F_Z=F_L \rightarrow m\cdot\frac{v^2}{r}=e\cdot v\cdot B \rightarrow B=\frac{m\cdot v}{e\cdot r}=\frac{2{,}06\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}kg\cdot 2{,}62\cdot 10^8 m/s}{1{,}6\cdot 10^{-19}C\cdot 100\,m}=\underline{\underline{56{,}3\,mT}}$

Aufgabe 9.168: Abi 2005; Relativistische Elektronen

Im Punkt P treten Elektronen in ein begrenztes, homogenes Magnetfeld mit der Geschwindigkeit v = 0,98·c ein. In der Skizze ist die halbkreisförmige Bahn der Elektronen im Magnetfeld dargestellt.

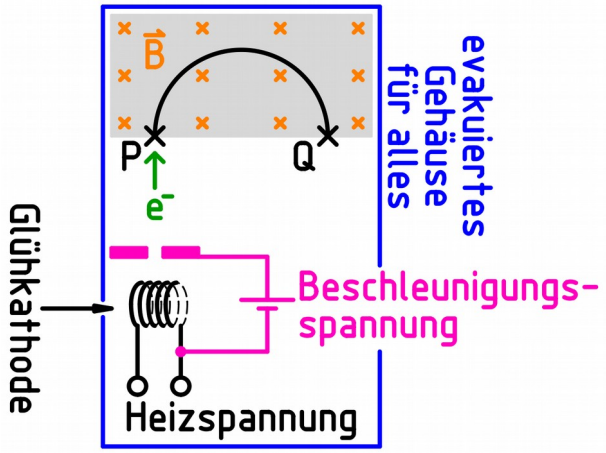


a) Übertragen Sie die nebenstehende Skizze auf ihr Blatt. Ergänzen Sie sie durch eine beschriftete, schematische Darstellung einer Anordnung zur Erzeugung und Beschleunigung der Elektronen und zeichnen Sie die Orientierung des Magnetfeldes ein.

b) Berechnen Sie die Masse der Elektronen in Vielfachen der Ruhemasse und bestimmen Sie damit die notwendige Beschleunigungsspannung Ub. (Kontrolle: m = 5,03·...)

c) Die Flussdichte des Magnetfeldes beträgt 500 mT. Berechnen Sie den Bahnradius und die Flugdauer von P nach Q.

Lösung:



a) siehe Bild

b) $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-0{,}98^2}}=\underline{\underline{5{,}03\cdot m_0}}$

$\Rightarrow E=5{,}03\cdot E_0 \Rightarrow E_{kin}=4{,}03\cdot E_0=\underline{\underline{2{,}06\,MeV}}$

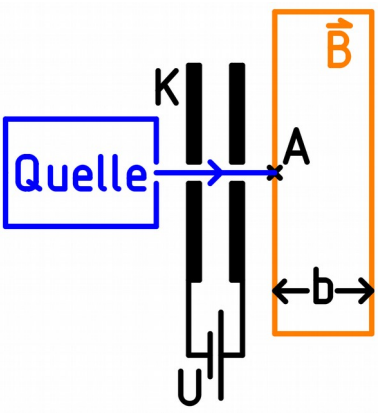
D.h. man braucht eine Beschleunigungsspannung von 2,06 MV.

c)
$$F_Z = F_L \rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = e \cdot v \cdot B \rightarrow$$
$$r = \frac{m \cdot v}{e \cdot B} = \frac{5{,}03 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 0{,}98 \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 0{,}5\,T} = \underline{\underline{0{,}0168\,m}}$$

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{\pi \cdot 0{,}0168\,m}{0{,}98 \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s} = \underline{\underline{0{,}18\,ns}}$$

Aufgabe 9.169: Abi 1999

Aus einer Quelle gelangen Elektronen der einheitlichen kinetischen Energie 30 keV in den Kondensator K an dem die Spannung U = 0,17 MV anliegt. Die Elektronen werden im Kondensator weiter beschleunigt und gelangen durch zwei Blenden in den Bereich eines senkrecht zur Zeichenebene gerichteten Magnetfeldes der Flussdichte B=1,2T und der Breite b = 5,0 cm.



a) Berechnen Sie relativistisch die Geschwindigkeit der Elektronen nach dem Verlassen des Kondensators.

b) Entscheiden Sie durch Rechnung, ob die Elektronen den Magnetfeldbereich nach rechts durchqueren können.

Lösung:

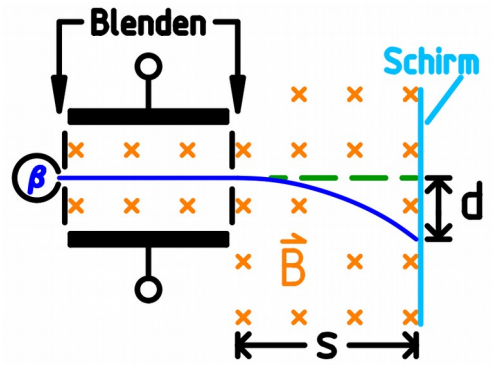
a)
$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow v = c \cdot \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2} = 3 \cdot 10^8\,m/s \cdot \sqrt{1-\left(\frac{511 \cdot 10^3\,eV}{711 \cdot 10^3\,eV}\right)^2}$$
$$\underline{v = 2{,}09 \cdot 10^8\,m/s}$$

b) Es muss der Radius der Kreisbahn ausgerechnet werden. Wenn der Radius größer als 5cm ist verlassend die Elektronen das Magnetfeld nach rechts.

$$F_L = F_z \rightarrow e \cdot v \cdot B = m \cdot \frac{v^2}{r} \rightarrow e \cdot r \cdot B = m \cdot v = \frac{E}{c^2} \cdot v$$
$$r = \frac{E \cdot v}{e \cdot B \cdot c^2} = \frac{711 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J \cdot 2{,}09 \cdot 10^8\,m/s}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 1{,}2\,T \cdot 9 \cdot 10^{16}\,m^2/s^2} = \underline{\underline{1{,}4\,mm}}$$

Die Elektronen können den Bereich also bei weitem nicht durchqueren.

Aufgabe 9.170: Abi 2001; Bucherer, modifiziert



Elektronen treten aus einer Betastrahlenquelle durch eine Blende in den Kondensator ein. Die Elektronenquelle liefert Elektronen unterschiedlicher Energien. Das Magnetfeld ist im gesamten Bereich der Apparatur homogen. Die Anordnung dient zum Nachweis der relativistischen Massenzunahme.

a) Erläutern Sie wie die eingezeichnete Bahn zustande kommt. Wie muss der Kondensator gepolt sein?

b) Berechnen Sie die Masse der Elektronen in Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke E im Kondensator, der magnetischen Flussdichte B, dem Abstand s und der Ablenkung d. Verwenden Sie die Näherungsformel $s^2 \approx 2rd$ um den Radius r der Kreisbahn im Magnetfeld zu ersetzen (die Gültigkeit der Näherungsformel soll nicht diskutiert werden).

Kontrolle: $\left(m=\frac{s^2 \cdot e \cdot B^2}{2 \cdot E \cdot d}\right)$

Für E = 800000V/m, B = 4,0mT und s = 5,0cm ergibt sich eine Ablenkung d = 3,3mm.

c) Bestimme die sich aus den Messwerten ergebende Masse.

d) Bestimme die Geschwindigkeit der gemessenen Elektronen und damit die sich aus dieser Geschwindigkeit ergebende relativistische Masse der Elektronen und entscheide begründet, ob der Versuch die Relativitätstheorie bestätigt.

e) Um wie viele mm würde die Ablenkung d anders als die gemessene ausfallen, wenn die Masse geschwindigkeitsunabhängig wäre?

Lösung:

a) Im Kondensator herrscht für Elektronen der Geschwindigkeit v = E/B ein Kräftegleichgewicht zwischen elektrischer Kraft und Lorentzkraft, deshalb durchfliegen Elektronen dieser Geschwindigkeit den Kondensator ohne Ablenkung durch beide Blenden. Hinter dem Kondensator erzeugt die allein wirkende Lorentzkraft eine Kreisbahn von der nur ein Ausschnitt durchlaufen wird, weil der Radius zu groß ist.

Am Kondensator muss unten Minus und oben Plus sein.

$$s^2 = 2 \cdot r \cdot d \;\rightarrow\; r = \frac{s^2}{2 \cdot d}$$

b) $$F_z = F_L \;\rightarrow\; m \cdot \frac{v^2}{r} = e \cdot v \cdot B \;\rightarrow\; m \cdot v = r \cdot e \cdot B \;\rightarrow\; m \cdot \frac{E}{B} = r \cdot e \cdot B = \frac{s^2}{2 \cdot d} \cdot e \cdot B$$

$$\Rightarrow m = \frac{s^2 \cdot e \cdot B^2}{2 \cdot E \cdot d}$$

c) $$m = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 0{,}004^2 T^2 0{,}05^2 m^2}{2 \cdot 800000\, V/m \cdot 0{,}0033\, m} = \underline{1{,}21 \cdot 10^{-30} kg}$$

d) $$v = \frac{E}{B} = \frac{8 \cdot 10^5 V/m}{4 \cdot 10^{-3} T} = \underline{2 \cdot 10^8 m/s}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} kg}{\sqrt{1-(2/3)^2}} = \underline{1{,}22 \cdot 10^{-30} kg}$$

Die Abweichung der gemessenen Masse in c) weicht von dem von der Relativitätstheorie vorhergesagten Wert in d) um weniger als 1% ab. Damit ist die Theorie bestätigt.

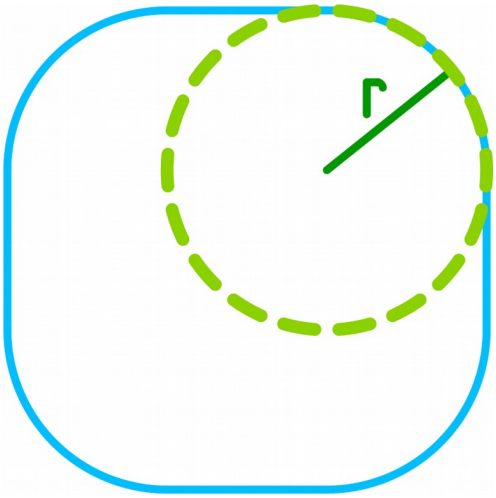
e) Hier sollen Sie die alte Formel von oben wieder hernehmen.

$$m = \frac{e \cdot B^2 \cdot s^2}{2 \cdot E \cdot d} \;\rightarrow\; d = \frac{e \cdot B^2 \cdot s^2}{2 \cdot E \cdot m} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} C \cdot 0{,}004^2 T^2 \cdot 0{,}05^2 m^2}{2 \cdot 8 \cdot 10^5 V/m \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg} = \underline{4{,}4\, mm}$$

Die Ablenkung wäre um 1,1 mm größer.

Aufgabe 9.171: Abi 2006

Ein Synchrotron ist ein Beschleuniger, in dem geladene Teilchen eine geschlossene Bahn durchlaufen, auf die sie mit Hilfe von Ablenkmagneten gezwungen werden. Näherungsweise besteht die Bahn aus vier Viertelkreisen mit Radius r und geraden Verbindungsstücken. Auf den vier Geraden werden die Teilchen durch sogenannte Resonatoren beschleunigt. Da die Energie der Teilchen ständig zunimmt, der Kreisradius r dagegen unverändert bleibt, müssen die Magnetfelder angepasst (synchronisiert) werden.



Ein Synchrotron kann erst ab einer bestimmten Teilchenenergie arbeiten; deshalb werden die Teilchen auf die nötige Geschwindigkeit vorbeschleunigt und erst dann in das Synchrotron injiziert.

a) 1992 wurde in Hamburg das Synchrotron Hera in Betrieb genommen. In das Synchrotron werden Protonen mit der Geschwindigkeit v = 0,99973 c injiziert. Berechnen Sie das Verhältnis der Masse des Protons zu seiner Ruhemasse im Moment der Injektion.

Das Synchrotron Hera hat einen Umfang von 6,30 km. Die Protonen werden mit einer Gesamtenergie von E1 = 40,0 GeV injiziert und erreichen eine maximale Gesamtenergie von E2 = 920 GeV. Pro Umlauf wird den Protonen in jedem der vier Resonatoren durchschnittlich die Energie ΔE = 7,80 keV zugeführt. (Energieverluste in Form von Synchrotronstrahlung sind hier schon berücksichtigt.)

b) Berechnen Sie, wie viele Umläufe des Protons von der Injektion bis zum Erreichen der maximalen Gesamtenergie nötig sind. (Kontrolle: n = 28,2 Mio)

c) Welchem Vielfachen des Erdumfangs entspricht die dabei von den Protonen zurückgelegte Strecke?

d) Schätzen Sie auf Grundlage der vorhandenen Informationen ab, wie lange der Vorgang von Teilaufgabe b) insgesamt dauert. (Kontrolle: t = 593 s)

Berücksichtigt man, dass sich die Protonen nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (v ≈ c), erhält man folgenden Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie E der Protonen und der Flussdichte B des Magnetfeldes, das die Protonen auf eine Kreisbahn zwingt:

$$E = r \cdot e \cdot c \cdot B$$

e) Leiten Sie ausgehend von einem Kraftansatz für die Kreisbewegung diese Gleichung her.

f) Berechnen Sie, zwischen welchen Werten die magnetische Flussdichte B synchronisiert werden muss, wenn der Radius r der Kreisbahn in den Magnetfeldern 800 m beträgt? (Kontrolle: B1 = 0,167 T ; B2 = 3,84 T)

☠ Die letzte Frage hat mit Induktion zu tun. Das kommt im Unterricht erst später. Ich hab die Frage trotzdem stehen lassen.

g) Im Synchrotron Hera erzeugen supraleitende Spulen mit einer Querschnittfläche von A = 1,80 m² das Magetfeld, das die Protonen ablenkt. Der Antstieg des Magnetfeldes induziert in jeder der Spulen eine Gegenspannung. Berechnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse den mittleren Wert dieser Gegenspannung für eine Spule mit 80 Windungen.

Lösung:

a) $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-0{,}99973^2}}=43\cdot m_0$ → $\underline{\underline{\frac{m}{m_0}=43}}$

b) In jedem der vier Resonatoren werden 7,80 keV zugeführt, das macht pro Umlauf eine Energiezufuhr von 4 · 7,80 keV = 31,2 keV.

$$n=\frac{E_2-E_1}{\Delta E}=\frac{920\cdot 10^9\,eV-40\cdot 10^9\,eV}{31{,}2\cdot 10^3\,eV}=\underline{\underline{28{,}2\cdot 10^6}}$$

c) $N=\frac{n\cdot U_{Syn}}{U_E}=\frac{2{,}82\cdot 10^7\cdot 6{,}3\,km}{2\cdot\pi\cdot 6378\,km}=\underline{4433}$

Das sind also 4433 Erdumfänge.

d) Die Protonen bewegen sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit.

$$v=\frac{s}{t} \rightarrow t=\frac{s}{v}=\frac{2{,}82\cdot 10^7\cdot 6{,}3\cdot 10^3\,m}{3{,}0\cdot 10^8\,m/s}=\underline{592\,s}$$

e) $F_L=F_z$ → $e\cdot v\cdot B=m\cdot\frac{v^2}{r}=\frac{m\cdot v^2}{r}$

Für jedes v können wir c einsetzen, das gibt dann:

$$e\cdot v\cdot B=\frac{m\cdot v^2}{r} \rightarrow e\cdot c\cdot B\overset{¿}{=}\frac{m\cdot c^2}{r}=\frac{E}{r} \rightarrow \underline{E=r\cdot e\cdot c\cdot B}$$

f) $B=\frac{E}{r\cdot e\cdot c}$; $B_1=\frac{40\cdot 10^9\,eV}{800\,m\cdot e\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}=\underline{0{,}167\,T}$; $B_1=\frac{920\cdot 10^9\,eV}{800\,m\cdot e\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}=\underline{3{,}83\,T}$

g) $U_i=-N\cdot\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-N\cdot A\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t}=-80\cdot 1{,}8\,m^2\cdot\frac{3{,}84\,T-0{,}167\,T}{593\,s}=\underline{\underline{-0{,}89\,V}}$

Die induzierte Gegenspannung beträgt also 0,89 V.

Aufgabe 9.172: G8 Abi 2011; Ionentherapie

In der Medizin werden bei der Krebstherapie hochenergetische Ionen verendet. Dazu werden vorbeschleunigte Kohlenstoffionen ($m_0=1{,}99\cdot 10^{-26}\,kg$) in einem ringförmigen Beschleuniger (Synchrotron) so weit beschleunigt, dass sie die für die jeweilige Therapie erforderliche Energie besitzen. Um das Synchrotron durchlaufen zu können muss der Ionenstrahl durch Magnete umgelenkt werden.

a) Erklären Sie unter Zuhilfenahme einer Skizze, warum Ionen in einem homogenen Magnetfeld bei geeigneter Feldrichtung einen Kreisbogen durchlaufen.

Für eine ganz bestimmte Therapie sollen Kohlenstoffionen mit einer Geschwindigkeit von v = 0,73 c eingesetzt werden.

b) Berechnen Sie die relativistische masse m und die kinetische Energie (in GeV) eines solchen Kohlenstoffions. (Kontrolle: $m = 2{,}9 \cdot 10^{-26}\,kg$)

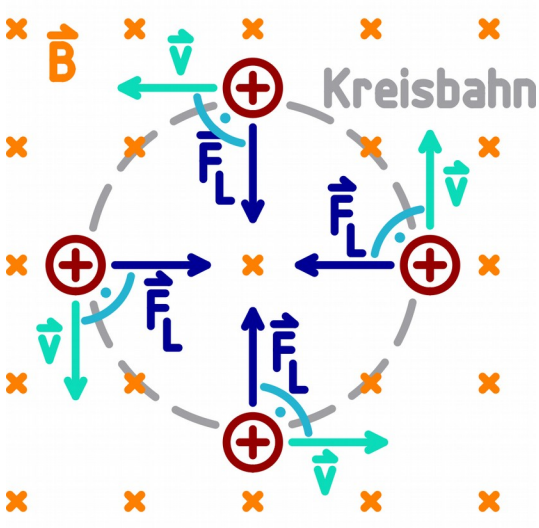
Um die angegebene hohe Endgeschwindigkeit zu erreichen, durchlaufen die zunächst noch unvollständig ionisierten Kohlenstoffionen beim Eintritt in das Synchrotron eine so genannte Stripperfolie, in der die restliche Elektronenhülle vollständig abgestreift wird.

c) Die nun vollständig ionisierten Kohlenstoffionen sollen mit v = 0,73 c einen Kreisbogen mit dem Radius r = 4,4 m durchlaufen. Berechnen Sie die dazu erforderliche magnetische Flussdichte B.

d) Erläutern Sie, warum sich die Verwendung der Stripperfolie günstig in Bezug auf Platzbedarf und Kosten beim Bau es Synchrotrons auswirkt.

<u>Lösung:</u>

a) Die Lorentzkraft auf das sich bewegende Ion ist zu jedem Zeitpunkt senkrecht zur Geschwindigkeit. Deshalb bleibt die Geschwindigkeit im homogenen Magnetfeld betragsmäßig konstant. Die Lorentzkraft bleibt dann auch betragsmäßig konstant, und wenn die anfängliche Bewegungsrichtung senkrecht zu den magnetischen Feldlinien verläuft entsteht eine Kreisbahn oder der Ausschnitt einer Kreisbahn -> ein Kreisbogen.



b) $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}73^2}} = \underline{1{,}463}$$

$$m = \gamma \cdot m_0 = 1{,}463 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{-26}\,kg = \underline{2{,}91 \cdot 10^{-26}\,kg}$$

$$E = \gamma \cdot E_0 \;\rightarrow\; E_{kin} = E - E_0 = \gamma \cdot E_0 - E_0 = (\gamma - 1) \cdot E_0$$

$$E_{kin} = 0{,}463 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{-26}\,kg \cdot (3 \cdot 10^8\,m/s)^2 = 8{,}29 \cdot 10^{-10}\,J = \underline{5{,}18\,GeV}$$

c)
$$F_Z = F_L \rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} = q \cdot v \cdot B$$
$$B = \frac{m \cdot v}{q \cdot r} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-26}\,kg \cdot 0{,}73 \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s}{6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C \cdot 4{,}4\,m} = \underline{1{,}5\,T}$$

d) Wegen $r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$ ist der Radius der Kreisbahn umso kleiner, je größer die Ladung der Ionen ist. Bei größerer Ladung ist deshalb ein kleineres und deshalb billigeres Synchrotron möglich.

Außerdem bräuchte man wegen $B = \frac{m \cdot v}{q \cdot r}$ bei kleinerer Ladung stärkere Magnetfelder, die ebenfalls kostenintensiv sind.

<u>Aufgabe 9.173: G8 Abi 2011; Teilchenbeschleuniger</u>

a) Erklären Sie Aufbau und Funktionsweise eines Zyklotrons anhand einer beschrifteten Skizze.

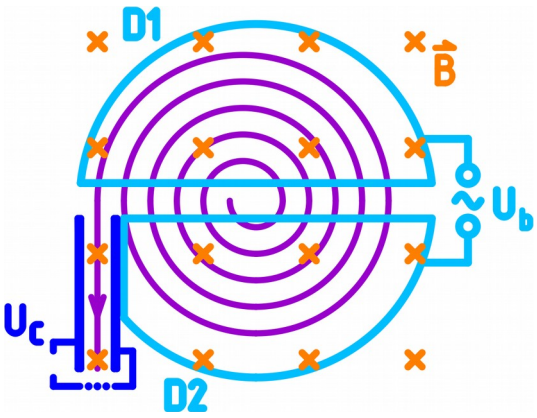
b) Die magnetische Flussdichte in einem Zyklotron beträgt 0,78 T. Berechnen Sie den maximalen Durchmesser der Bahn von Protonen, die in diesem Zyklotron auf 10% der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden.

c) Erklären Sie, warum ein klassisches Zyklotron für die Beschleunigung der Teilchen auf größere Geschwindigkeiten als 0,10c nicht geeignet ist.

d) In einem anderen Beschleunigertyp können Protonen hingegen auf eine kinetische Energie von 4,4 GeV beschleunigt werden. Bestimmen Sie die relativistische Masse dieser Protonen (in Vielfachen ihrer Ruhemasse) sowie ihre Geschwindigkeit.

<u>Lösung:</u>

a) Die zwei Duanten D1 und D2 sind nichtleitend miteinander verklebt und bilden einen evakuierten Zylinderförmigen Körper. An den Duanten liegt eine hochfrequente Wechselspannung Ub an. Das ganze wird von einem Magnetfeld B durchsetzt.



Das Magnetfeld zwingt die in der Mitte freigesetzten Ionen auf eine Kreis- bzw. Spiralbahn und die Wechselspannung Ub beschleunigt die Ionen bei jedem Halbdurchlauf, so das der Radius der Kreisbahn immer größer wird.

Sind die Ionen am Rand der Duanten angekommen werden sie durch einen Kondensator, in dem die elektrische Kraft der Lorentzkraft entgegenwirkt, auf eine geradlinige Bahn gebracht und so dem Zyklotron zum experimentieren entnommen.

b) $m\cdot\frac{v^2}{r}=q\cdot v\cdot B$ → $r=\frac{m\cdot v}{q\cdot B}=\frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 0{,}1\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 0{,}78\,T}=\underline{0{,}40\,m}\Rightarrow\underline{\underline{d=0{,}80\,m}}$

c) Im Zyklotron wird die Beschleunigungsspannung mit konstanter Frequenz betrieben. Damit das funktioniert, muss die Umlaufdauer der Teilchen auf der Spiralbahn konstant sein. Die Umlaufdauer der Ionen (oder Protonen) und damit ihre Umlauffrequenz ist aber nur solange konstant, solange die Masse der Teilchen konstant ist. Bei Geschwindigkeiten oberhalb von 0,1c nimmt die Masse der Teilchen allerdings zu, deshalb ändert sich ihre Umlaufdauer auf der Spiralbahn und das Zyklotron funktioniert nicht mehr.

d)
$$E=E_0+E_{kin}=0{,}94\,GeV+4{,}4\,GeV=\underline{5{,}34\,GeV}$$
$$E=m\cdot c^2 \rightarrow m=\frac{E}{c^2}=\frac{5{,}34\cdot 10^{9}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}{(3\cdot 10^{8}\,m/s)^2}=\underline{\underline{9{,}49\cdot 10^{-27}\,kg=5{,}68\cdot m_0}}$$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow 1-(v/c)^2=\left(\frac{m_0}{m}\right)^2 \rightarrow v/c=\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5{,}68}\right)^2}=\underline{0{,}984}$$
$$\underline{\underline{v=0{,}984\,c=2{,}95\cdot 10^{8}\,m/s}}$$

Aufgabe 9.174: Abi 2012; Protonen und Pionen in der Medizin

In darauf spezialisierten Instituten werden Tumore mit geladenen Teilchen, sogenannten Pionen, bestrahlt. Zu deren Erzeugung benötigt man Protonen hoher Energie. Ruhende Protonen werden daher zunächst beschleunigt und anschließend in einen Speicherring eingeleitet.

Gehen Sie im Weiteren vereinfachend davon aus, dass die im Speicherring gesammelten Protonen mit der Geschwindigkeit v = 0,79 c durch den Einsatz geeigneter Ablenkmagnete auf einer Kreisbahn mit Radius r = 8,8 m gehalten werden.

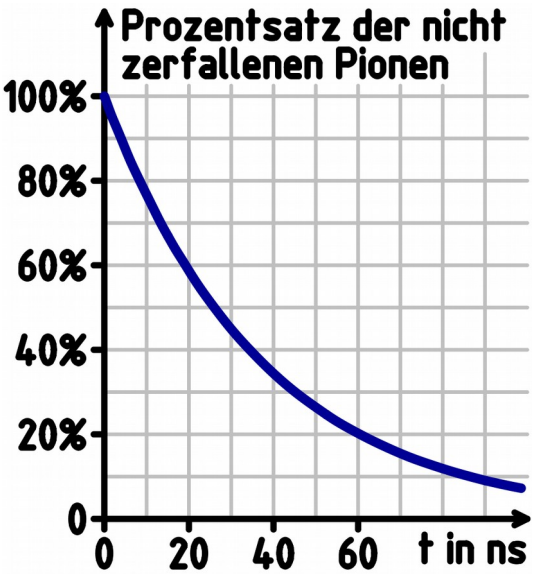
a) Zeichnen Sie einen Ausschnitt der Protonen-Kreisbahn mit Kennzeichnung der magnetischen Feldlinienrichtung. Tragen Sie außerdem in einem Punkt der Kreisbahn für ein Proton die Richtung des Geschwindigkeitsvektors sowie die der Lorentzkraft ein.

b) Berechnen Sie die Umlaufdauer eines Protons im Speicherring und die Anzahl seiner Umläufe innerhalb einer Sekunde.

c) Zeigen Sie, dass ein solches Proton die Masse 1,6·mo (mo: Ruhemasse des Protons) und eine kinetische Energie von mehr als 0,5 GeV besitzt.

d) Berechnen Sie den Betrag der magnetischen Flussdichte im Speicherring.

Mittels der Protonen aus dem Speicherring werden Pionen erzeugt, die allerdings sehr rasch zerfallen. Im Weiteren werden Pionen betrachtet, die sich näherungsweise mit Lichtgeschwindigkeit durch eine 8,0 m langen Kanal auf den Patienten zubewegen.

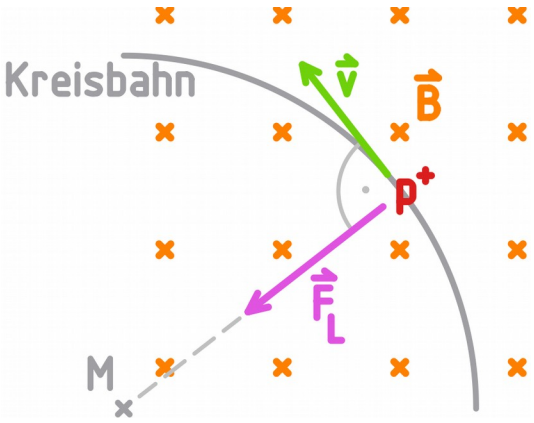


e) Ermitteln Sie mit Hilfe des nebenstehenden Zerfallsdiagramms, wie viel Prozent der ursprünglichen Pionen man bei Vernachlässigung relativistischer Effekte am Ende des Kanals erwarten würde.

f) Erklären Sie, warum in Wirklichkeit viel mehr Pionen am Ende des Kanals ankommen, als der in Teilaufgabe 1.e) ermittelte Prozentsatz angibt.

Lösung:

a) Geschwindigkeit tangential an die Kreisbahn (senkrecht zum Radius); Lorentzkraft in Richtung des Mittelpunkts der Kreisbahn



b) $v=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$ → $T=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{v}=\frac{2\cdot\pi\cdot 8{,}8\,m}{0{,}79\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}$

$\underline{\underline{T=0{,}233\,\mu s}}$

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0{,}233\cdot 10^{-6}\,s}=\underline{\underline{4{,}29\,MHz}}$$

Das sind also 4,29 Mio Umläufe pro Sekunde.

c) $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-0{,}79^2}}=\underline{\underline{1{,}63\cdot m_0}}$

$\Rightarrow\ E=1{,}63\cdot E_0$ → $E_{kin}=0{,}63\cdot E_0=0{,}63\cdot 0{,}938\,GeV=\underline{\underline{0{,}59\,GeV}}$

Das sind mehr als 0,5GeV.

d)
$$F_z = F_L \;\rightarrow\; m\cdot\frac{v^2}{r} = q\cdot v\cdot B$$
$$B = \frac{m\cdot v}{q\cdot r} = \frac{1.63\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 0{,}79\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 8{,}8\,m} = \underline{0{,}458\,T}$$

e)
$$v = \frac{s}{t} \;\rightarrow\; t = \frac{s}{v} = \frac{8{,}0\,m}{3\cdot 10^{8}\,m/s} = \underline{26{,}7\,ns}$$

Das Diagramm liefert ca. 50% ankommende Pionen.

f) Wegen Zeitdillatation ist die im Ruhesystem der Pionen vergangene Zeit um den Faktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ kürzer als die im Laborsystem gemessene Zeit, und wegen $v \approx c$ ist dieser Faktor nahe bei Null. Es vergeht also im Ruhesystem der Pionen eine viel kürzere Zeit und deshalb kommen viel mehr Pionen an.

<u>Aufgabe 9.175: Abi 2013; Solare und kosmische Protonen</u>

Von der Sonne geht ein Teilchenstrom aus, der unter anderem Protonen enthält. Gehen Sie für diese solaren Protonen von einer Geschwindigkeit von 400 km/s aus. Aus tieferen Regionen des Alls erreichen uns noch wesentlich energiereichere kosmische Protonen, für deren Geschwindigkeit im folgenden 99% der Lichtgeschwindigkeit angenommen wird.

a) Berechnen Sie jeweils die Beschleunigungsspannung, die in einem Laborexperiment erforderlich wäre, um ein zunächst ruhendes Proton auf die Geschwindigkeit eines solaren bzw. kosmischen Protons zu beschleunigen.

b) Ein kosmisches Proton durchquert den äußeren Bereich des Sonnensystems und wird im dort herrschenden Magnetfeld der Flussdichte 0,30 nT abgelenkt. Berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass die Ablenkung auf einer Kreisbahn erfolgt, den Bahnradius der Flugbahn.

<u>Lösung:</u>

a) Solar -> nichtrelativistisch:

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = e\cdot U \;\rightarrow\; U = \frac{m\cdot v^2}{2\cdot e} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg\cdot\left(4\cdot 10^{5}\,m/s\right)^2}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C} = \underline{\underline{835\,V}}$$

Kosmisch -> relativistisch:

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{938\,MeV}{\sqrt{1-0{,}99^2}} = \underline{6649\,MeV}$$

$$E_{kin} = E - E_0 = 6649\,MeV - 938\,MeV = \underline{5711\,MeV = 5{,}7\,GeV} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{U_B = 5{,}7\,GV}}$$

b) $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg}{\sqrt{1-0{,}99^2}} = \underline{1{,}18\cdot 10^{-26}\,kg}$$

$$m\cdot\frac{v^2}{r} = e\cdot v\cdot B \;\rightarrow\; r = \frac{m\cdot v}{e\cdot B} = \frac{1{,}18\cdot 10^{-26}\,kg\cdot 0{,}99\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 0{,}30\cdot 10^{-9}\,T} = \underline{73\cdot 10^9\,m = 73\,Mio.\,km}$$

10 Induktion

Von Induktion spricht man, wenn durch die Vermittlung eines Magnetfeldes in einer Leiterschleife eine Spannung und eventuell (bei geschlossenem Stromkreis) ein Strom erzeugt (induziert) wird.

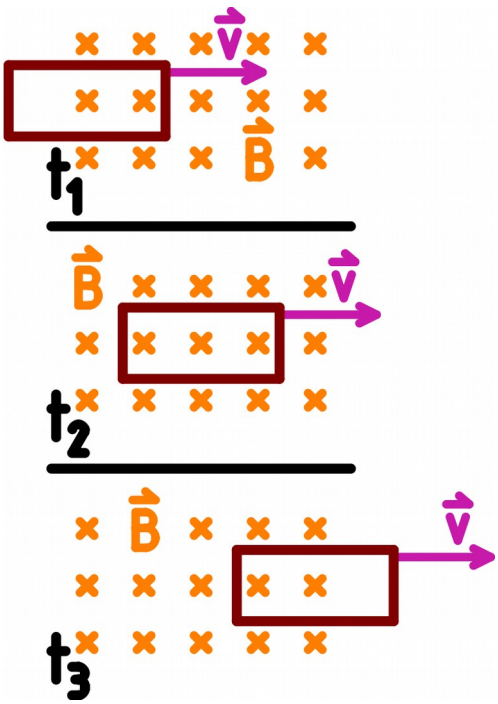
Da das Vorhandensein einer Spannung nur durch die Anwesenheit eines elektrischen Feldes zustande kommen kann ($U_{AB}=\Delta\varphi_{AB}=E\cdot s_{AB}$) könnte man allgemeiner Formulieren: Induktion ist das erzeugen eines Ringförmigen E-Feldes durch ein Magnetfeld.

10.1 Induktion, qualitativ

Im Folgenden betrachten wir zuerst bewegte Leiterschleifen aus Metall. In den Leiterstücken befinden sich frei bewegliche Elektronen und Atomrümpfe. Auf beide wirkt im Magnetfeld eine Lorentzkraft. Da die Atomrümpfe sich aber nicht von der Stelle bewegen können interessieren uns für die Reaktion auf mikroskopischer Ebene nur die freien Elektronen.

<u>Aufgabe 10.176: Leiterschleife bewegt sich durch B-Feld</u>

a) Finde die Richtung der Lorentzkraft auf die Leitungselektronen und zeichne, falls vorhanden, die Richtung des induzierten Stroms in der Leiterschleife ein.



b) Wenn ein Strom induziert wird, dann hat man einen stromdurchflossenen Leiter, auf den im Magnetfeld eine Kraft wirkt. Zeichne jeweils die wirkende Kraft auf die betroffenen Leiterstücke ein.

<u>Am ersten Beispiel lernen wir zwei Dinge:</u>

1) Es wird nur dann ein Strom induziert, wenn die Anzahl der magnetischen Feldlinien (der magnetische Fluss) durch die Leiterschleife sich gerade verändert.

2) Der induzierte Strom ist so gerichtet, dass er die Bewegung der Leiterschleife abbremst, also der Ursache für die Induktion entgegenwirkt.

Induktionsgesetz, qualitativ:

1) Wenn der magnetische Fluss durch eine Leiterschleife sich verändert, dann wird in der Leiterschleife eine Spannung induziert (und eventuell ein Strom).

2) Der induzierte Strom ist stets so gerichtet, dass er der Induktionsursache entgegenwirkt (Regel von Lenz, Energieerhaltung).

Die Regel von Lenz lässt sich auch anders formulieren:

Eine Leiterschleife versucht stets die Anzahl der magnetischen Feldlinien, die durch sie hindurch fließen (den magnetischen Fluss), konstant zu halten.

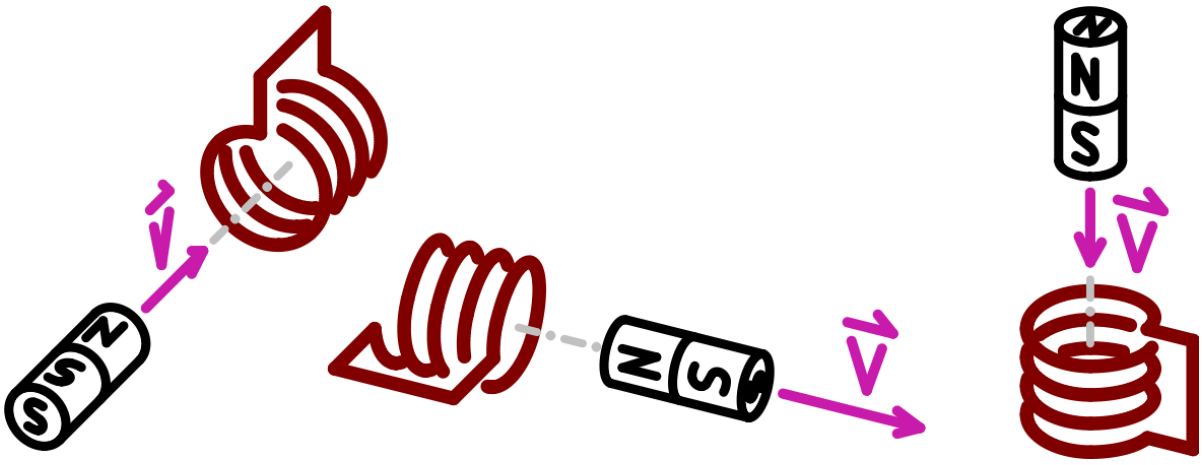
- ➔ Wenn also der magnetische Fluss durch die Leiterschleife stärker wird, erzeugt der induzierte Strom ein Magnetfeld, das dem externen Magnetfeld entgegenwirkt.
- ➔ Wenn die Anzahl der magnetischen Feldlinien, die durch die Leiterschleife fließen, kleiner wird, dann erzeugt der induzierte Strom ein Magnetfeld, das in die Richtung des externen Magnetfeldes zeigt.

Aufgabe 10.177: Bewegung

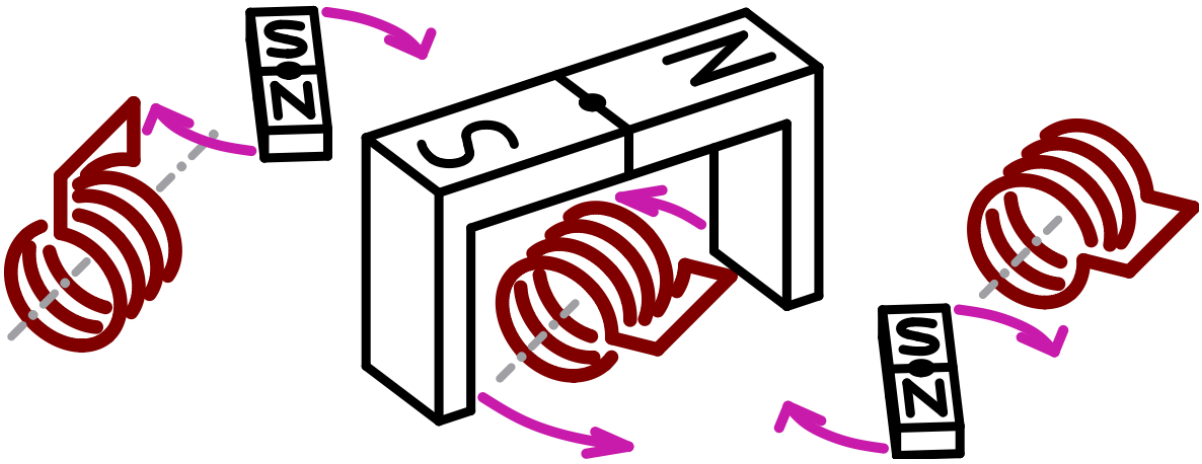
Zeichne jeweils an einer Stelle den induzierten Strom ein, falls es einen gibt. Benutze die Regel von Lenz zum Überlegen.

Zur Orientierung ist entweder die Spulen- bzw. Leiterschleifenachse oder eine Orientierungsebene eingezeichnet. Achte bei den Spulen auf die Richtung der Wicklungen. Es sind je drei bis vier getrennte Beispiele, die nichts miteinander zu tun haben.

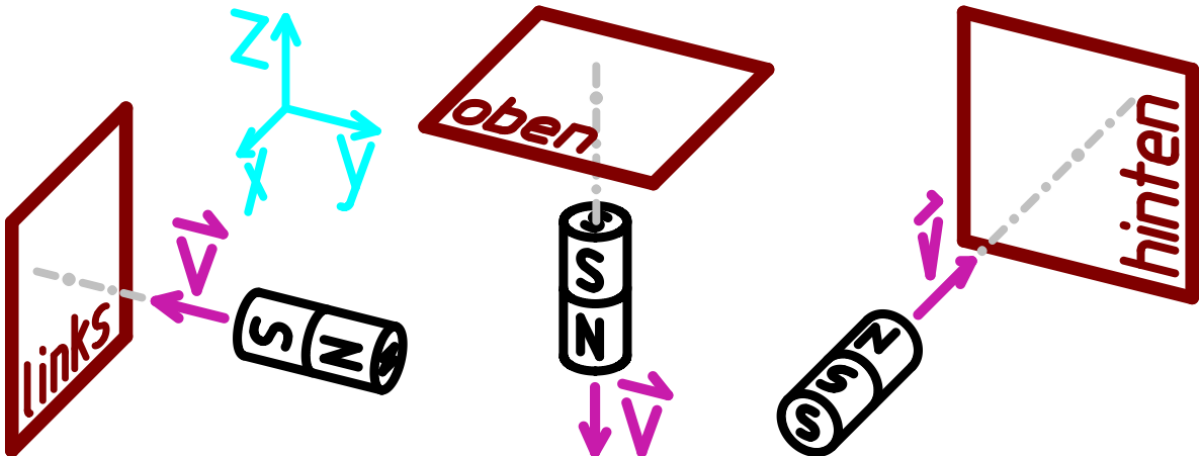
a)



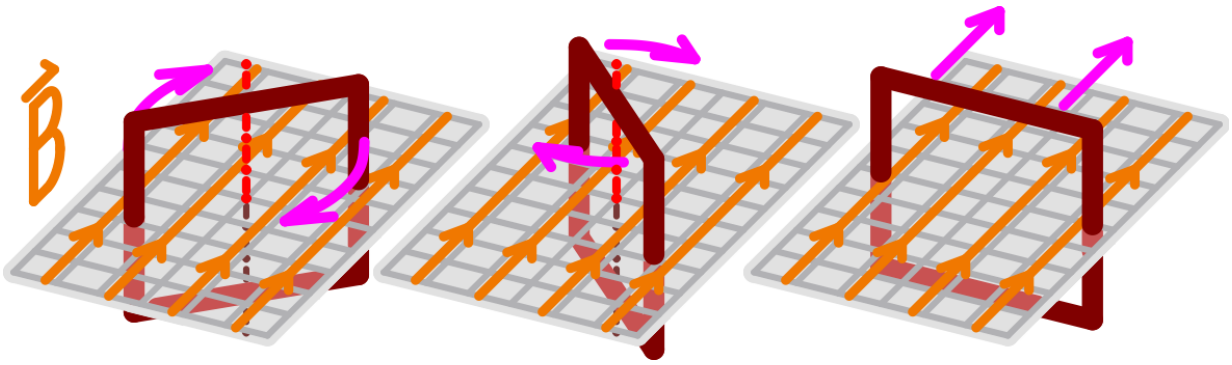
b) Die Spulen stehen still, die Magnete drehen sich in die eingezeichnete Richtung.



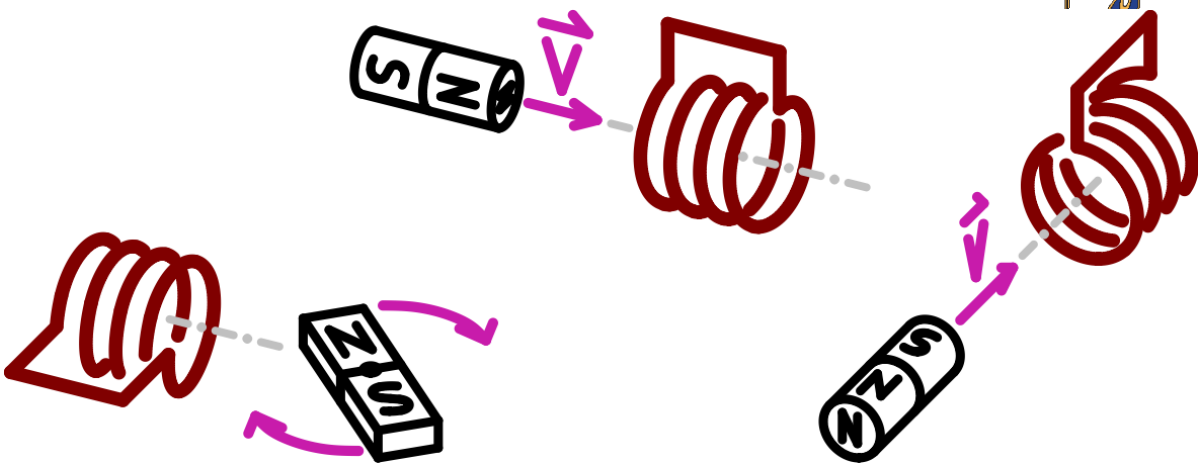
c) Die quadratischen Leiterschleifen stehen still. Die Magnete bewegen sich.



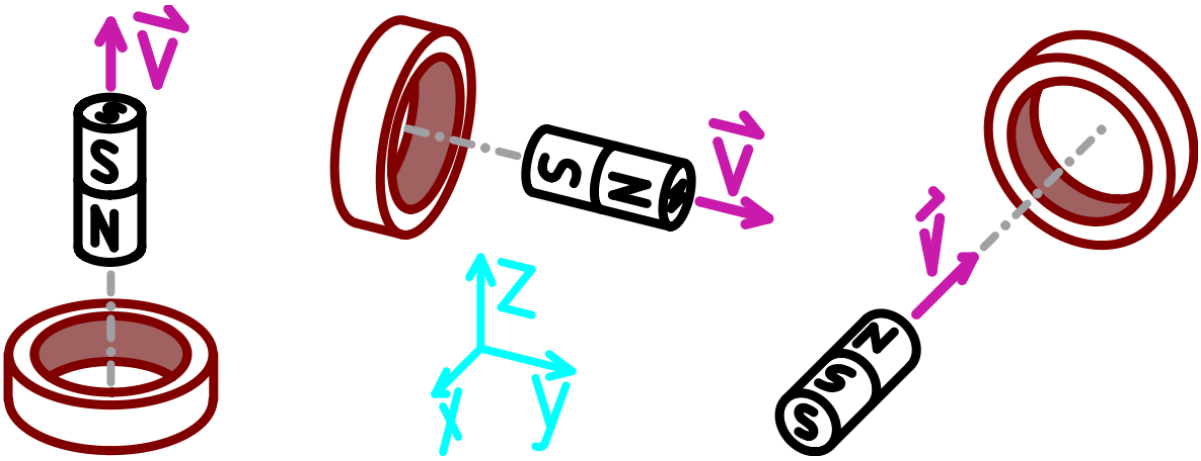
d) Leiterschleife im homogenen Magnetfeld, zweimal dreht sie sich um die eingezeichnete Rotationsachse, einmal bewegt sie sich parallel zu den Feldlinien.



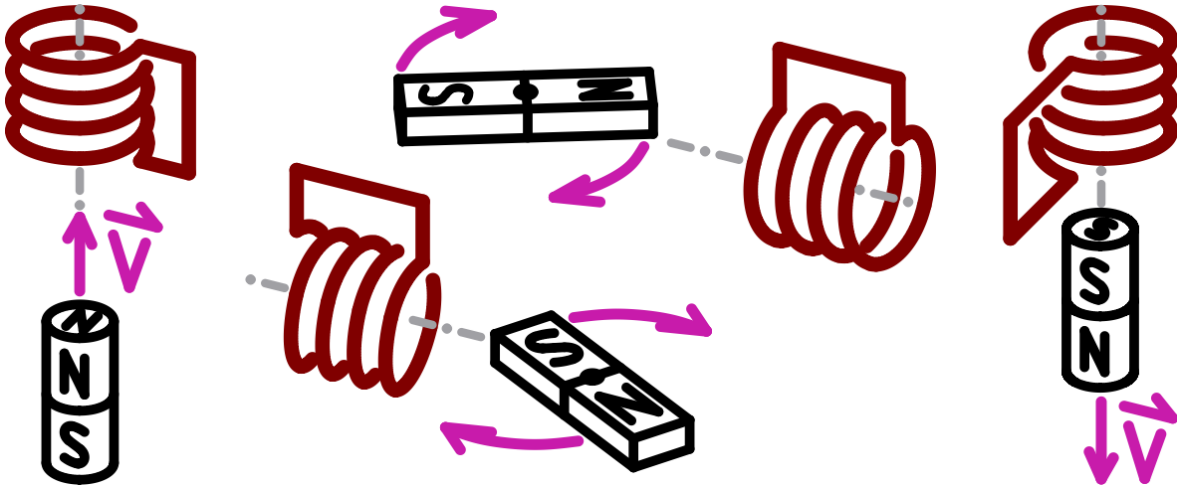
e) Nur die Magnete bewegen sich, die Spulen stehen still..



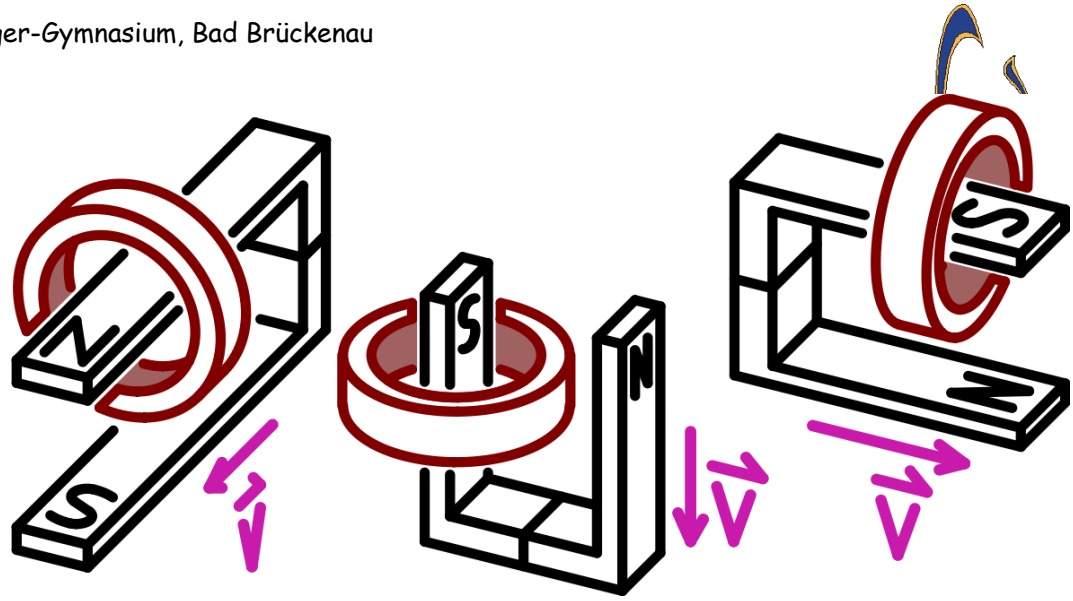
f) Die Ringe liegen still. Bewegt werden nur die Magnete.



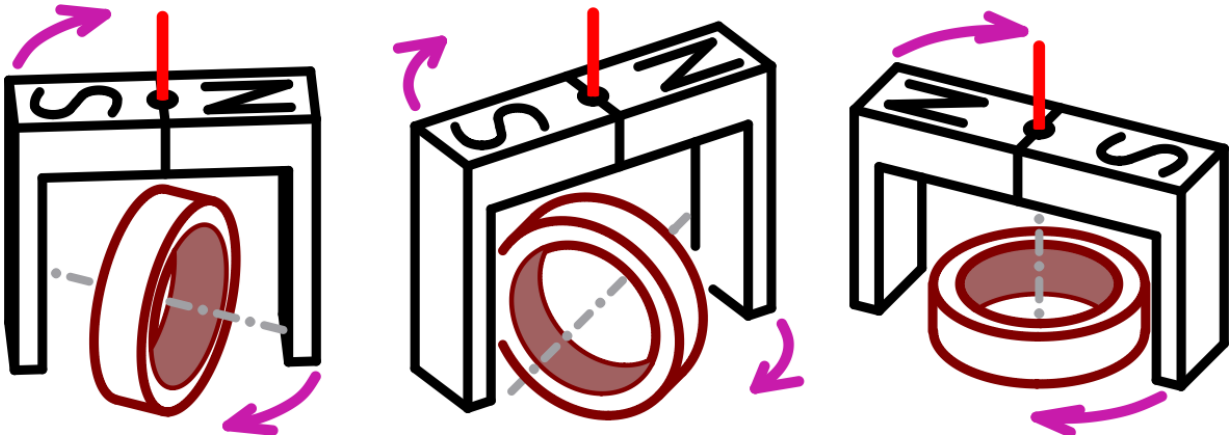
g) Zwei Magnete drehen sich, zwei bewegen sich geradlinig. Die Spulen stehen still.



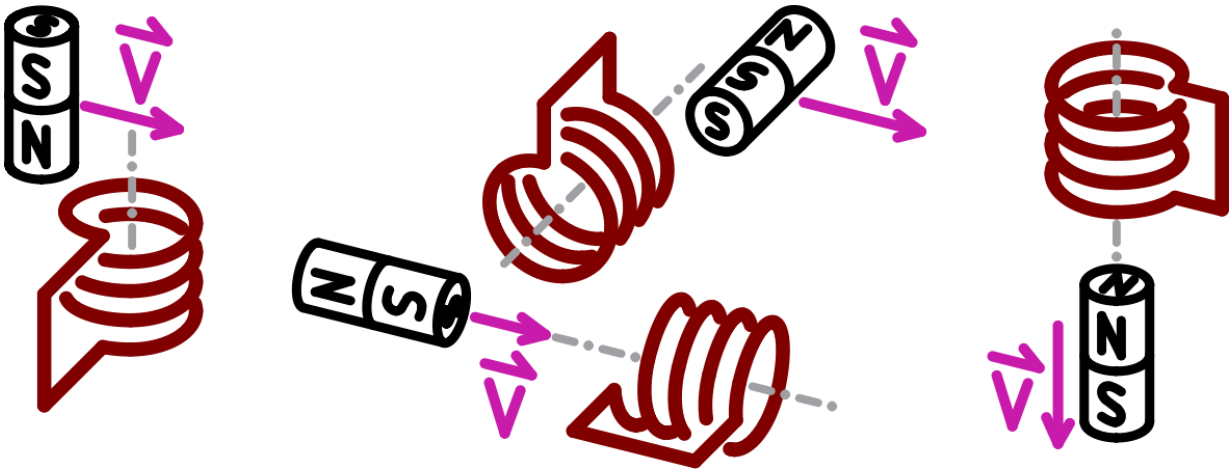
h) Ein Arm eines Hufeisenmagneten wird in einen Ring hinein geschoben oder herausgezogen. Die Ringe sind alle nicht unterbrochen.



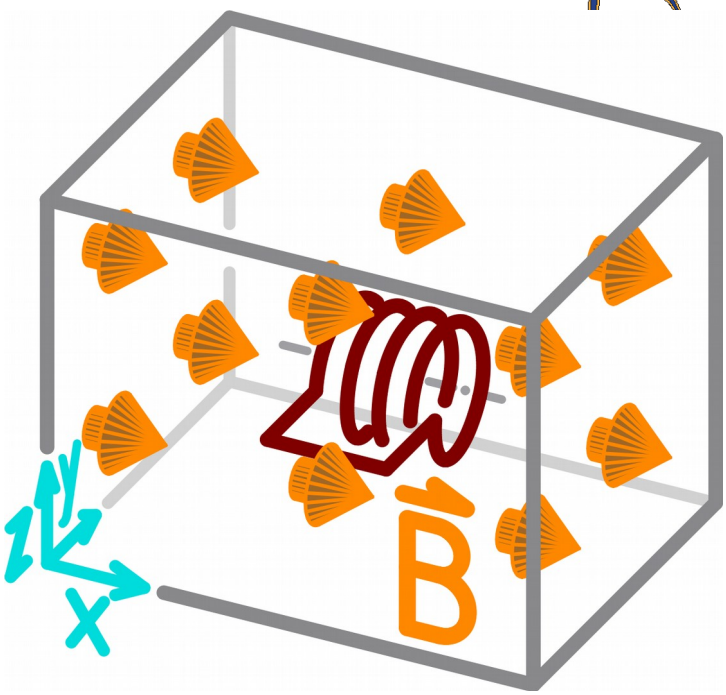
i) Die Magnete drehen sich um die eingezeichneten Rotationsachsen.



k) Nur die Magnete bewegen sich. Die Spulen stehen still.



Aufgabe 10.178:



Eine Spule befindet sich in einem räumlich begrenzten, homogenen Magnetfeld. Magnetfeld und Spulenachse sind parallel zur x-Achse. Zum Zeitpunkt t = 0 wird die Spule in Bewegung gesetzt. Wir interessieren uns für den Zeitraum kurz nach t = 0. Die beiden Enden der Spule sind durch ein gerades Leiterstück verbunden, so dass Strom durch die Spule fließen kann. Gibt es einen induzierten Strom, und wenn ja in welche Richtung fließt er in der geraden Verbindung der beiden Spulenenden, wenn die Spule ...

a) ... innerhalb des B-Feldes in x-Richtung hin und her geschoben wird?

b) ... von oben gesehen im Uhrzeigersinn gedreht wird?

c) ... innerhalb des B-Feldes in z-Richtung rauf und runter geschoben wird?

d) ... nach rechts (in positive x-Richtung) aus dem Magnetfeld herausgezogen wird?

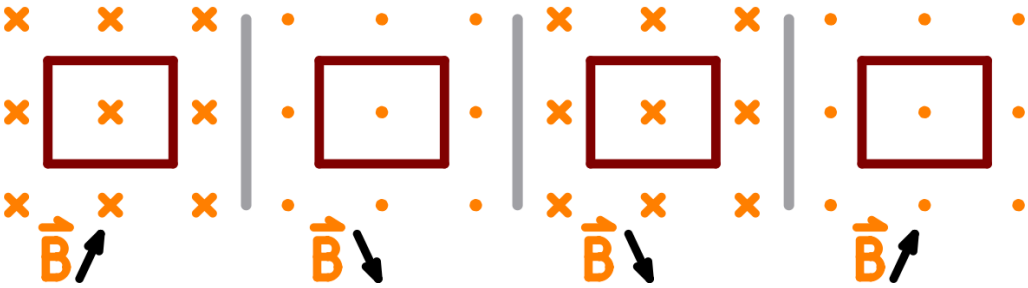
e) ... nach unten (in negative z-Richtung) aus dem Magnetfeld herausgezogen wird?

f) ... von vorne gesehen (von einer negativen y-Koordinate aus) gegen den Uhrzeigersinn gedreht wird?

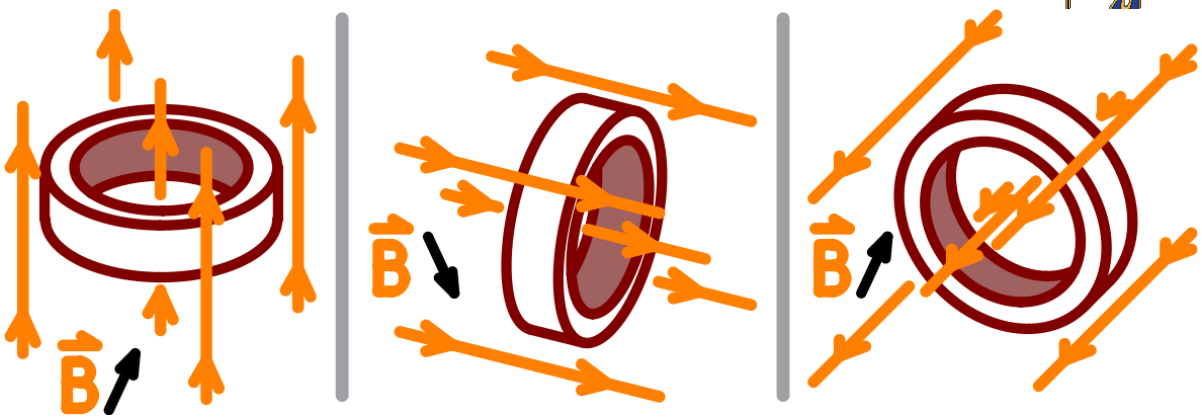
Aufgabe 10.179: Ruhende Leiterschleifen, bzw. Spulen

$\vec{B}\nearrow$ bedeutet, dass das externe Magnetfeld gerade stärker wird. $\vec{B}\searrow$ bedeutet, dass das externe Magnetfeld gerade schwächer wird.

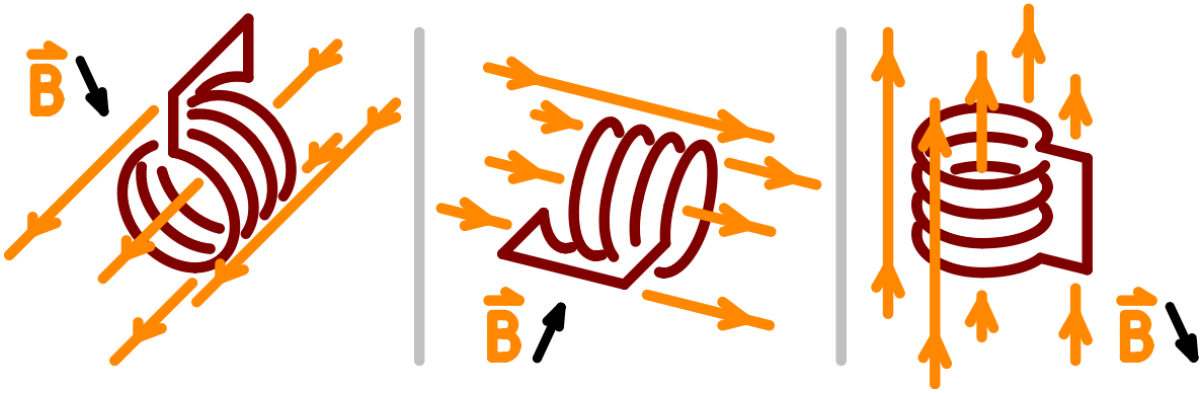
a) Zeichne die Richtung des in der Leiterschleife induzierten Stroms ein.



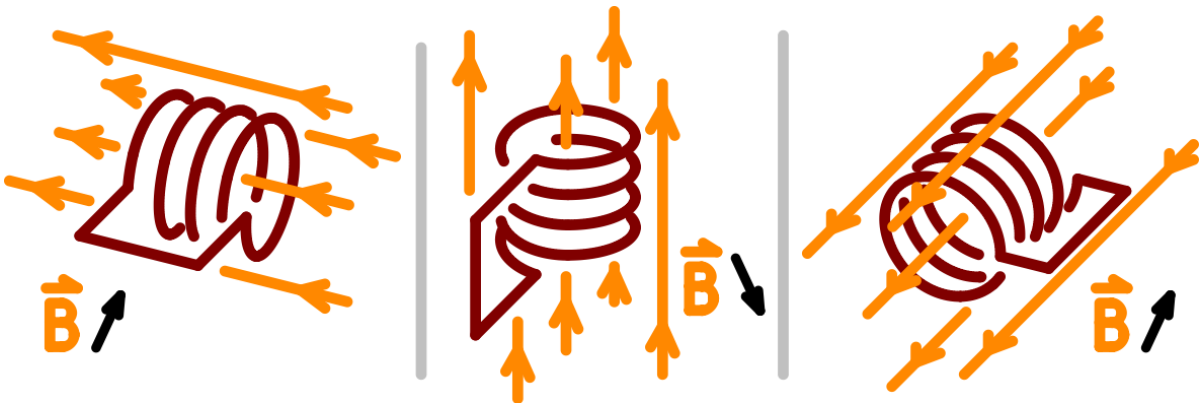
b) Zeichne jeweils die Richtung des im Ring induzierten Stroms ein.



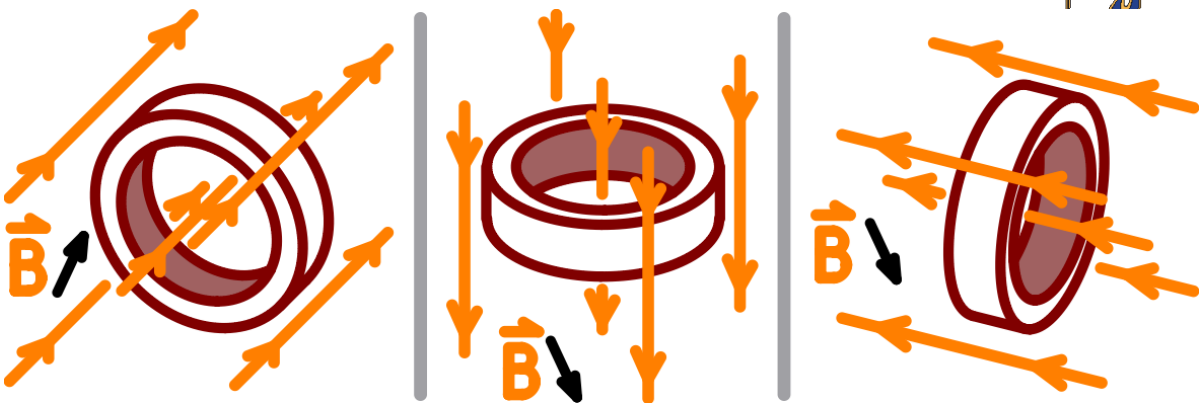
c) Die Spulenenden sind durch ein gerades Leiterstück leitend verbunden. Zeichne die Richtung des induzierten Stroms in diesem Leiterstück ein.



d) Nochmal.

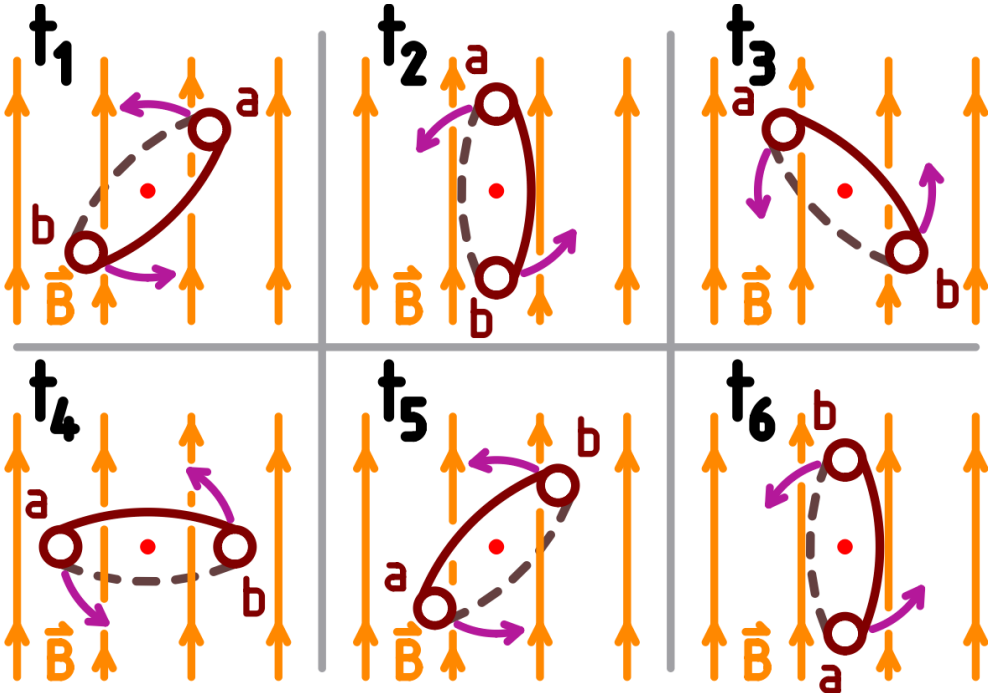


e) Und nochmal Ringe.



Aufgabe 10.180:

Eine rechteckige Leiterschleife dreht sich in einem Magnetfeld. Die Ursache für die Drehung ist der Anton, der an einer Kurbel dreht. Die Drehung der Leiterschleife wird aber jetzt zur Ursache für eine Induktion.

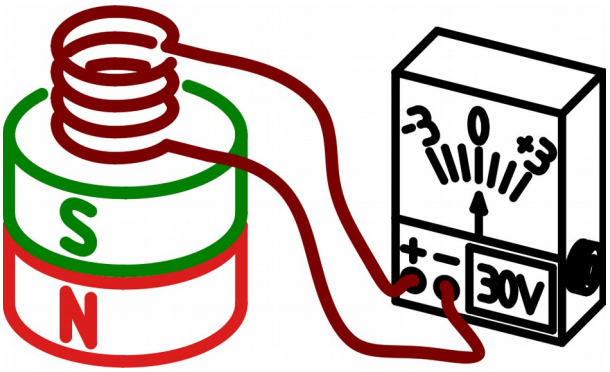


Das Bild zeigt die Querschnitte der Leiterstücke a und b, die senkrecht zum Magnetfeld stehen. Die gestrichelte Verbindung ragt in die Zeichenebene hinein, die durchgezogene ragt aus der Zeichenebene heraus.

a) Zeichne für alle Zeitpunkte jeweils die Richtung des in der Leiterschleife induzierten Stroms ein. Zu welchem Zeitpunkt ändert der induzierte Strom seine Richtung?

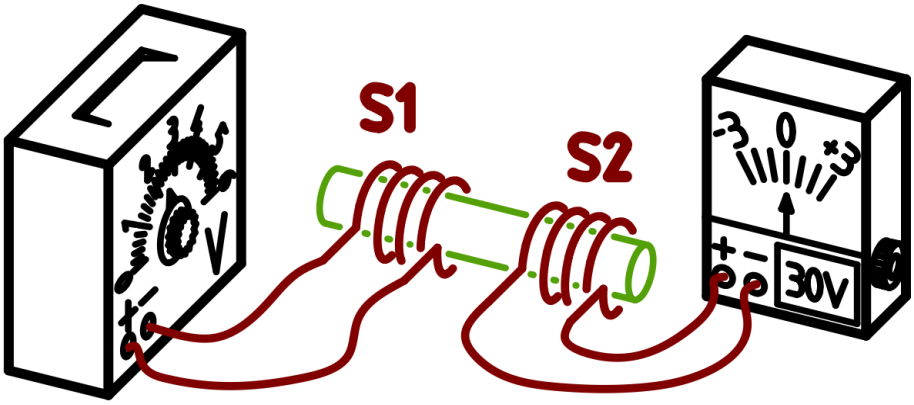
b) Wenn in der Leiterschleife ein Strom induziert wird, dann wird dieser Strom zur Ursache von . Einzeichnen!

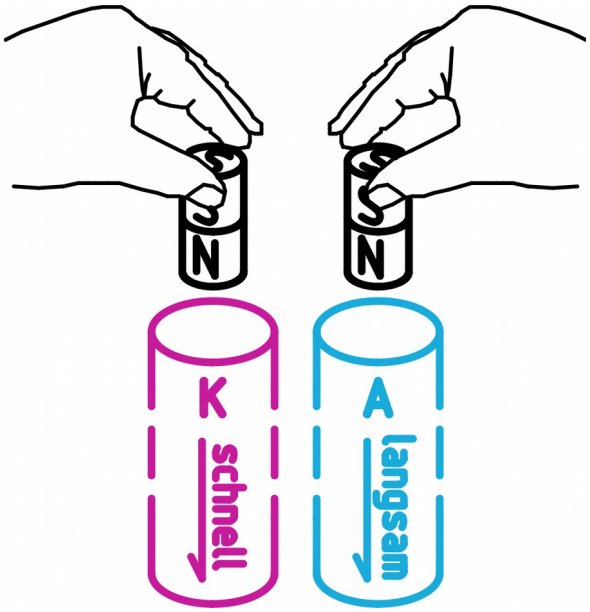
Aufgabe 10.181: Beschreiben, Erklären



a) Eine leere Spule liegt auf einem Magneten. Gib mindestens drei verschiedene Handlungsalternativen an, die dazu führen, dass in der Spule eine Spannung induziert wird, darunter eine, bei der weder zusätzliche Magnete oder Spulen benötigt werden und bei der keiner der gezeigten Gegenstände angefasst wird.

b) Zwei Spulen stecken auf einem Eisenkern. Spule S1 ist an eine aufgedrehte Spannungsquelle angeschlossen. Gib vier verschiedene Handlungsalternativen an, welche dazu führen, dass in der Spule S2 eine Spannung induziert wird.





c) Ein sehr starker Magnet wird durch ein Rohr fallen gelassen. Einmal durch ein Kunststoffrohr K und einmal durch ein Aluminiumrohr A. Durch das Kunststoffrohr fällt der Magnet ganz normal, so als ob gar kein Rohr da wäre. Durch das Aluminiumrohr jedoch fällt der Magnet nur sehr langsam.

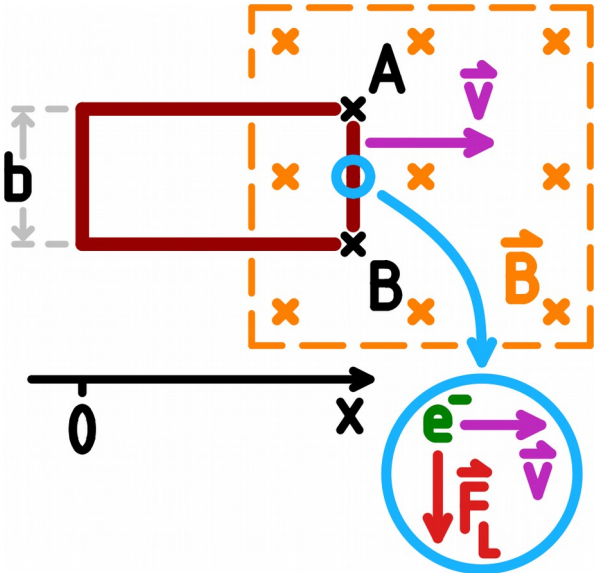
Erkläre das langsame Fallen des Magneten durch das Aluminiumrohr.

10.2 Größe der induzierten Spannung

Wir werden die Größe der induzierten Spannung aus den bekannten physikalischen Gesetzen rechnerisch gewinnen. Hierzu betrachten wir eine rechteckige Leiterschleife der Breite b, die senkrecht zu den Feldlinien mit der Geschwindigkeit v in ein Magnetfeld der Flussdichte B eindringt.

Plan:

Der induzierte Strom, also die Spannung wird zwischen den Punkten A und B erzeugt. Wir berechnen die Lorentzkraft auf ein Elektron, teilen durch die Ladung und erhalten die elektrische Feldstärke mit der wir anschließend die Spannung rauskriegen.



$$F_L = q \cdot v \cdot B$$
$$F = q \cdot E$$
$$\Rightarrow q \cdot v \cdot B = q \cdot E \quad / : q$$
$$E = v \cdot B$$

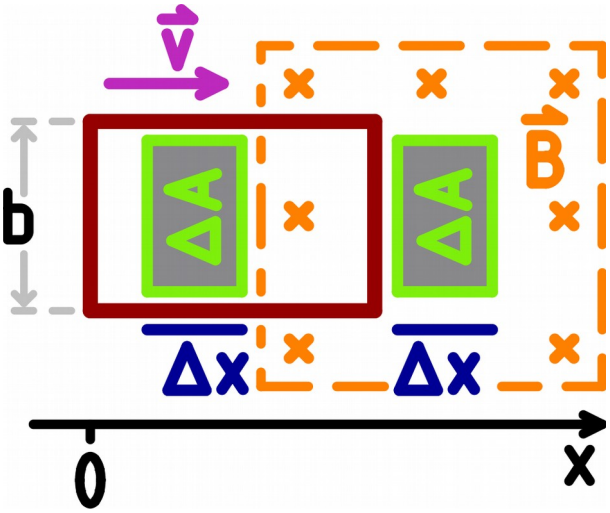
und wegen $U_{AB} = E \cdot s_{AB}$

folgt $\underline{\underline{U_{AB} = E \cdot s_{AB} = v \cdot B \cdot b}}$

$$\boxed{U_{ind} = B \cdot b \cdot v \quad \leftarrow \quad \text{manchmal ganz nützlich}}$$

Ist aber nicht die Formel die wir brauchen. Wir setzen noch die Geschwindigkeit ein.

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad U_{AB} = B \cdot b \cdot v = B \cdot b \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \underline{\underline{B \cdot \frac{b \cdot \Delta x}{\Delta t}}}$$



Den zuletzt entstandenen Bruch betrachten wir genauer. Δx ist die Strecke, um welche die Leiterschleife in der Zeit Δt noch tiefer in das B-Feld eingedrungen ist. b ist die Breite der Leiterschleife. Deshalb ist b·Δx die Größe der Fläche ΔA der Leiterschleife, die in der Zeit Δt zusätzlich vom Magnetfeld durchdrungen wird. Also ist:

$$U_i = U_{AB} = B \cdot \frac{b \cdot \Delta x}{\Delta t} = B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

Definition: Magnetischer Fluss, Φ

durch eine Leiterschleife

$$\Phi = B \cdot A$$

A: senkrecht vom Magnetfeld durchsetzte Fläche

$[\Phi] = 1\,T \cdot m^2 = 1\,Wb$ (Weber)

☠ Die Definition gilt so nur, wenn die Leiterschleife senkrecht zum Magnetfeld steht und wenn das Magnetfeld im Bereich der Leiterschleife homogen ist.

☺ Die Forderung der senkrechten Lage werden wir weiter unten gleich wieder abschaffen, aber jetzt erst mal weiter mit unserer induzierten Spannung.

Mit dem magnetischen Fluss können wir die induzierte Spannung von oben jetzt anders schreiben

$$U_i = B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{B \cdot \Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

Die ganze Rechnung war nur mit Beträgen. Wenn wir das Vorzeichen berücksichtigen müssen wir wegen der Regel von Lenz noch ein Minus einfügen und erhalten das

Allgemeine Induktionsgesetz:

$$U_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

➔ Im Spezialfall für konstantes Magnetfeld gibt das

$$U_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

➔ Das Experiment zeigt, dass auch bei konstanter Größe der durchsetzten Fläche und veränderlichem B-Feld eine Spannung induziert wird.

$$U_i = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

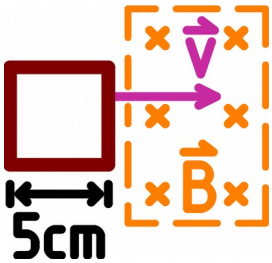
☠ Das Induktionsgesetz gilt in dieser Form nur für eine einzelne Leiterschleife. Eine Spule sind N Leiterschleifen in Reihe geschaltet und in

einer Reihenschaltung addieren sich die Spannungen. Deshalb kriegen wir für eine Spule:

$$U_i = -N \cdot \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad U_i = -N \cdot B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad U_i = -N \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

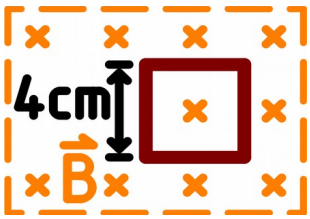
für eine Spule mit N Windungen

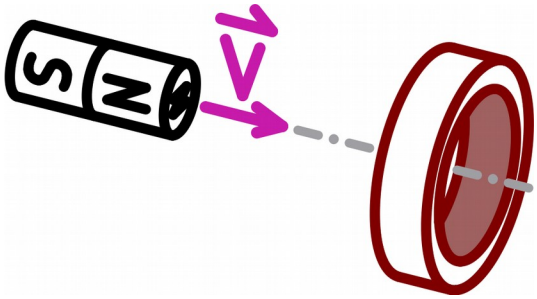
Aufgabe 10.182: Formeleinsetz-Übung



a) Eine Spule mit quadratischem Querschnitt und 30 Windungen dringt innerhalb von 0,4 s in ein räumlich begrenztes Magnetfeld der Flussdichte 0,20 T ein (Bild links). Die Spule ist kurzgeschlossen und hat eine Widerstand von 10 mΩ. Berechne die Stromstärke des induzierten Stroms während des Eindringens in das Magnetfeld und gib seine Richtung an.

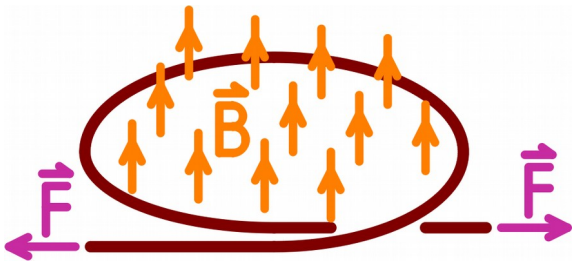
b) Eine quadratische Leiterschleife befindet sich in einem Magnetfeld der Flussdichte 1,0 T. Innerhalb von 20 ms wird das Magnetfeld gleichmäßig auf 0,4 T reduziert. Bestimme die Größe der in der Leiterschleife induzierten Spannung und gibt die Richtung des induzierten Stroms an.

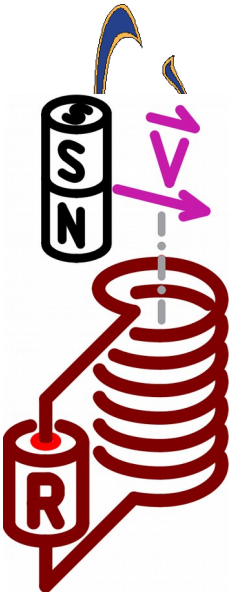




c) Ein Stabmagnet wird innerhalb eines Zeitintervalls von 0,8 s entlang der Symmetrieachse aus größerer Entfernung bis nahe vor einen Ring gebracht. Der Kupfer-Ring hat einen Durchmesser von 2,0 cm und einen ohmschen Widerstand von 4,0 mΩ. Wenn der Magnet nahe am Ring ist, herrscht im Innern des Rings eine mittlere magnetische Flussdichte von 0,15 T. Bestimme die mittlere Stärke des im Ring induzierte Stroms. Begründe ohne die Richtung des induzierten Stroms oder des von ihm erzeugten Magnetfeldes als Argument heranzuziehen, in welche Richtung bei diesem Vorgang eine Kraft auf den Ring wirkt.

d) Ein Kabel ist zu einer Kreisförmigen Schleife mit Radius 15 cm gelegt und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte 0,9 T. Anton zieht an den beiden Enden des Kabels und reduziert so den Radius innerhalb von 20 ms auf 5,0 cm. Bestimme die Größe der hierbei induzierten Spannung.





e) Ein Magnet wird aus größerer Entfernung auf eine Spule mit 600 Windungen und einer Querschnittfläche von 25 cm² zu bewegt. Nach 0,40 s befindet sich der Magnet genau über der Spule und verursacht in ihrem Innern eine mittlere magnetische Flussdichte von 0,70 T. Die Spule ist über einen Widerstand von 300 mΩ kurzgeschlossen. Bestimme die Stärke des bei diesem Vorgang induzierten Stroms und gib seine Richtung im Widerstand an.

Lösung:

a) $U_i = -N \cdot B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} = -30 \cdot 0{,}2\,T \cdot \frac{(0{,}05\,m)^2}{0{,}4\,s} = \underline{\underline{-37{,}5\,mV}}$

Stromstärke mit Beträgen: $R = \frac{U}{I}$ → $I = \frac{U}{R} = \frac{0{,}0375\,V}{0{,}01\,\Omega} = \underline{\underline{3{,}75\,A}}$

Der induzierte Strom fließt gegen den Uhrzeigersinn.

b) $U_i = -A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -(0{,}04\,m)^2 \cdot \frac{-0{,}6\,T}{0{,}02\,s} = \underline{\underline{48\,mV}}$

Der induzierte Strom fließt im Uhrzeigersinn.

c) $U_i = -A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -\pi \cdot (0{,}01\,m)^2 \cdot \frac{0{,}15\,T}{0{,}8\,s} = \underline{\underline{-58{,}9\,\mu V}}$

Stromstärke mit Beträgen: $R = \frac{U}{I}$ → $I = \frac{U}{R} = \frac{58{,}9 \cdot 10^{-6}\,V}{0{,}004\,\Omega} = \underline{\underline{14{,}7\,mA}}$

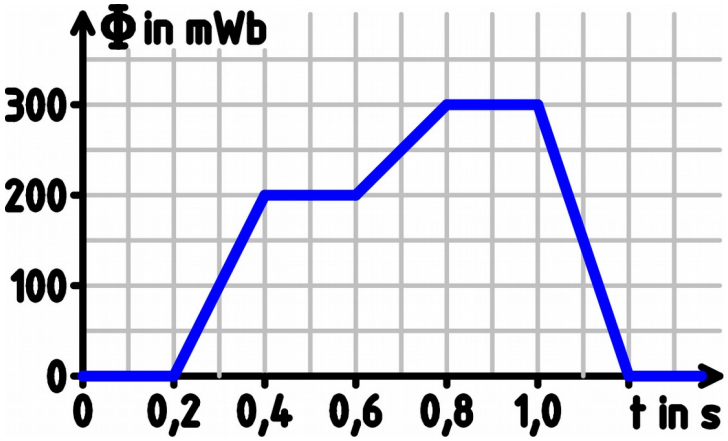
Die Bewegung des Magneten nach links ist die Ursache der Induktion. Nach der Regel von Lenz muss der induzierte Strom dieser Ursache entgegenwirken, deshalb übt der im Ring induzierte Strom eine Kraft nach rechts auf den Magneten aus. Wegen Newton III übt dann der Magnet eine genauso große Kraft nach rechts auf den Ring aus.

d) $U_i = -B \cdot \frac{\Delta A}{\Delta t} = -0{,}9\,T \cdot \frac{\pi \cdot \left((0{,}05\,m)^2 - (0{,}15\,m)^2\right)}{0{,}02\,s} = \underline{\underline{2{,}83\,V}}$

e) $U_i = -N \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -600 \cdot 0{,}0025\,m^2 \cdot \frac{0{,}70\,T}{0{,}40\,s} = \underline{\underline{-2{,}6\,V}}$

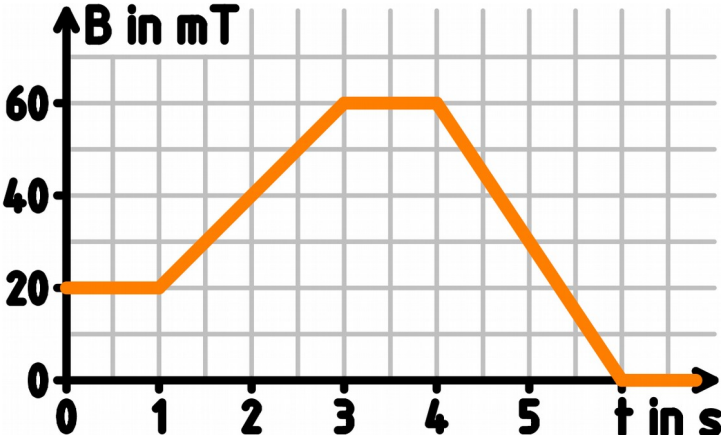
Stromstärke mit Beträgen: $R = \frac{U}{I}$ → $I = \frac{U}{R} = \frac{2{,}6\,V}{0{,}30\,\Omega} = \underline{\underline{8{,}7\,A}}$. Im Widerstand fließt der Strom nach unten.

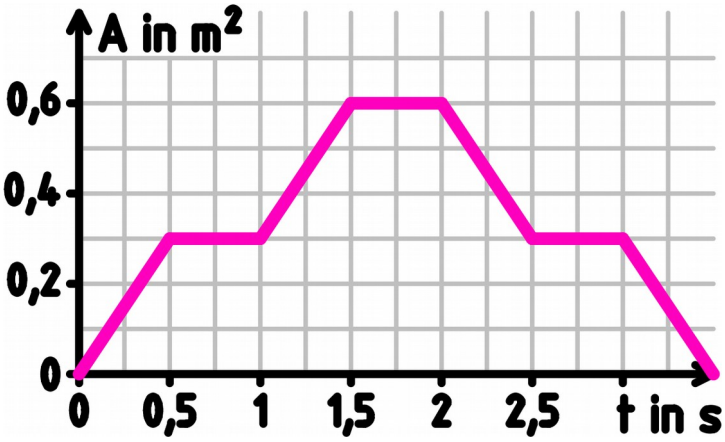
Aufgabe 10.183: Diagramme 1



a) Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des magnetischen Flusses durch eine Spule mit 800 Windungen und einem ohmschen Widerstand von 50 Ω. Zeichne das t-U-Diagramm für die in der Spule induzierte Spannung und das t-I-Diagramm für den in der Spule induzierten Strom.

b) Das Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf der magnetischen Flussdichte durch eine Spule mit 200 Windungen und einem ohmschen Widerstand von 200 Ω. Die Spule hat eine Querschnittfläche von 80 cm². Zeichne das t-U-Diagramm für die in der Spule induzierte Spannung und das t-I-Diagramm für den in der Spule induzierten Strom.

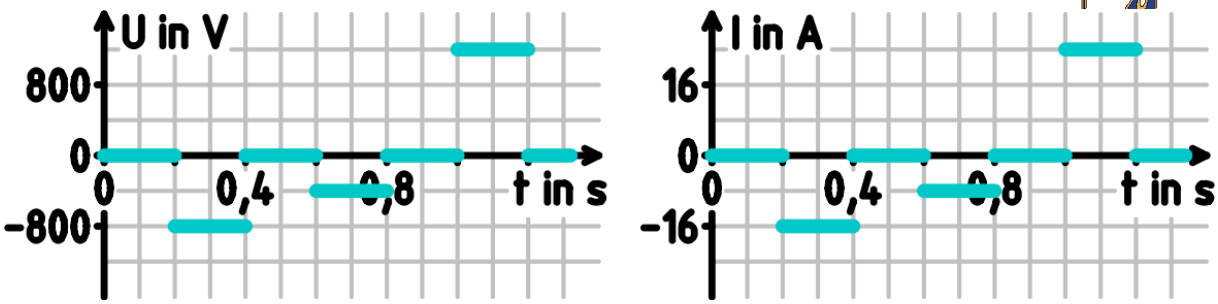




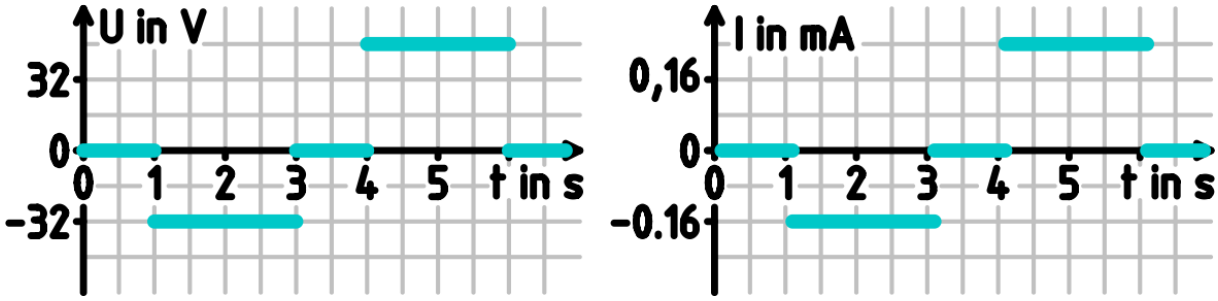
c) Eine große Spule (Windungszahl N = 20) mit einem ohmschen Widerstand von 5,0 Ω wird über räumlich begrenzte Magnetfelder, welche alle dieselbe Flussdichte von B = 0,10 mT besitzen bewegt. Die von den Magnetfeldern durchsetzte Querschnittfläche der Spule hat dabei den im Diagramm gezeigten zeitlichen Verlauf. Zeichne das t-U-Diagramm für die in der Spule induzierte Spannung und das t-I-Diagramm für den in der Spule induzierten Strom.

Lösung:

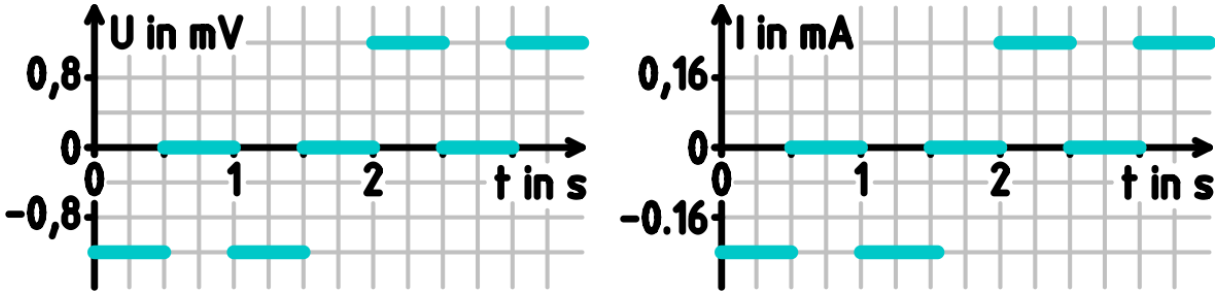
a)



b)

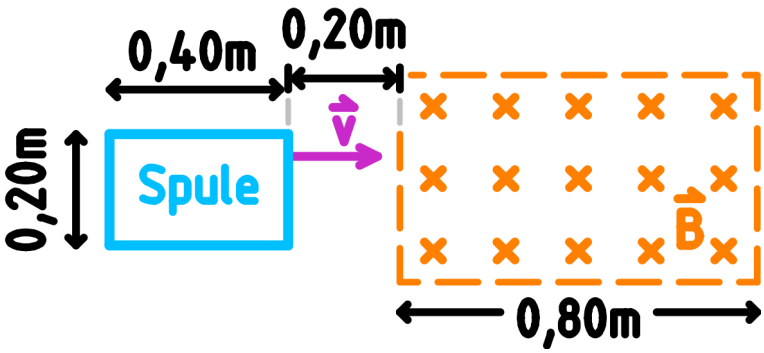


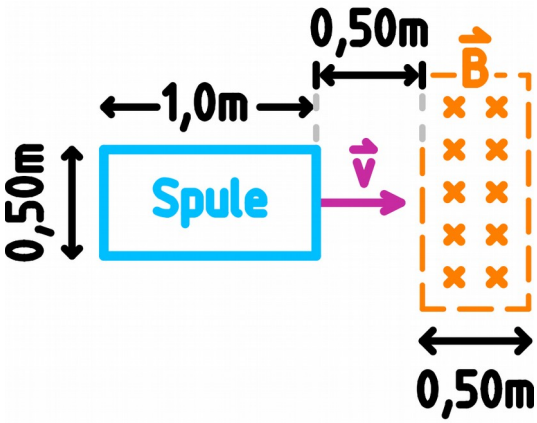
c)



Aufgabe 10.184: Diagramme 2

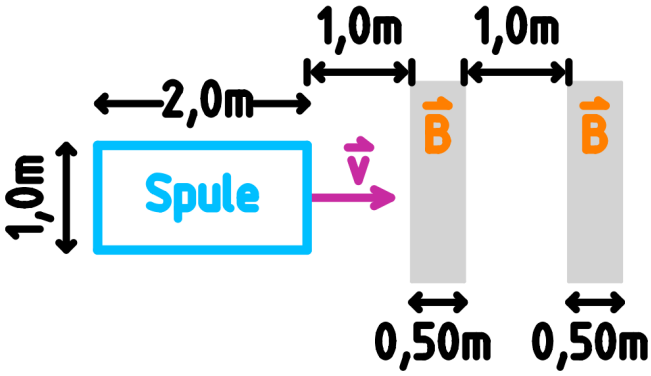
a) Eine rechteckige Spule mit 20 Windungen und einem Widerstand von 10 Ω wird mit der Geschwindigkeit v = 0,2 m/s über ein räumlich begrenztes Magnetfeld der Flussdichte B = 20 mT gezogen. Die Zeitmessung beginnt in der gezeichneten Stellung. Zeichne ein t-U-Diagramm für die in der Spule induzierte Spannung und ein t-I-Diagramm für den in der Spule induzierten Strom.





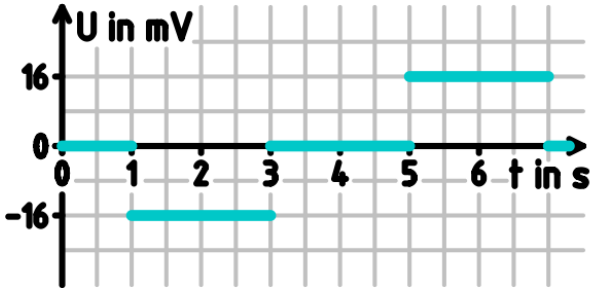
b) Eine rechteckige Spule mit 100 Windungen wird mit der Geschwindigkeit v = 0,5 m/s über ein räumlich begrenztes, homogenes Magnetfeld der Flussdichte B = 50 mT gezogen. Die Zeitmessung beginnt in der gezeichneten Stellung. Zeichne ein t-Φ-Diagramm für den zeitlichen Verlauf des magnetischen Flusses durch die Spulenfläche und ein t-U-Diagramm für die in der Spule induzierte Spannung.

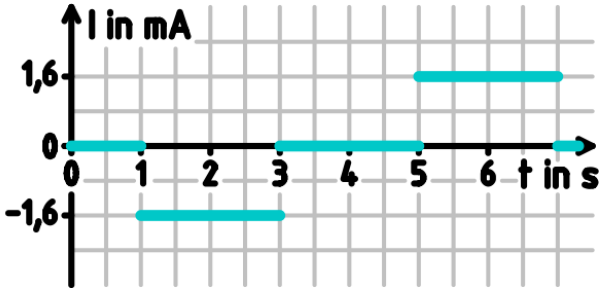
c) Eine rechteckige Spule (N = 50) wird mit der Geschwindigkeit v = 1,0 m/s über zwei begrenzte von magnetischen Feldlinien durchsetzte Bereiche gezogen. Die Flussdichte beträgt in beiden Bereichen B = 10 mT. Zeichne ein exaktes t-Φ-Diagramm für den zeitlichen Verlauf des magnetischen Flusses durch die Spulenfläche und ein t-U-Diagramm für die in der Spule induzierte Spannung.



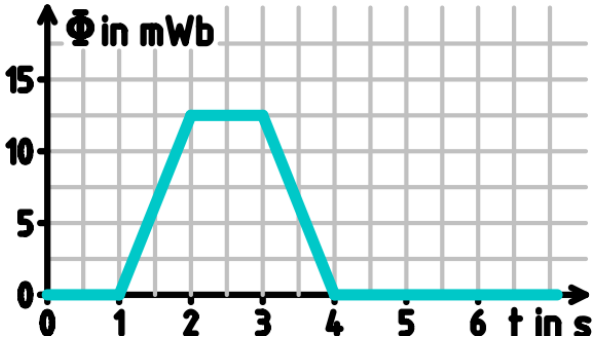
Lösung:

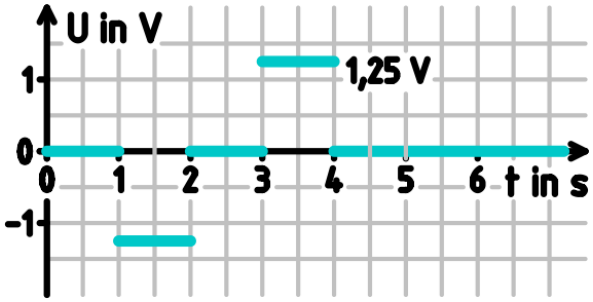
a)



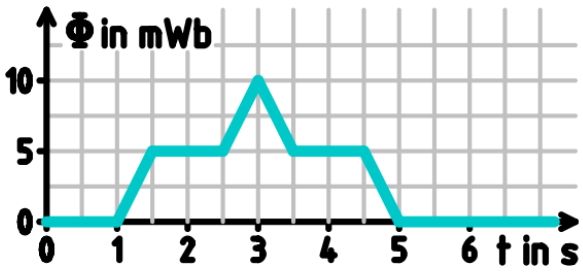


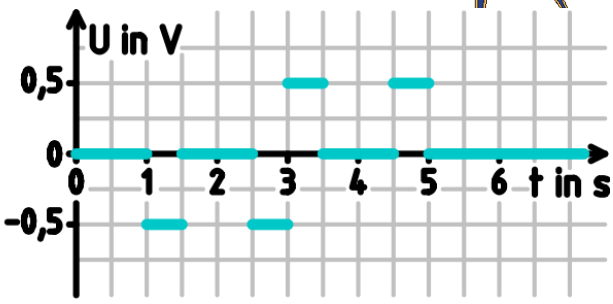
b)



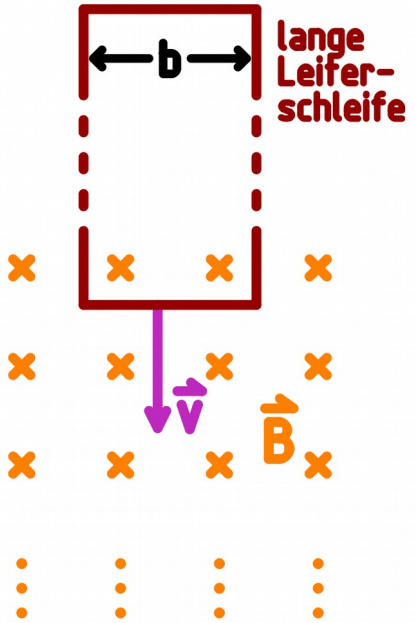


c)





Aufgabe 10.185: ISB, Link-Ebene Lehrplan; Lenzsche Regel neu



Eine geschlossene Leiterschleife der Breite b = 20 cm und sehr großer Länge fällt senkrecht nach unten und tritt senkrecht zu den Feldlinien in ein Magnetfeld der Flussdichte B = 3,0 T ein.

Zum Zeitpunkt t = 0 hat die Leiterschleife die Geschwindigkeit v = 3,0 m/s (vgl. Abb.)

a) Bestimmen Sie mit der 3-Finger-Regel die Stromrichtung in der Leiterschleife und berechnen Sie die in der Leiterschleife (R = 15 Ohm) induzierte Stromstärke zum Zeitpunkt t = 0.

b) Berechnen Sie die Kraft, welche durch das Magnetfeld auf die stromdurchflossene Leiterschleife zum Zeitpunkt t = 0 ausgeübt wird. Begründen Sie ohne Drei-Finger-Regel weshalb diese Kraft senkrecht nach oben wirkt.

c) Berechnen Sie die Gewichtskraft der Leiterschleife (m = 10 g). Welche Gesamtkraft wirkt demnach auf die Leiterschleife zum Zeitpunkt t = 0 und welche Art von Bewegung ergibt sich für sie?

d) Begründen Sie warum die Leiterschleife schließlich mit konstanter Geschwindigkeit in das Magnetfeld hineinfallen wird (Luftwiderstand soll dabei unberücksichtigt bleiben).

e) Beim Fall in das Magnetfeld mit konstanter Geschwindigkeit v verliert die Leiterschleife potentielle Energie ΔE_{pot} (Höhenenergie). Zeigen Sie durch Rechnung mit allgemeinen Größen, dass der Verlust an potentieller Energie in einem beliebigen Zeitraum Δt genauso groß ist, wie die im Stromkreis der Leiterschleife umgesetzte elektrische Energie ΔE_{el} .

Lösung:

a) Die Elektronen fließen im Uhrzeigersinn durch die Leiterschleife, der Strom fließt gegen den Uhrzeigersinn.

$$U_i = B \cdot v \cdot b = 3{,}0\,T \cdot 3{,}0\,m/s \cdot 0{,}2\,m = \underline{1{,}8\,V}$$
$$R = \frac{U}{I} \quad ; \quad I = \frac{U}{R} = \frac{1{,}8\,V}{15\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}12\,A}}$$

b) $F_L = I \cdot B \cdot b = 0{,}12\,A \cdot 3{,}0\,T \cdot 0{,}2\,m = \underline{\underline{0{,}072\,N}}$

Die Bewegung der Leiterschleife ist die Ursache der Induktion. Nach der Lenzschen Regel wird der Bewegung - nach unten - entgegengewirkt, also muss die Kraft nach oben zeigen.

c)
$$F_g = m \cdot g = 0{,}01\,kg \cdot 9{,}81\,m/s^2 = \underline{0{,}098\,N}$$
$$F_{ges} = F_g - F_L = 0{,}098\,N - 0{,}072\,N = \underline{\underline{0{,}026\,N}}$$

Die Leiterschleife wird nach unten beschleunigt.

d) Wenn die Geschwindigkeit zunimmt, steigt die induzierte Spannung und damit der induzierte Strom. Dadurch wird die Lorentzkraft auf die Leiterschleife größer und deshalb die Gesamtkraft kleiner bis schließlich beide Kräfte gleich groß sind und die Gesamtkraft Null wird. Ab diesem Zeitpunkt bewegt sich die Leiterschleife mit konstanter Geschwindigkeit (Newton I).

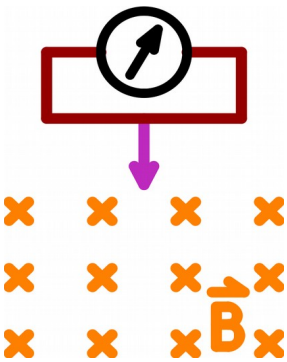
e)
Bei konstanter Geschwindigkeit gilt: $F_g = F_L$
$$m \cdot g = B \cdot I \cdot b = B \cdot \frac{U_i}{R} \cdot b = B \cdot \frac{B \cdot v \cdot b}{R} \cdot b = \frac{B^2 \cdot b^2}{R} \cdot v$$
$$\Rightarrow \underline{v = \frac{m \cdot g \cdot R}{B^2 \cdot b^2}}$$

$$\Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h = m \cdot g \cdot v \cdot \Delta t = m \cdot g \cdot \frac{m \cdot g \cdot R}{B^2 \cdot b^2} \cdot \Delta t = \frac{m^2 \cdot g^2 \cdot R}{B^2 \cdot b^2} \cdot \Delta t$$

$$\Delta E_{el} = U_i \cdot I \cdot \Delta t = \frac{U_i^2}{R} \cdot \Delta t = \frac{B^2 \cdot b^2 \cdot v^2}{R} \cdot \Delta t = \frac{B^2 \cdot b^2 \cdot m^2 \cdot g^2 \cdot R^2}{R \cdot B^4 \cdot b^4} \cdot \Delta t = \frac{m^2 \cdot g^2 \cdot R}{B^2 \cdot b^2} \cdot \Delta t$$

Die beiden Terme sind identisch, also sind die Energien gleich groß.

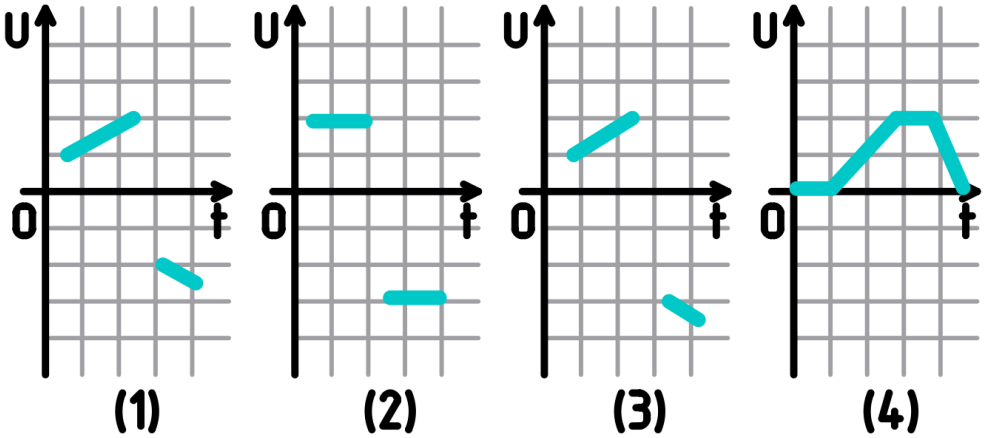
Bemerkung: Beim Spicken in der Musterlösung vom ISB ist mir aufgefallen, dass die Originallösug für die e) wesentlich geschickter ist. Ich empfehle diese dringend zur Lektüre.



Aufgabe 10.186: ISB, Link; Schleife fällt

Eine Leiterschleife wird fallen gelassen und fällt nach kurzer Zeit senkrecht zu den Feldlinien durch ein räumlich begrenztes Magnetfeld. Mit einem hochohmigen Spannungsmessgerät wird der zeitliche Verlauf der Spannung aufgezeichnet.

Diskutieren Sie die Brauchbarkeit der Diagramme (1) bis (4) zur Beschreibung des Spannungsverlaufs. Luftwiderstand soll nicht berücksichtigt werden.



Lösung: vom ISB

Da Reibungseffekte unberücksichtigt bleiben und praktisch kein Strom durch das hochohmige Spannungsmessgerät fließt, wirkt auf die Schleife nur die Gewichtskraft und sie fällt mit konstanter Beschleunigung a = g. Die Fallgeschwindigkeit nimmt linear mit der Zeit zu.

Solange die Leiterschleife noch nicht in das Magnetfeld eingetreten ist bzw. sobald sie das Magnetfeld vollständig verlassen hat, ist die induzierte Spannung 0.

Ebenso liegt keine Flussänderung vor solange die Leiterschleife vollständig vom Magnetfeld durchsetzt wird. Damit scheidet Diagramm (4) aus.

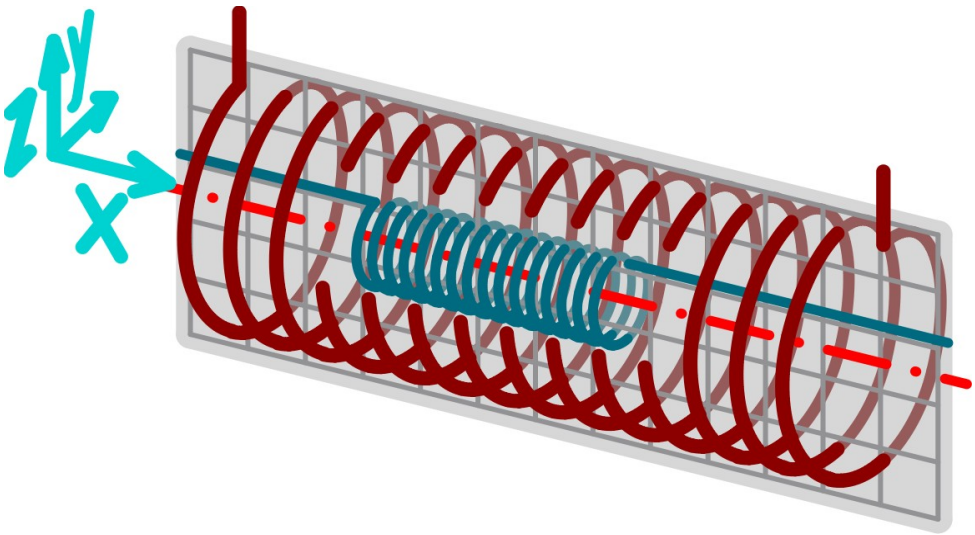
Beim Eintritt ins Magnetfeld und ebenso beim Herausfallen aus dem Magnetfeld steigt jeweils die Geschwindigkeit und deshalb die induzierte Spannung, deshalb scheidet Diagramm (2) aus.

Da die Leiterschleife am Anfang des Austrittsvorgangs aus dem Magnetfeld eine größere Geschwindigkeit hat als beim Ende des Eintrittsvorgangs in das Magnetfeld, muss sich dies auch auf die entsprechende Induktionsspannung auswirken. Damit scheidet Diagramm (1) aus. Diagramm (3) ist richtig.

Aufgabe 10.187: Feld- und Induktionsspule

Im Innern einer großen Spule (Windungszahl N = 500, Querschnittfläche A = 50 cm², Länge l = 40 cm) befindet sich eine kleine Spule (Windungszahl N = 200, Querschnittfläche A = 4,0 cm², Länge l = 6,0 cm).

Die große Spule wird von einem Netzgerät mit Strom versorgt und als Feldspule bezeichnet. Die kleine Spule ist an ein Messgerät angeschlossen und wird als Induktionsspule bezeichnet. Beide Spulenachsen sind parallel zur x-Achse.



a) Berechne die Größe der Induktionsspannung in der Induktionsspule, wenn die Stromstärke in der Feldspule beim Einschalten innerhalb von 2,0 ms von I = 0 A auf I = 5,0 A steigt. (Kontrolle: B = 7,85 mT)

Durch die Feldspule fließt jetzt ein konstanter Strom von 5,0 A.

b) Begründe ob in der Induktionsspule eine Spannung induziert wird und berechne gegebenenfalls ihre Größe, wenn ...

i) ... die Induktionsspule innerhalb von 20 ms um 5,0 cm in positive x-Richtung verschoben wird.

ii) ... die Induktionsspule innerhalb von 10 ms um 2,0 cm in positive z-Richtung verschoben wird.

iii) ... die Induktionsspule innerhalb von 0,5 s auf das doppelte ihrer Länge auseinander gezogen wird. Dabei gehen wir davon aus, dass sich dabei die Querschnittfläche der Induktionsspule nicht verändert.

iv) ... die Feldspule innerhalb von 0,50 s auf das doppelte ihrer Länge auseinandergezogen wird.

Lösung:

a) $\Delta B = B = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} Vs/Am \cdot 5{,}0\,A \cdot \frac{500}{0{,}4}\,m = \underline{7{,}85\,mT}$

$$U_i = -N \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -200 \cdot 4 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot \frac{0{,}00785\,T}{0{,}002\,s} = \underline{\underline{-0{,}31\,V}}$$

b) Bei i) und ii) ändert sich die magnetische Flussdichte in der Induktionsspule nicht, weil das B-Feld im Innern der Feldspule homogen ist. Es wird also keine Spannung induziert.

Bei iii) ändert sich weder die Querschnittfläche, noch die Flussdichte in der Induktionsspule, es wird also keine Spannung induziert.

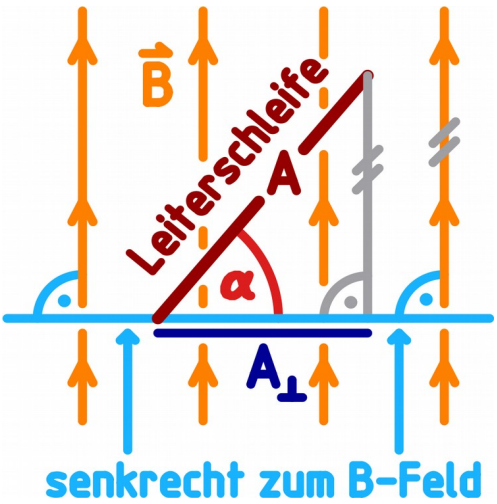
Bei iv) ändert sich die magnetische Flussdichte, also wird eine Spannung induziert. Wegen B ~ 1/l sinkt die Flussdichte auf die Hälfte ihres vorherigen Wertes.

$$U_i = -N \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -200 \cdot 4 \cdot 10^{-4}\,m^2 \cdot \frac{-0{,}5 \cdot 0{,}00785\,T}{0{,}5\,s} = \underline{\underline{0{,}63\,mV}}$$

10.3 Erzeugung sinusförmiger Wechselspannung

Wechselspannung im Stromnetz hat Vorteile gegenüber Gleichspannung. Nämlich ... ! Je "schöner" die Sinus-Spannung im Netz, desto verlustfreier funktioniert das Netz. In Wirklichkeit ist das Erzeugen einer "schönen" Sinus-Spannung bisschen trickreich. In einem einfachen Modell, wie wir es gleich benutzen, geht's wie von selbst.

Vorher müssen wir aber noch unsere Definition für den magnetischen Fluss verbessern und was mit Ableitungen machen.



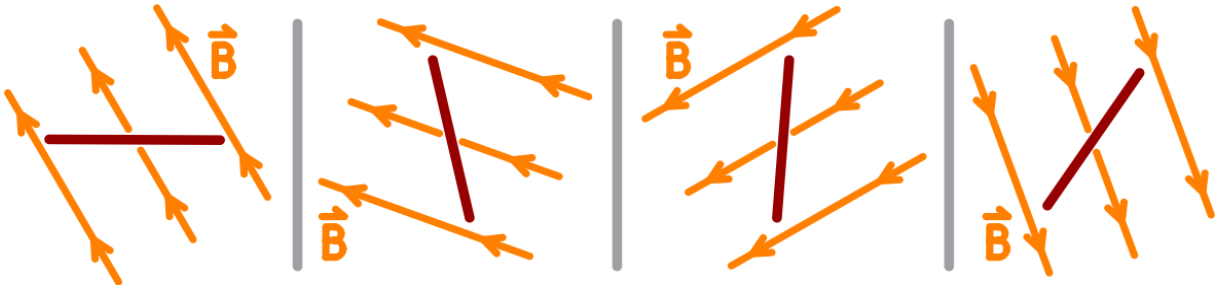
Magnetischer Fluss:

Falls die Leiterschleife nicht senkrecht zum Magnetfeld steht, müssen wir die Fläche der Leiterschleife in die Lot-Ebene zum B-Feld projizieren und erhalten:

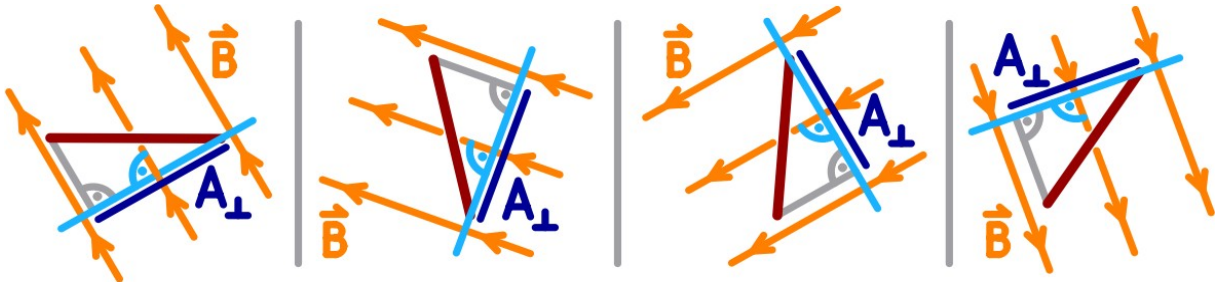
$$\boxed{\Phi = B \cdot A_\perp = B \cdot A \cdot \cos\alpha}$$

Aufgabe 10.188:

Zeichne jeweils die Projektion der Leiterschleife in die Lot-Ebene zum B-Feld ein.



Lösung:



Ableitungen:

Alle Quotienten der Form $\frac{\Delta\, oben}{\Delta\, unten}$, die wir bisher in der Physik benutzt haben, dürfen wir so nur benutzen, wenn die Quotienten konstant sind. Falls die Quotienten nicht konstant sind müssen wir sie durch die entsprechenden Ableitungen ersetzen. Für Ableitungen nach der Zeit t schreiben wir keinen Strich sondern einen Punkt.

Beispiele:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad v(t)=\frac{dx}{dt}=\dot{x}(t) \qquad a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad a(t)=\frac{dv}{dt}=\dot{v}(t)$$

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt}=\dot{\Phi}(t) \qquad \frac{\Delta A}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \frac{dA}{dt}=\dot{A}(t) \qquad \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \frac{dB}{dt}=\dot{B}(t)$$

Wir können auch unsere Definition von der Arbeit (potentielle Energie) verbessern:

$\Delta E_{pot}=W=F\cdot\Delta x \quad \rightarrow \quad F=\frac{\Delta E_{pot}}{\Delta x}=\frac{dE}{dx}=E'(x)$ Wobei F die Kraft ist, die man ausüben muss, um den Körper gegen die Feldkraft im Feld zu bewegen. Wenn man für F die Kraft einsetzen will, die das Feld ausübt, muss man noch das Vorzeichen berücksichtigen $F=-\frac{dE}{dx}=-E'(x)$.

Damit könne wir jetzt das Induktionsgesetz in seiner endgültigen Form schreiben:

$U_i=-\dot{\Phi}(t)$ bzw. $U_i=-B\cdot\dot{A}(t)$ bzw. $U_i=-A\cdot\dot{B}(t)$

oder in einer Spule mit N Windungen

$U_i=-N\cdot\dot{\Phi}(t)$ bzw. $U_i=-N\cdot B\cdot\dot{A}(t)$ bzw. $U_i=-N\cdot A\cdot\dot{B}(t)$

➔ Wichtig für zeichnerische Aufgaben: Die geometrische Bedeutung der Ableitung ist die Tangentensteigung, d.h. Steigungsdreieck zeichnen.

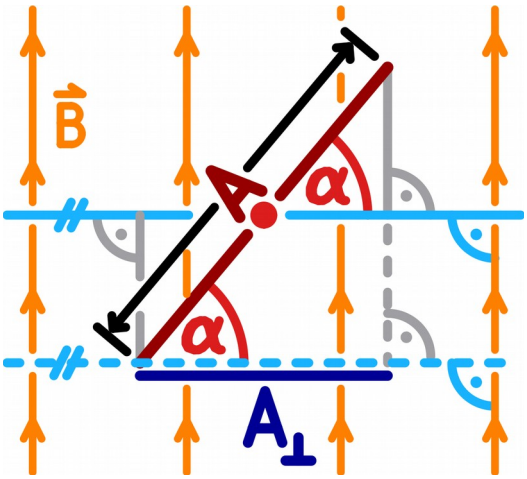
Aufgabe 10.189:

Der magnetische Fluss durch eine Leiterschleife ist gegeben durch

$$\Phi(t)=0{,}2\,Wb\cdot\sin\left(50\frac{1}{s}\cdot t\right)$$

Bestimme die in der Leiterschleife induzierte Spannung U(t) in Abhängigkeit von der Zeit t.

Sich drehende Leiterschleife:



Zum Zeitpunkt t = 0 ist die Leiterschleife senkrecht zu B-Feld. Wenn die Leiterschleife sich dann mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht gilt:

$$\alpha(t)=\omega\cdot t=\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t$$

Damit erhalten wir für die Fläche senkrecht zum B-Feld:

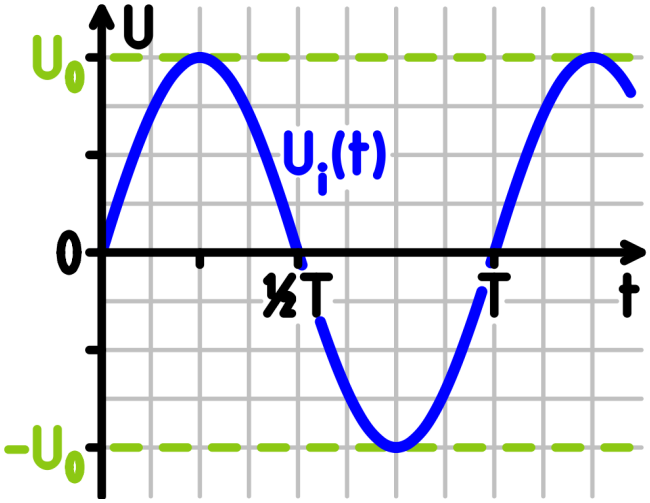
$$A_{\perp}(t)=A\cdot\cos\alpha(t)=A\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

Und damit für den magnetischen Fluss

$$\Phi(t)=B\cdot A(t)=B\cdot A\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

Das setzen wir ins Induktionsgesetz ein:

$$U_i=-\dot{\Phi}(t)=-B\cdot A\cdot\frac{d}{dt}\cos(\omega\cdot t)$$
$$=-B\cdot A\cdot\sin(\omega\cdot t)\cdot\omega$$
$$\underline{\underline{U_i=-B\cdot A\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)}}$$



oder für eine Spule mit N Windungen

$$\boxed{U_i=-N\cdot B\cdot A\cdot\omega\cdot\sin(\omega\cdot t)}$$

und schon haben wir die sinusförmige Wechselspannung.

Die Amplitude der Spannung ist $\boxed{U_0=N\cdot B\cdot A\cdot\omega}$ mit $\boxed{\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}}$.

Aufgabe 10.190:

Eine flache Spule mit 500 Windungen und quadratischem Querschnitt (10cm x 10cm) rotiert mit einer Frequenz von 50Hz in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte 0,8T.

Bestimme die Induktionsspannung als Funktion der Zeit und gib die Amplitude der induzierten Spannung an.

Lösung:

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 2\cdot\pi\cdot f = 2\cdot\pi\cdot 50\,Hz = \underline{314\,s^{-1}}$

Amplitude: $U_0 = N\cdot B\cdot A\cdot\omega = 500\cdot 0{,}8\,T\cdot(0{,}1\,m)^2\cdot 314\,s^{-1} = \underline{1{,}26\,kV}$

Spannung: $\underline{U(t) = 1{,}26\cdot 10^3\,V\cdot\sin(314\,s^{-1}\cdot t)}$

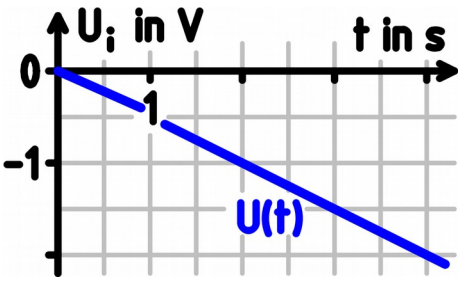
Aufgabe 10 .191:

Eine Spule mit 1000 Windungen und quadratischem Querschnitt (5cm x 5cm) wird von einem Magnetfeld parallel zur Spulenachse durchsetzt. Die Flussdichte des Feldes ist zeitabhängig mit $B(t) = 0{,}1\frac{T}{s^2}\cdot t^2$.

Bestimme die induzierte Spannung als Funktion der Zeit und zeichne ein t-U-Diagramm.

Lösung:

$$U_i = -N\cdot A\cdot\dot{B}(t)$$
$$= -1000\cdot(0{,}05\,m)^2\cdot 0{,}2\cdot\frac{T}{s^2}\cdot t$$
$$= \underline{\underline{-0{,}5\frac{V}{s}\cdot t}}$$



Aufgabe 10.192:

Zur sich im externen Magnetfeld drehenden Spule

a) Je größer die magnetische Flussdichte des externen Feldes im Innern der Spule, desto größer die induzierte Spannung. Welche Maßnahmen sind notwendig, um die vom externen Feld erzeugte Flussdichte so groß wie möglich zu machen.

b) Zeige, dass die Amplitude der induzierten Spannung direkt proportionale zur Frequenz ist, mit der sich die Spule dreht.

Lösung:

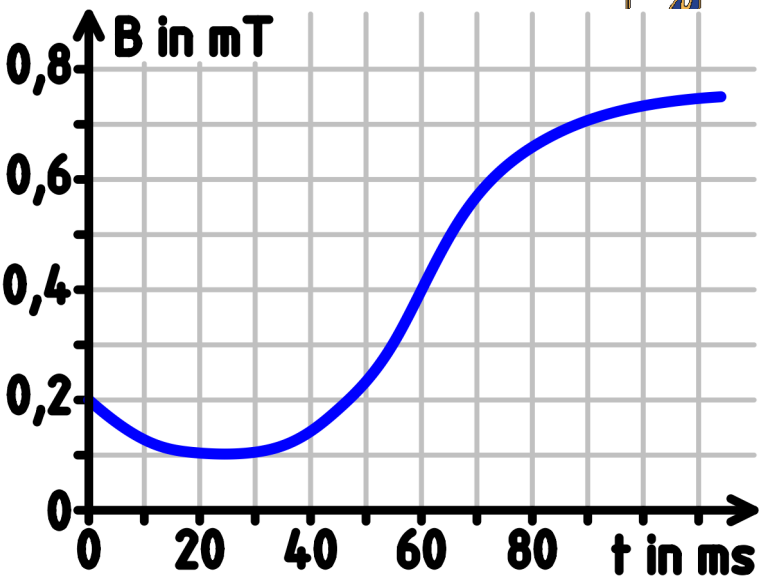
a) Eisenkern in die Spule und Abstand von Eisenkern zu externem Magneten möglichst klein -> möglichst dünner Luftspalt.

b) $U_0 = N\cdot B\cdot A\cdot\omega = (N\cdot B\cdot A\cdot 2\pi)\cdot f$; Proportionalitätsfaktor in der Klammer

Aufgabe 10.193:

(War so ähnlich mal im Abitur, find ich aber nicht mehr.)

Eine Spule mit 200 Windungen und einem Quadratischen Querschnitt von 1,0dm Seitenlänge wird senkrecht zu ihrer Querschnittfläche von einem Magnetfeld veränderlicher Flussdichte durchdrungen.



a) Bestimme die induzierte Spannung für die drei Zeitpunkte t = 10ms, 25ms und 45ms.

b) Zu welchem Zeitpunkt ist die induzierte Spannung betragsmäßig am größten? Bestimme diese maximal induzierte Spannung.

c) Wie ändern sich die Werte für die induzierte Spannung, wenn die Spule um 60° zur idealen Ausrichtung verdreht ist?

Lösung:

a) $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ kann man mit Hilfe von Steigungsdreiecken aus dem Diagramm ablesen. Beachte, dass man dafür immer zuerst Tangenten zeichnen muss.

t = 10ms: $\frac{\Delta B}{\Delta t}=\frac{-0{,}18\cdot 10^{-3}\,T}{37\cdot 10^{-3}\,s}=\underline{-0{,}0049\,T/s}$

$U_i=-200\cdot(0{,}1\,m)^2\cdot(-0{,}0049\,T/s)=\underline{9{,}8\,mV}$

t = 25ms: $\frac{\Delta B}{\Delta t}=\underline{0\,T/s}$

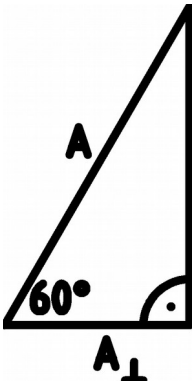
$\underline{\underline{U_i=0}}$

t = 45ms: $\frac{\Delta B}{\Delta t}=\frac{0{,}2\cdot 10^{-3}\,T}{20\cdot 10^{-3}\,s}=\underline{0{,}01\,T/s}$

$U_i=-200\cdot(0{,}1\,m)^2\cdot(0{,}01\,T/s)=\underline{\underline{-20\,mV}}$

b) Größte Spannung, wenn t-B-Diagramm am steilsten bei t = 60ms

$$U_{i,max}=-200\cdot(0{,}1\,m)^2\cdot\frac{0{,}4\cdot 10^{-3}\,T}{20\cdot 10^{-3}\,s}=\underline{\underline{-40\,mV}}$$



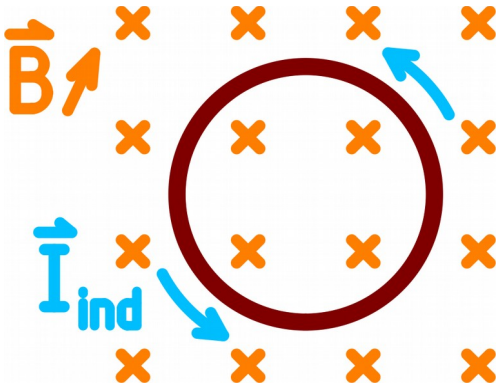
c) Für die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche muss man jetzt die senkrechte Projektion der Spulenfläche in die Ebene senkrecht zum Magnetfeld einsetzen.

$$A_{senkrecht} = A \cdot \cos(60°) = A \cdot \frac{1}{2}$$

Das bedeutet, dass jetzt alle Induktionsspannungen nur noch halb so groß sind.

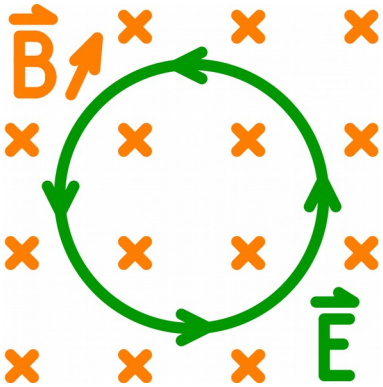
10.4 Induktionsgesetz, Felder

Wir betrachten eine vom Magnetfeld durchsetzte Kreisförmige Leiterschleife. Die magnetische Flussdichte soll gerade zunehmen. Laut Induktionsgesetz wird in der Leiterschleife ein Strom induziert. Dass das passiert, ist ein experimenteller Befund. Wir hätten das nicht aus Bekanntem schließen können.



☠ Das Merkwürdige daran ist, dass offensichtlich auf die Elektronen, also auf die Ladungen in der Leiterschleife, eine Kraft wirkt, obwohl sich die Leiterschleife nicht bewegt.

☹ Im Magnetfeld wirkt aber nur dann eine Kraft auf eine Ladung, wenn sie sich bewegt! Was ist da los?



Die Erklärung kann nur sein, dass durch das sich verändernde Magnetfeld ein elektrisches Feld entstanden ist. Oft sind die elektrischen Feldlinien kreisförmig oder wenigstens ungefähr kreisförmig. Wir gehen einfach davon aus, das das immer so ist. Im Bild oben wirkt die Kraft auf die Elektronen im Uhrzeigersinn, deshalb müssen die elektrischen Feldlinien gegen den Uhrzeigersinn laufen.

<u>Induktionsgesetz für Felder:</u>

Immer dann, wenn ein Magnetfeld sich verändert, werden kreisförmige elektrische Feldlinien erzeugt. Für die Richtung der elektrischen Feldlinien gilt die

Rechte-Hand-Regel:

- ➔ Daumen zeigt gegen die Richtung der Veränderung des Magnetfeldes
- ➔ gekrümmte Finger geben die Richtung der elektrischen Feldlinien an.

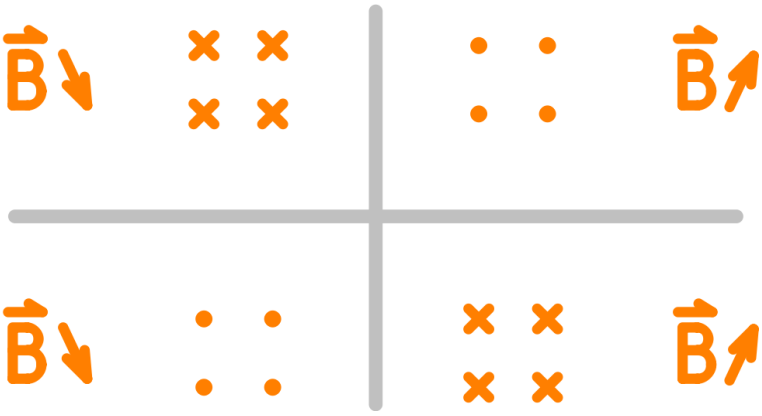
In der Mathematik schreibt man für das alles einfach:

$$rot\,\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \text{oder} \quad \nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

Das nur nebenbei. Wegen dem Minus in der Formel muss der Daumen gegen die Veränderung des Magnetfeldes zeigen.

Aufgabe 10.194:

Zeichen jeweils die von dem sich verändernden Magnetfeld erzeugten elektrischen Feldlinien ein. Der Einfachheit halber zeichnen wir nur Feldlinien, die das Magnetfeld ganz umfassen.



Aufgabe 10.195:

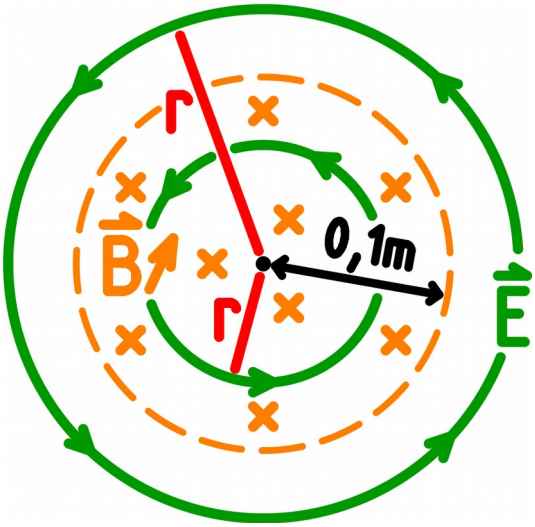
Ein zylinderförmiges, homogenes Magnetfeld (Mittelpunkt mit einem schwarzen Punkt markiert) ändert sich in 0,1s von 0 auf 1,0T.

a) Berechne die elektrische Feldstärke der induzierten E-Feldlinie bei r = 0,1m.

b) Berechne die Stärke der E-Feldlinien im Innern des Magnetfeldes in Abhängigkeit von r.

c) Berechne die Stärke der E-Feldlinien außerhalb des Magnetfeldes in Abhängigkeit von r.

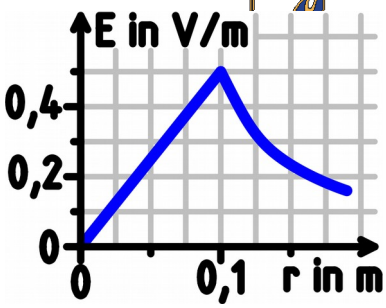
d) Stelle die Ergebnisse von b) und c) in einem Diagramm dar.



Lösung:

a) $E=0{,}5\frac{V}{m}$ b) $E=\frac{10\frac{T}{s}\cdot\pi\cdot r^2}{2\cdot\pi\cdot r}=5\frac{T}{s}\cdot r$

c) $E=\frac{10(T/s)\cdot\pi\cdot 0{,}1^2 m^2}{2\cdot\pi\cdot r}=0{,}05\frac{T\cdot m^2}{s}\cdot\frac{1}{r}$ d) rechts



10.5 Selbstinduktion

Von Selbstinduktion spricht man, wenn das sich verändernde Magnetfeld, das in der Spule eine Spannung induziert, von der Spule selbst erzeugt wird. Das passiert immer dann, wenn sich die Stromstärke in der Spule verändert, denn wegen $B=\mu_0\cdot I\cdot(N/l)$ ändert sich dann das von der Spule erzeugte Magnetfeld und wenn dieses Magnetfeld sich verändert ...

➔ Immer wenn sich die Stromstärke in einer Spule verändert wird – vom Magnetfeld der Spule selbst – in der Spule eine Spannung induziert.

Größe der induzierten Spannung:

$$U_i=-N\cdot A\cdot\dot{B}=-N\cdot A\cdot\frac{d}{dt}\left(\mu_0\cdot I(t)\cdot\frac{N}{l}\right)=-N\cdot A\cdot\mu_0\cdot\frac{N}{L}\cdot\dot{I}(t)=-\mu_0\cdot A\cdot\frac{N^2}{l}\cdot\dot{I}(t)$$

Den Faktor vor der Stromableitung nennt man Induktivität, L .

Selbstinduktion:

$$U_i=-L\cdot\dot{I}(t)$$

mit L, der Induktivität der Spule

$$L=\mu_0\cdot A\cdot\frac{N^2}{l}$$

$[L]=1H$ (Henry)

Das Minus in der Formel kommt aus der Lenzschen Regel. Wegen dieser Regel muss die induzierte Spannung so gerichtet sein, dass sie der Veränderung des Stromflusses in der Spule entgegenwirkt.

➔ Durch Selbstinduktion versucht die Spule jeder Veränderung des Stromflusses entgegenzuwirken.

➔ Die Spule will, daß die Stromstärke in ihr genauso bleibt wie sie ist.

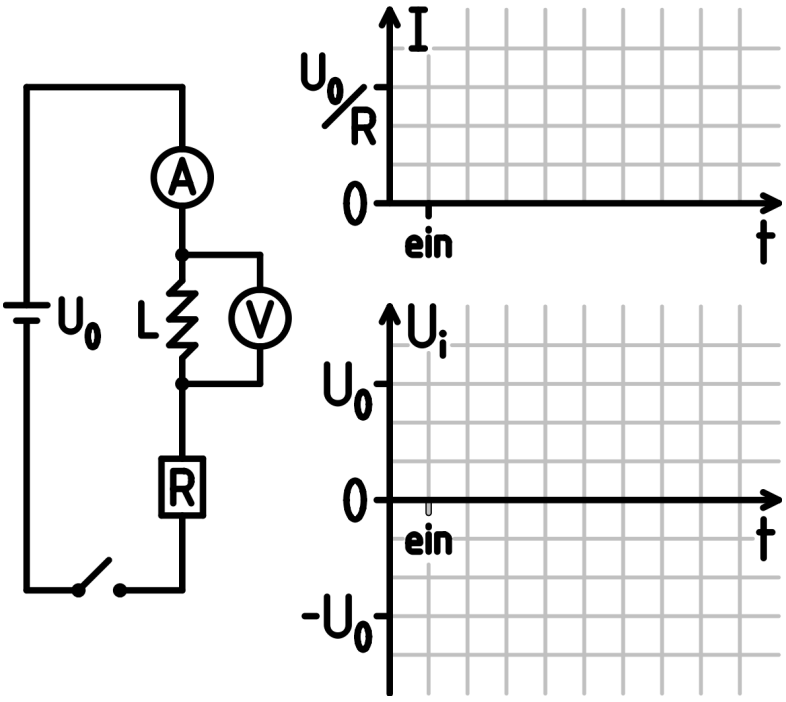
Aufgabe 10.196:

Nach allem was wir gelernt haben, kann ein Körper keine Kraft auf sich selbst ausüben. Das sich verändernde Magnetfeld wird aber von den Elektronen in der Spule erzeugt. Das bedeutet, dass die Elektronen eine Kraft auf sich selbst ausüben, was gar nicht geht. Kläre den Widerspruch auf!

Einschalt-Vorgang:

Wir gehen im weiteren davon aus, dass die Spule keinen ohmschen Widerstand hat (ideal) und das deshalb die an der Spule abfallende Spannung nur die induzierte Spannung sein kann.

Bei "ein" ist die Stromstärke I = 0, am Widerstand fällt wegen U = R · I gar keine Spannung ab. Die ganze Spannung muss als induzierte Spannung Ui = - L · dI/dt an der Spule abfallen, weswegen der Anstieg der Stromstärke zu Beginn sehr steil ist.

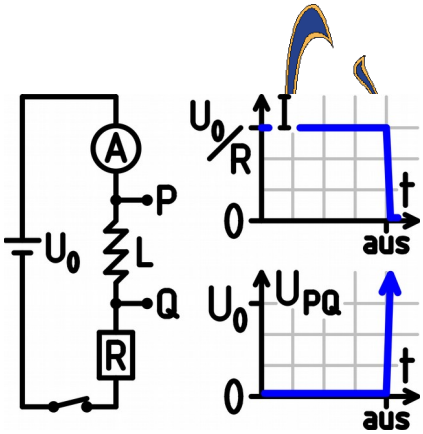


Bei gestiegener Stromstärke wird der Spannungsabfall am Widerstand größer, d.h. die induzierte Spannung muss kleiner werden (Reihenschaltung). Wenn die in der Spule induzierte Spannung kleiner wird muss wegen Ui = - L · dI/dt auch der Anstieg der Stromstärke betragsmäßig kleiner werden, d.h. das t-I-Diagramm wird immer flacher. Schließlich wird die Stromstärke nur noch durch den ohmschen Widerstand begrenzt, und wenn dann I = konst. wird Ui = 0.

😐 Die Darstellung oben bietet eine vollständige logische Argumentation für das Zustandekommen der Diagramme, unter Ausnutzung der physikalischen Gesetze.

☠ Es wird allerdings keine Ursache-Wirkungskette herausgearbeitet, weil ja die induzierte Spannung die Folge des Ansteigens der Stromstärke ist und nicht umgekehrt!

Ausschalten ohne Stromkreis:

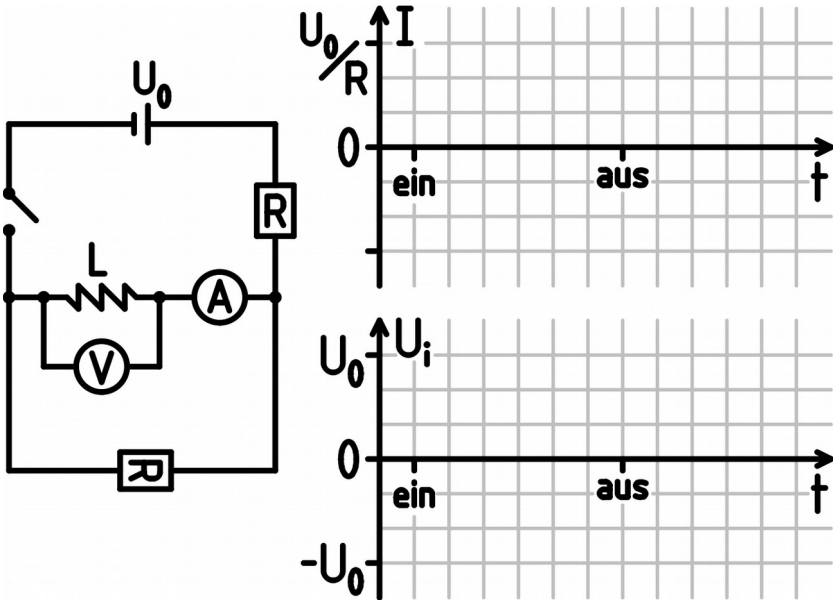


Beim Ausschalten fällt die Stromstärke in kürzester Zeit auf Null (kein Stromkreis mehr da), d.h. dI/dt hat einen extrem hohen Betrag und wegen Ui = - L · dI/dt wird eine extrem hohe Spannung induziert.

Zwischen den Punkten P und Q entsteht eine sehr hohe Spannung, die so groß sein kann, dass es zum Spannungsdurchschlag kommt. Genutzt wird das für den Zündfunken bei Verbrennungsmotoren oder auch bei Weidezäunen, wobei die mechanischen Schalter zunehmend durch elektronische Schaltungen ersetzt werden.

Ein- und ausschalten am geschlossenen Stromkreis:

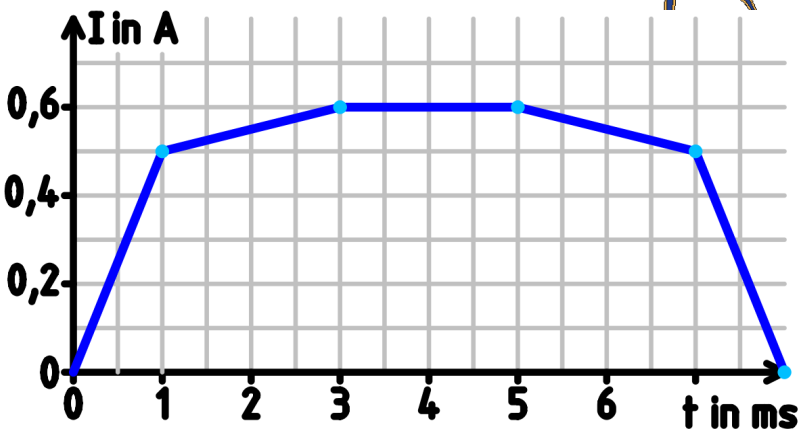
Zur Messung muss die Schaltung von oben entsprechend abgeändert werden. Der erste Widerstand ist verlegt, damit nach dem Ausschalten der ganze Strom durch den neuen Widerstand unten fließt und die ganze induzierte Spannung am neuen Widerstand unten abfällt, dann tun wir uns leichter beim Argumentieren.

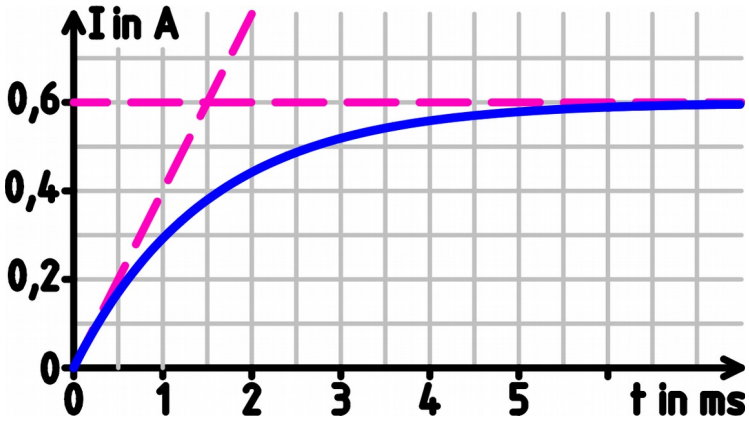


Beim Ausschalten fällt die Stromstärke wodurch eine Spannung induziert wird, die aber entgegengesetzt zur Spannung beim Einschalten gerichtet ist, da die induzierte Spannung beim Ausschalten den Stromfluss nicht behindert, sondern ihn aufrechterhalten will. Außerdem ist beim Einschalten dI/dt größer Null und beim Ausschalten dI/dt kleiner Null (weil die Stromstärke beim Ausschalten sinkt), und wegen U = - L · dI/dt muss dann auch die induzierte Spannung entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wenn die Stromstärke sinkt, wird wegen U = R · I die am unteren Widerstand abfallende Spannung kleiner. Die in der Spule induzierte Spannung ist genauso groß (Parallelschaltung), deshalb muss wegen Ui = - L · dI/dt auch dI/dt betragsmäßig immer kleiner werden. Die Stromstärke fällt also immer langsamer (das t-I-Diagramm wird immer flacher), bis schließlich die Stromstärke und alles andere Null ist.

Aufgabe 10.197:

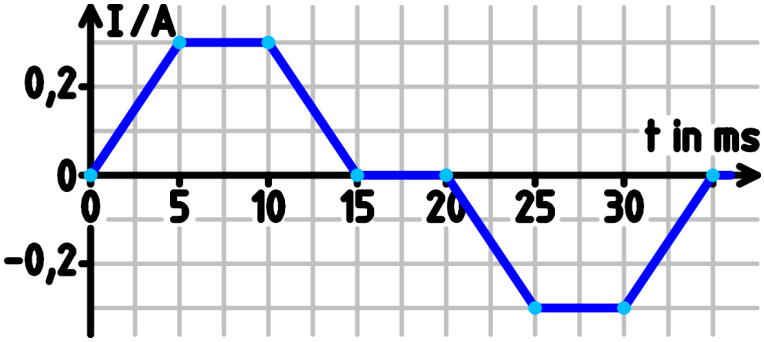
a) Das nebenstehende Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf der Stromstärke durch eine Spule der Induktivität L = 0,80 H. Bestimme die in den einzelnen Zeitintervallen induzierte Spannung.

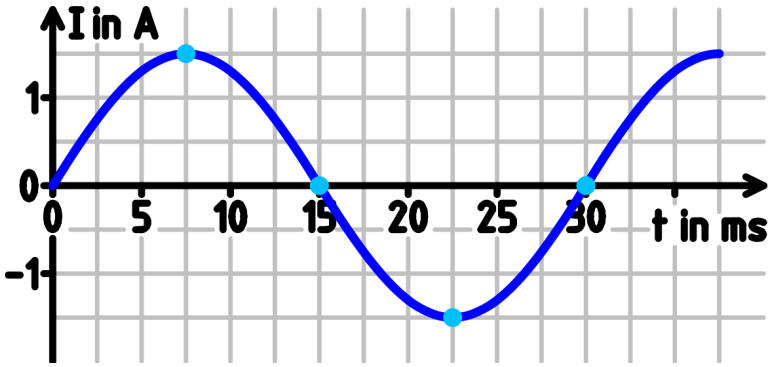




b) Ein Stromkreis mit Induktivität und ohmschem Widerstand ist an eine Spannung von U = 120 V angeschlossen. Das Diagramm zeigt den Verlauf der Stromstärke beim Einschalten. Die gestrichelten Hilfslinien sollen der Lesbarkeit dienen. Bestimme die Induktivität und den ohmschen Widerstand des Stromkreises.

c) Durch eine Spule mit 12 000 Windungen der Länge l = 20 cm und der Querschnittfläche A = 25 cm² fließt der im Diagramm gezeigte Strom. Zeichne ein t-U-Diagramm für die in der Spule induzierte Spannung.





d) Durch eine Spule der Induktivität L = 3,0 H fließt der im Diagramm gezeigte Strom. Bestimme die zu den markierten Zeitpunkten induzierte Spannung und zeichne für die in der Spule induzierte Spannung ein t-U-Diagramm..

Lösung:

a) $0 \leqslant t \leqslant 1\,ms$: $U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -0{,}8\,H \cdot \frac{0{,}5\,A}{0{,}001\,s} = \underline{-400\,V}$

$1\,ms \leqslant t \leqslant 3\,ms$: $U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -0{,}8\,H \cdot \frac{0{,}1\,A}{0{,}002\,s} = \underline{-40\,V}$

$3\,ms \leqslant t \leqslant 5\,ms$: $\frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{U_i = 0}$

$5\,ms \leqslant t \leqslant 7\,ms$: $U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -0{,}8\,H \cdot \frac{-0{,}1\,A}{0{,}002\,s} = \underline{+40\,V}$

$7 \leqslant t \leqslant 8\,ms$: $U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt} = -0{,}8\,H \cdot \frac{-0{,}5\,A}{0{,}001\,s} = \underline{+400\,V}$

b) Bei t = 0 fällt die gesamte Spannung als induzierte Spannung an der Spule ab.

$U_i = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ → $L = -\frac{U_i}{dI/dt} = -\frac{-120\,V}{(0{,}6\,A)/(0{,}0015\,s)} = \underline{\underline{0{,}30\,H}}$

Am Ende fällt die gesamte Spannung am ohmschen Widerstand ab.

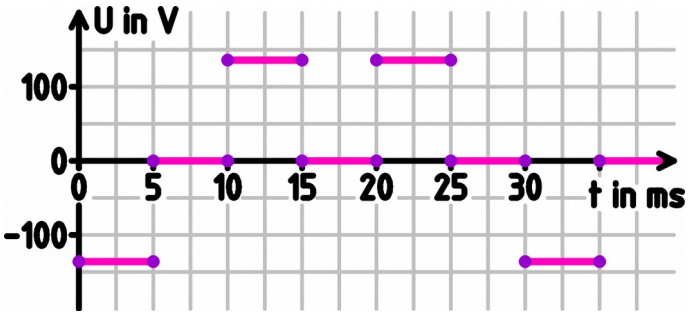
$R = \frac{U}{I} = \frac{120\,V}{0{,}6\,A} = \underline{\underline{200\,\Omega}}$

c) Induktivität der Spule:

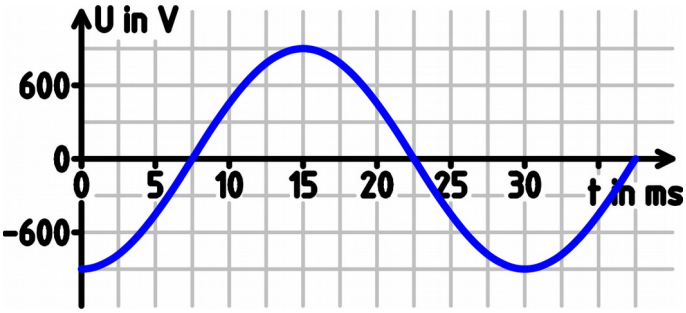
$L = \mu_0 \cdot A \cdot \frac{N^2}{l}$

$= 4\pi \cdot 10^{-7}\,Vs/(Am) \cdot 0{,}0025\,m^2 \cdot \frac{12000^2}{0{,}2\,m}$

$= \underline{2{,}26\,H}$



Ind. Spannung aus Ui = -L·(dI/dt) gibt das Diagramm. Betrag ist jeweils 136 V. Vorzeichen beachten!!!



d) Bei horizontaler Tangente ist dI/dt gleich Null, also die induzierte Spannung auch gleich Null. An den Nullstellen bestimmt man den Betrag der Tangentensteigung ungefähr zu dI/dt ≈ 1,5A/0,005s = 300 A/s, das gibt eine induzierte Spannung von 900 V. Vorzeichen beachten!!!

10.6 Energie der stromdurchflossenen Spule

Da man gegen die Selbstinduktion Arbeit verrichten muss, um die Stromstärke in der Spule von Null auf den gewünschten Wert zu steigern, muss wegen des Energieerhaltungssatzes die Energie der Spule gestiegen sein. Diese Energie ist in der stromdurchflossenen Spule gespeichert und wird beim Ausschalten eingesetzt um den Stromfluss noch ein wenig aufrechtzuerhalten.

Ob man sagt, dass die Energie in der stromdurchflossenen Spule steckt oder im dadurch erzeugten Magnetfeld ist Geschmackssache. Nur durch das Zusammenbrechen des Magnetfeldes wird ja die Energie freigesetzt, aber ohne Spule gäbe es gar kein Magnetfeld. Für die gespeicherte Energie gilt die Formel:

$$\boxed{E_{mag}=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2}$$

Die Formel ist der elektrischen Energie im Kondensator $E_{el}=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2$ recht ähnlich. Auch beim Kondensator kann man sich auf den Standpunkt stellen, das die Energie im elektrischen Feld gespeichert ist, oder wahlweise in den verschobenen Ladungen als potentielle Energie. Beide Standpunkte haben jeweils ihre Berechtigung.

Aufgabe 10.198:

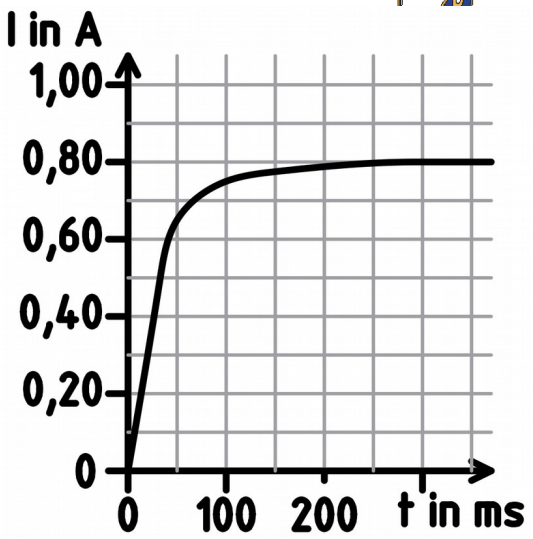
Wenn man den Energiegehalt durch das Volumen des Feldes teilt, bekommt man die Energiedichte des Feldes ρ_{el} bzw. ρ_{mag}. Damit kann man dann die Energie im Feld schreiben als $E=\rho\cdot V$. Bestimme die Energiedichte des elektrischen und des magnetischen Feldes in Kondensator bzw. Spule in Abhängigkeit nur von der Feldstärke (Flussdichte) und von Naturkonstanten. Das richtige Volumen ist jeweils das Volumen des Geräts, d.h. V = A·d bzw. V = A· l . Rechne im Vakuum, d.h. ohne ϵ_r bzw. μ_r .

Lösung:

Spannung und Stromstärke erst mal stehen lassen und geschickt erweitern, so dass die Größen E und B statt der U und I kommen: $\rho_{el}=\frac{1}{2}\cdot\epsilon_0\cdot E^2$ und $\rho_{mag}=\frac{1}{2\cdot\mu_0}\cdot B^2$

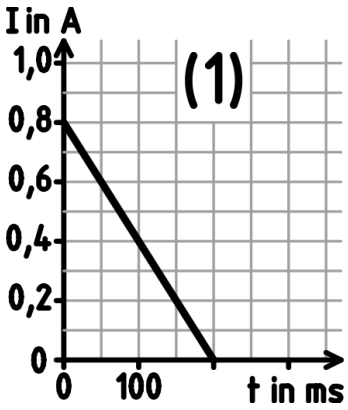
Aufgabe 10.199: ISB, Link-Ebene Lehrplan; Induktivität einer Spule

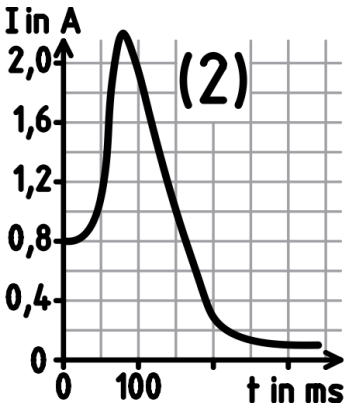
Eine Spule ist über einen Schalter an ein Netzgerät mit der Spannung U = 10 V angeschlossen. Beim Schließen des Schalters entsteht das t-I-Diagramm rechts.

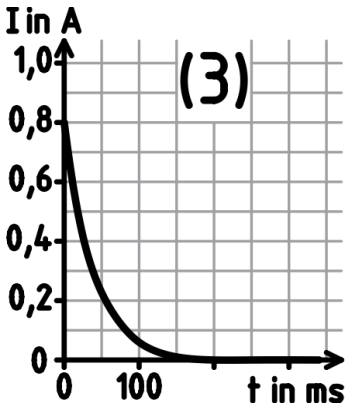


a) Erklären Sie, weshalb die maximale Stromstärke mit deutlicher zeitlicher Verzögerung erreicht wird.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms den ohmschen Widerstand und die Induktivität der Spule.







c) Die Spule wird nun durch Umschalten vom Netzgerät getrennt und über einen Widerstand kurzgeschlossen. Dabei wird der Verlauf der Stromstärke aufgezeichnet. Welches der drei Diagramme beschreibt den Verlauf der Stromstärke beim Ausschaltvorgang? Gib jeweils ein Argument, weshalb die beiden anderen Diagramme nicht in Frage kommen.

Lösung:

a) Nach dem Schließen des Schalters beginnt die Stromstärke in der Spule anzusteigen. Dabei nimmt die magnetische Flussdichte und damit auch der magnetische Fluss durch die Spule zu. Nach der lenzschen Regel wird eine Gegenspannung induziert, welche ihrer Ursache, also dem Anstieg der Stromstärke entgegenwirkt.

b) Widerstand aus Stromstärke am Ende: $R=\frac{U}{I}=\frac{10\,V}{0{,}8\,A}=\underline{\underline{12{,}5\Omega}}$

Bei t = 0 ist I = 0, die ganze Spannung fällt als induzierte Spannung an der Spule ab.

Man bestimmt mit einer Tangente die Steigung im t-I-Diagramm bei t = 0.

$$\dot{I}=\frac{\Delta I}{\Delta t}=\frac{1{,}05\,A}{0{,}06\,s}=\underline{17{,}5\,A/s}$$

$$|U_i|=L\cdot\dot{I} \;\rightarrow\; L=\frac{U}{\dot{I}}=\frac{10\text{V}}{17{,}5\,A/s}=\underline{\underline{0{,}57\,H}}$$

c) Diagramm (1) kommt nicht in Frage, weil wegen $U_R=I\cdot R$ die am Widerstand abfallende Spannung kleiner wird. Die Induktionsspannung muss ohne Netzgerät betragsmäßig genauso groß sein und deshalb müsste wegen $U_i=-L\cdot\dot{I}$ auch die Steigung im t-I-Diagramm betragsmäßig kleiner werden, was in Diagramm (1) nicht der Fall ist.

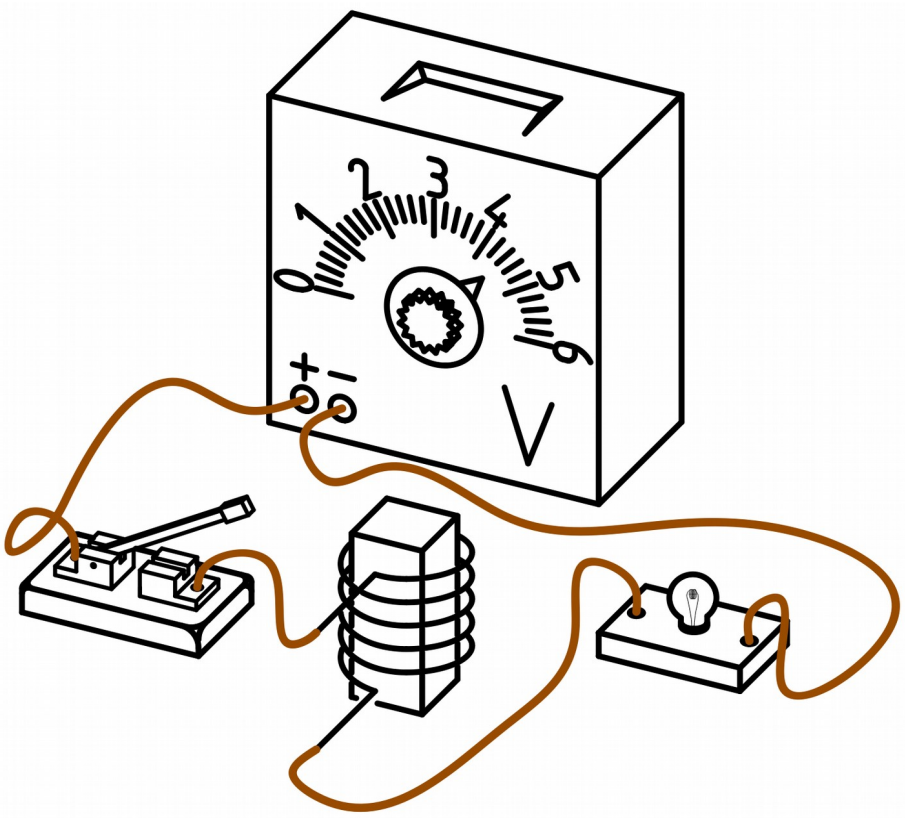
Diagramm (2) widerspricht der Energieerhaltung, weil hier nach dem Ausschalten die Energie nur als magnetische Energie in der Spule steckt und die bei diesem Diagramm wegen $E_{mag}=0{,}5\cdot L\cdot I^2$ nach dem Ausschalten größer wird.

Diagramm (3) ist richtig; Energie wird langsam an Widerstand abgegeben und Stromstärke sowie Steigung im t-I-Diagramm werden gleichzeitig betragsmäßig kleiner.

Aufgabe 10.200:

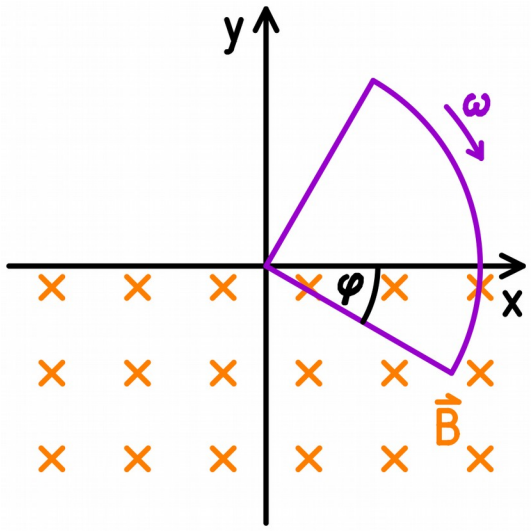
Wenn der Schalter im nebenstehenden Bild geschlossen wird, dann dauert es einige Zeit, bis die Glühbirne zu leuchten beginnt.

Erkläre diese Verzögerung.



10.7 Abi mit Lösung

Aufgabe 10.201: Abi 2000, modifiziert



Eine Leiterschleife hat die Form eines Kreissektors mit dem Mittelpunktswinkel 90° und dem Radius r. Sie rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω im Uhrzeigersinn um den Ursprung des eingezeichneten KOSY. Unterhalb der x-Achse befindet sich ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte B. Zur Zeit t = 0 ist der Winkel φ = 0. Die Umlaufdauer ist T.

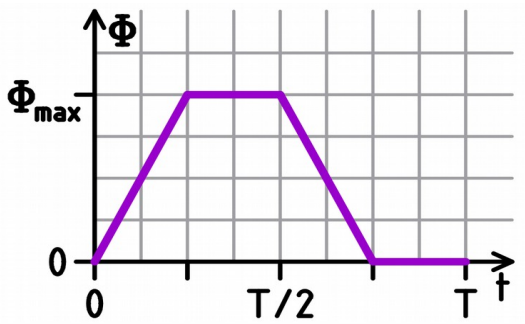
a) Stellen Sie in einem Diagramm den zeitlichen Verlauf des magnetischen Flusses durch die Leiterschleife und in einem zweiten Diagramm den Verlauf der in der Leiterschleife induzierten Spannung im Zeitintervall [0;T] dar. Skalieren Sie die Zeitachsen in Vielfachen von T. Die Skalierung der Fluss- und Spannungsachse ist beliebig.

Es seien nun B = 0,5 T, r = 10 cm und T = 20ms und der elektrische Widerstand der Leiterschleife 5,0 Ω.

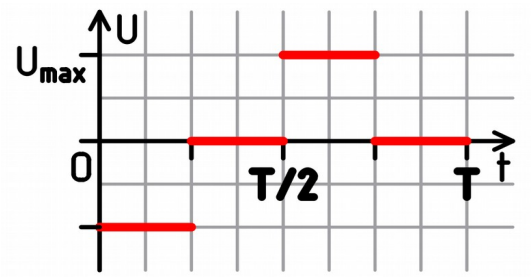
b) Berechnen Sie den Maximalwert für die induzierte Spannung. (Kontrolle: 0,785V)

c) Stellen Sie den zeitlichen Verlauf des in der Leiterschleife induzierten Stroms in Zeitintervall [0;T] in einem skalierten (Zahlenwerte) Diagramm dar.

Lösung:

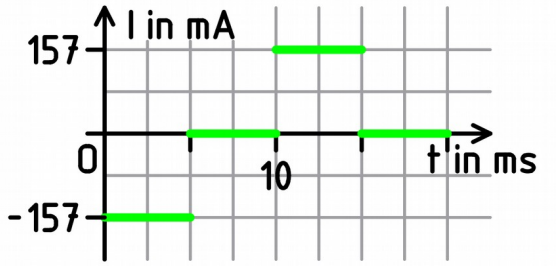


a) siehe Bilder



b) $U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\cdot\Delta A}{\Delta t} = \frac{-0{,}5\,T\cdot 0{,}25\cdot\pi\cdot 0{,}1^2\,m^2}{5\cdot 10^{-3}\,s} = \underline{\underline{-0{,}785\,V}}$ Maximalwert: 0,785V

c) siehe Bild



Aufgabe 10.202: Abi 1998

In einem homogenen Magnetfeld mit der Flussdichte B befindet sich eine flache Induktionsspule mit der Querschnittsfläche A = 40 cm² und der Windungszahl N = 500. Die Drehachse liegt in der Spulenebene und steht senkrecht auf den Feldlinien des Magnetfeldes. Wenn die Induktionsspule mit konstanter Frequenz f rotiert, wird in ihr eine sinusförmige Wechselspannung mit dem Scheitelwert Uo induziert.

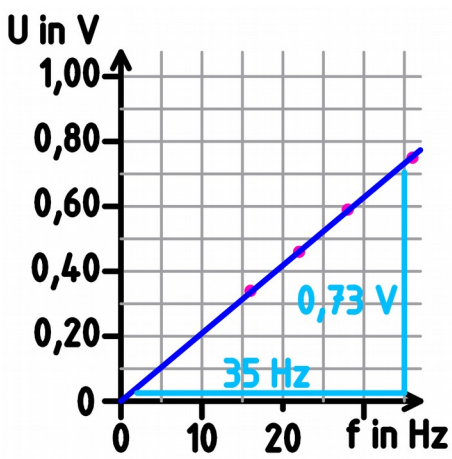
Indem f auf verschiedene Werte eingestellt wird, ermittelt man die folgende Messreihe:

f in Hz	16	22	28	36
Uo in V	0,34	0,46	0,59	0,75

a) Zeigen Sie durch graphische Auswertung, dass Uo zu f direkt proportional ist und ermitteln Sie den Wert des Proportionalitätsfaktors k.

b) Bestätigen Sie, ausgehend vom Induktionsgesetz, dass für den Proportionalitätsfaktor k aus Teilaufgabe a) gilt: k = 2π·N·A·B . Berechnen Sie B.

Lösung:



a) Da das Diagramm eine Ursprungsgerade gibt, ist die induzierte Spannung direkt Proportional zur Frequenz. Proportionalitätskonst. aus Steigung:

$$k=\frac{\Delta U}{\Delta t}=\frac{0{,}73\,V}{35\,Hz}=\underline{\underline{0{,}021\,Vs}}$$

b) Siehe auch Skript: Erzeugung sinusförmiger Wechselspannung (Zeichnung fehlt hier).

mit: $\omega=2\pi\cdot f$

$$A(t)=A_0\cdot\cos(\omega\cdot t)=A_0\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t)$$

$$\dot{A}(t)=A_0\cdot 2\pi\cdot f\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)$$

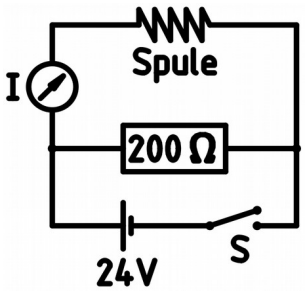
$$U_i=-N\cdot B\cdot\dot{A}(t)=-N\cdot B\cdot A_0\cdot 2\pi\cdot f\cdot\sin(2\pi\cdot f\cdot t)$$

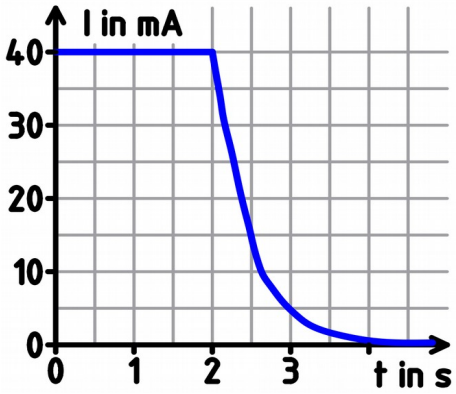
mit der Scheitelspannung: $U_0 = (N \cdot B \cdot A_0 \cdot 2\pi) \cdot f$

Damit ist der gesuchte Proportionalitätsfaktor gefunden.

$$0{,}021\,Vs = N \cdot B \cdot A_0 \cdot 2\pi \;\rightarrow\; B = \frac{0{,}021\,Vs}{N \cdot A_0 \cdot 2\pi} = \frac{0{,}021\,Vs}{500 \cdot 0{,}004\,m^2 \cdot 2\pi} = \underline{\underline{1{,}7\,mT}}$$

Aufgabe 10.203: Abi 1998





Die Abbildung zeigt eine Spule und den parallel geschalteten Widerstand R2 = 200 Ω. Sie sind an eine Batterie mit der Spannung U = 24 V angeschlossen. Zur Zeit t = 2,0 s wird der Schalter S geöffnet. Die vom eingezeichneten Messgerät angezeigte Stromstärke nimmt dann den im Diagramm dargestellten Verlauf.

a) Erklären Sie ausführlich unter Bezugnahme grundlegender physikalischer Gesetze, weshalb die Stromstärke I nicht sofort auf den Wert 0 abfällt.

b) Berechnen Sie den ohmschen Widerstand R1 der Spule (Bei Vernachlässigung des Innenwiderstands des Messgeräts).

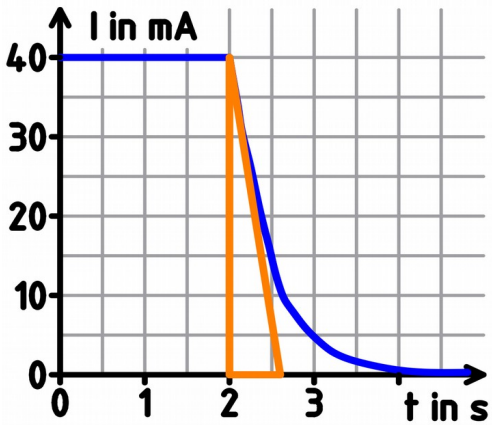
c) Die unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters S induzierte Spannung beträgt 32,0 V. Bestimmen Sie mit Hilfe des gegebenen t-I-Diagramms die zeitliche Änderungsrate dI/dt unmittelbar nach dem Öffnen des Schalters und berechnen Sie so einen Näherungswert für die Induktivität der Spule.

Lösung:

a) Durch das Abtrennen der Spannungsquelle sinkt die Stromstärke und damit die magnetische Flussdichte also der magnetische Fluss durch die Spule, weshalb in der Spule eine Spannung und - wegen des vorhandenen geschlossenen Stromkreises - ein elektrischer Strom induziert wird, der nach der Regel von Lenz dem absinken des magnetischen Flusses entgegenwirkt, also in der Spule dieselbe Richtung besitzt wie der vorher durch die Spannungsquelle aufrechterhaltene elektrische Strom. Deshalb kann die Stromstärke durch die Spule nur "langsam" sinken.

b) Das Amperemeter misst nur den Strom durch die Spule, deshalb muss die Parallelschaltung nicht berücksichtigt werden.

$$R_1 = \frac{U}{I} = \frac{24\,V}{0{,}040\,mA} = \underline{\underline{600\,\Omega}}$$



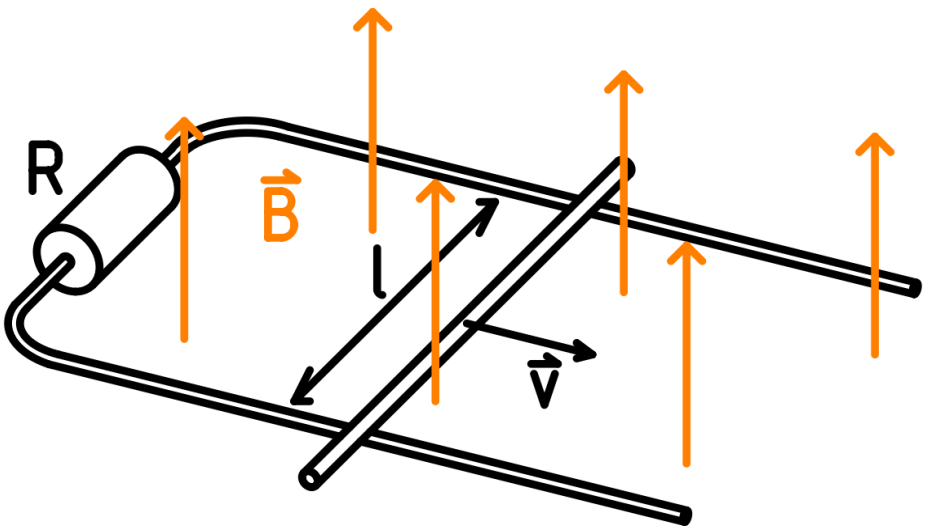
c) dI/dt aus Steigungsdreieck

$$\frac{dI}{dt} \approx -\frac{0{,}04\,A}{0{,}6\,s} = \underline{-0{,}067\,A/s}$$

Man beachte die negative Steigung! Induktivität aus dem Induktionsgesetz.

$$U_i = -L \cdot \dot{I} \;\rightarrow\; L = -\frac{U_i}{\dot{I}} = \frac{32\,V}{0{,}067\,A/s} = \underline{\underline{478\,H}}$$

Aufgabe 10.204: Abi 1999



Ein waagerecht angeordneter und auf der rechten Seite offener Drahtrahmen mit einer Breite von l = 10 cm wird von einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte B = 0,90 T senkrecht durchsetzt (siehe Bild). Ein Leiterstück liegt auf dem Drahtrahmen und wird durch eine äußere Kraft F mit der konstanten gehaltenen Geschwindigkeit v = 25 cm/s nach rechts bewegt. Der Widerstand im linken Teil des Drahtbügels besitzt den Wert R = 0,50 Ω, der Widerstand des restlichen Drahtbügels und des Leiterstücks sowie Kontaktwiderstände sind vernachlässigbar.

a) Bestimmen Sie unter Verwendung des Induktionsgesetzes die Spannung Ui, die zwischen den beiden Auflagepunkten des Leiterstücks induziert wird, sowie die Stärke I des im geschlossenen Kreis fließenden Stroms. (Kontrolle: I = 45 mA)

b) Berechnen Sie die Kraft, mit der am Leiterstück gezogen werden muss. Reibungskräfte sollen unberücksichtigt bleiben. (Kontrolle: F = 4,1 mN)

c) Bestimmen Sie die mechanische Arbeit Wm, die während der Zeitspanne Δt = 10 s verrichtet wird, und die im Widerstand R umgesetzte elektrische Energie ΔWel für diese Zeitspanne unter Verwendung der Ergebnisse der Teilaufgaben a) und b) . Vergleichen Sie die beiden Werte und interpretieren Sie das Ergebnis.

d) Zeigen Sie, dass für die magnetische Kraft F auf den Leiter gilt:

$$F=\frac{B^2\cdot l^2\cdot v}{R}$$

e) Der mit v = 25 cm/s bewegte Leiter wird nun losgelassen. Begründen Sie, warum die Geschwindigkeit des Leiters zeitlich nicht linear abnimmt und skizzieren Sie qualitativ das zugehörige t-v-Diagramm.

Lösung:

a) $U_i=B\cdot v\cdot l=0{,}9\,T\cdot 0{,}25\,m/s\cdot 0{,}1\,m=\underline{\underline{22{,}5\,mV}}$

$R=\frac{U}{I}$ → $I=\frac{U}{R}=\frac{0{,}0225\,V}{0{,}5\,\Omega}=\underline{\underline{45\,mA}}$

b) $F_L=B\cdot I\cdot l=0{,}90\,T\cdot 0{,}045\,A\cdot 0{,}10\,m=\underline{\underline{4{,}05\,mN}}$

c) $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ → $\Delta x=v\cdot\Delta t=0{,}25\,m/s\cdot 10\,s=\underline{2{,}5\,m}$

$W_m=F\cdot\Delta x=0{,}00405\,N\cdot 2{,}5\,m=\underline{10{,}1\,mJ}$

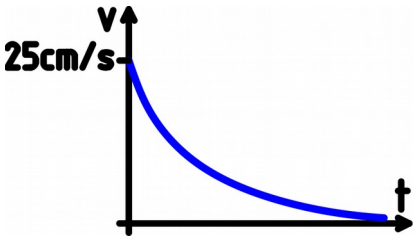
$\Delta W_{el}=P\cdot\Delta t=U\cdot I\cdot\Delta t=0{,}0225\,V\cdot 0{,}045\,A\cdot 10=\underline{10{,}1\,mJ}$

Wegen des Energieerhaltungssatzes sind beide Werte gleich.

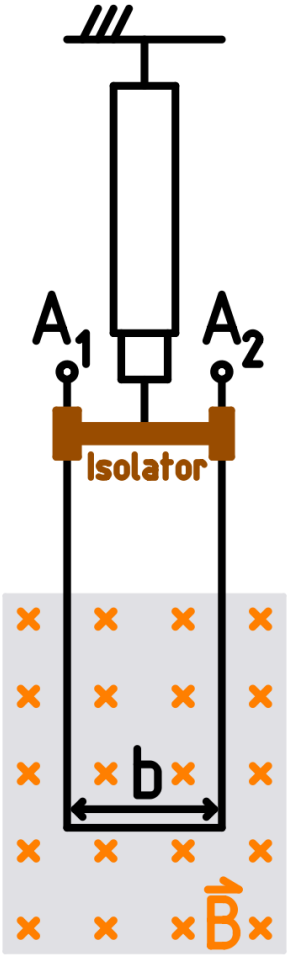
d) $U_i=B\cdot l\cdot v$; $I=\frac{U_i}{R}=\frac{B\cdot l\cdot v}{R}$

$F=B\cdot l\cdot I=B\cdot l\cdot\frac{B\cdot l\cdot v}{R}=\frac{B^2\cdot l^2\cdot v}{R}$

e) Wegen $\frac{\Delta v}{\Delta t}=a=-\frac{F}{m}=-\frac{B^2\cdot l^2}{R\cdot m}\cdot v$ ist die Steigung im t-v-Diagramm direkt proportional zum momentanen Wert der Geschwindigkeit. Je kleiner also die Geschwindigkeit, desto flacher das t-v-Diagramm. Wenn die Geschwindigkeit gegen Null geht, wird das t-v-Diagramm horizontal. Insbesondere gibt es keine Gerade.



Aufgabe 10.205: Abi 2000



In ein homogenes Magnetfeld taucht teilweise ein Leiterrahmen der Breibe b ein, der isoliert an einem auf null gestellten Kraftmesser hängt. Wird an die Anschlüsse A1 und A2 eine Gleichspannung angelegt, so wirkt auf den Leiterrahmen bei geeigneter Polung eine nach unten gerichtete Kraft F.

a) Geben Sie die Polung an und begründen Sie ihr Ergebnis.

b) Es werden zwei Messreihen durchgeführt:

➔ Bei einem Leitrrahmen der Breite b = 80 mm wird F in Abhängigkeit von der eingestellten Stromstärke I im Rahmen gemessen.

I in A:	2,0	|	4,0	|	6,0	|	8,0
F in mN:	0,34	|	0,68	|	1,03	|	1,37

➔ Nun wird die Kraft auf den Leiterrahmen verschiedener Breiten b gemessen. Die Stromstärke beträgt dabei im Rahmen jeweils I = 10 A.

b in mm:	80	|	40	|	20
F in mN:	1,71	|	0,86	|	0,42

Zeigen Sie, dass F direkt proportional zum Produkt aus Leiterstromstärke I und Rahmenbreite b ist. Ermitteln Sie den Wert des Proportionalitätsfaktors k.

c) Beschreiben Sie eine geeignete Variation des Experiments, mit der sich begründen lässt, dass sich die Konstante k aus Teilaufgabe b) zur Beschreibung der "Stärke" eines Magnetfeldes eignet.

d) Nach Abtrennung der Gleichspannungsquelle werden die Anschlüsse A1 und A2 über ein Amperemeter verbunden. Es entsteht eine geschlossene Leiterschleife mit dem ohmschen Widerstand R = 10 Ω. Die vom Magnetfeld der Flussdichte B = 2,1 mT durchsetzte Teilfläche hat einen Flächeninhalt von 100 cm². Welche Stromstärke wird gemessen, wenn das Magnetfeld innerhalb von 1,0 ms gleichmäßig auf null geregelt wird?

Lösung:

a) Bei A2 muss der Pluspol und bei A1 der Minuspol der Spannung angelegt werden, dann gilt mit der Dreifingerregel für die rechte Hand:

Daumen -> Stromrichtung nach links

Zeigefinger -> B-Feld in die Zeichenebene hinein

Mittelfinger -> Lorentzkraft nach unten

b) Tabelle 1, F/I in mN/A: 0,17 | 0,17 | 0,17 | 0,17

Tabelle 2, F/b in N/m: 0,021 | 0,021 | 0,021

Aus den beiden Quotientengleichheiten folgt F ~ I und F ~ b und damit F ~ I·b .

Proportionalitätsfaktor aus erstem Messwert:

$$F = k \cdot I \cdot l \;\rightarrow\; k = \frac{F}{I \cdot l} = \frac{0{,}34 \cdot 10^{-3}\,N}{2{,}0\,A \cdot 0{,}080\,m} = \underline{0{,}0021}$$

c) Das Experiment aus b) an vielen Magnetfelder wiederholen -> wenn sich in jedem Magnetfeld dieselbe Proportionalität zeigt, dann ist der Proportionalitätsfaktor eine geeignete Kennzahl zur Angabe der Stärke des Magnetfeldes.

Bemerkung: Hier gab es 5 Punkte !? Vielleicht sollte man noch Details der Versuchsbedingungen hinschreiben ? Siehe Abschnitt: Magnetische Flussdichte

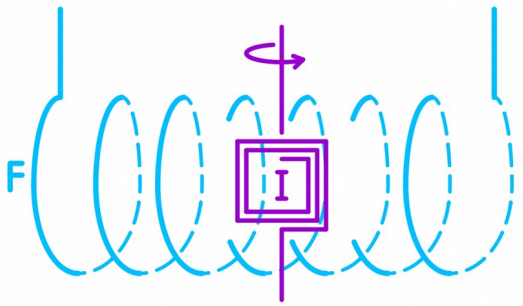
d) $$U_i = -A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -0{,}01\,m^2 \cdot \frac{-0{,}0021\,T}{0{,}001\,s} = \underline{0{,}021\,V}$$

$$R = \frac{U}{I} \;\rightarrow\; I = \frac{U}{R} = \frac{0{,}021\,V}{10\,\Omega} = \underline{2{,}1\,mA}$$

☠ Auf korrekten Umgang mit den Vorzeichen achten!

Aufgabe 10.206: Abi 2001

Das homogene Feld im Innern einer langen Feldspule F (Windungszahl 1200; Länge 30 cm) hat die Flussdichte 5,0 mT. Dort befindet sich eine drehbar gelagerte Induktionsspule I (Windungszahl 200; Querschnittsfläche 25 cm²), wobei Drehachse der Induktionsspule und Feldspulenachse senkrecht zueinander sind.



a) Berechnen Sie die Stromstärke in der Feldspule.

b) Beim Einschalten des Feldstroms stehen die Querschnittsflächen der Spulen senkrecht aufeinander. Ergibt sich hierbei eine Wirkung auf die Induktionsspule? Geben Sie eine kurze Begründung.

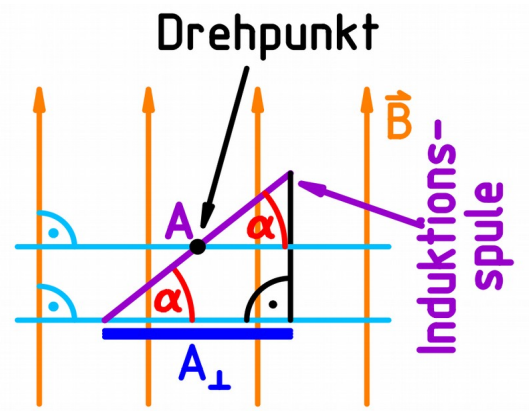
c) Nun soll durch Drehung der Induktionsspule eine sinusförmige Wechselspannung mit dem Scheitelwert Uo = 35 mV erzeugt werden. Wählen Sie hierzu für den Zeitpunkt t = 0 eine geeignete Anfangsstellung der Induktionsspule und leiten Sie den Term für die induzierte Spannung U(t) her. Berechnen Sie damit die Drehfrequenz.

Lösung:

a) $B=\mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l}$ → $I=\frac{B \cdot l}{\mu_0 \cdot N}=\frac{0{,}005\,T \cdot 0{,}3\,m}{4\pi \cdot 10^{-7}\,Vs/(Am) \cdot 1200}=\underline{\underline{0{,}995\,A}}$

b) Wenn die Querschnittsflächen senkrecht aufeinander stehen, gehen die Feldlinien der Feldspule nicht durch die Induktionsspule durch sonder nur daran vorbei. Der magnetische Fluss durch die Induktionsspule ändert sich also beim Einschalten nicht, und deshalb ergibt sich auch keine Wirkung auf die Induktionsspule.

c) Weil beim Ableiten vom Kosinus der Sinus kommt, muss die Anfangsstellung der Induktionsspule bei α = 0° sein. Bei t = 0 müssen die beiden Spulenachsen also parallel sein. Dann gilt:



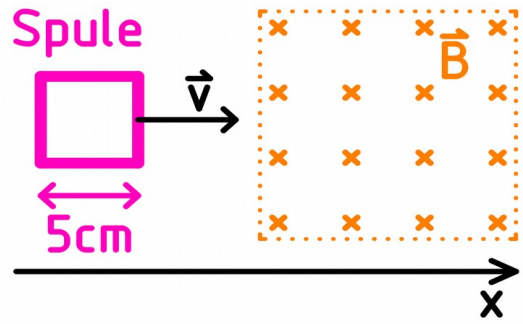
$$\alpha(t)=\omega \cdot t$$
$$A_\perp(t)=A \cdot \cos(\alpha)=A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
$$U_i=-B \cdot \dot{N} \cdot A_\perp(t)=B \cdot N \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Der Scheitelwert der Induzierten Spannung ist also Uo = B·N·A·ω

$$U_0=B \cdot N \cdot A \cdot \omega=B \cdot N \cdot A \cdot 2\pi \cdot f$$

$$f=\frac{U_0}{2\pi \cdot N \cdot A \cdot B}=\frac{0{,}035\,V}{2\pi \cdot 200 \cdot 0{,}0025\,m^2 \cdot 0{,}005\,T}=\underline{\underline{2{,}2\,Hz}}$$

Aufgabe 10.207: Abi 2002, modifiziert



Eine kleine Spule mit quadratischem Querschnitt, 20 Windungen und kurzgeschlossenen Spulenenden besitzt den ohmschen Widerstand 0,50 Ω. Sie bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v = 2,5cm/s in x-Richtung auf ein homogenes, scharf begrenztes Magnetfeld der Flussdichte 1,2 T zu.

a) Erklären Sie, weshalb ein Induktionsstrom in der Spule nur dann fließt, wenn diese in den vom Magnetfeld erfüllten Raum ein- bzw. austritt.

b) Berechnen Sie die Stärke I des Induktionsstroms. (Kontrolle: I = 60 mA)

c) Begründen Sie, weshalb während des Ein- bzw. Austritts eine Kraft auf die Spule wirkt, und geben Sie deren Richtung und Betrag an.

Die Spule befindet sich zum Zeitpunkt t = 0 in einer Entfernung von 2,5 cm vor der Grenze des Magnetfeldes.

d) Zeichnen Sie in je ein t-U-Diagramm den Verlauf der induzierten Spannung ...

i) ... wenn die Ausdehnung des Magnetfeldes in x-Richtung 10 cm beträgt.

ii) ... wenn die Ausdehnung des Magnetfeldes in x-Richtung 2,5 cm beträgt.

Lösung:

a) Eine Spannung - also ein Strom - wird nur induziert, wenn sich der magnetische Fluss durch den Spulenquerschnitt ändert. Nur während des Ein- bzw. Austretens aus dem B-Feld ändert sich die Größe der vom Magnetfeld durchdrungenen Querschnittfläche der Spule, also der magnetische Fluss durch die Spule, also wird auch nur dann eine Spannung - und also ein Strom - induziert.

b) $U_i = N \cdot B \cdot l \cdot v = 20 \cdot 1{,}2\,T \cdot 0{,}025\,m/s \cdot 0{,}05\,m = \underline{0{,}030\,V}$

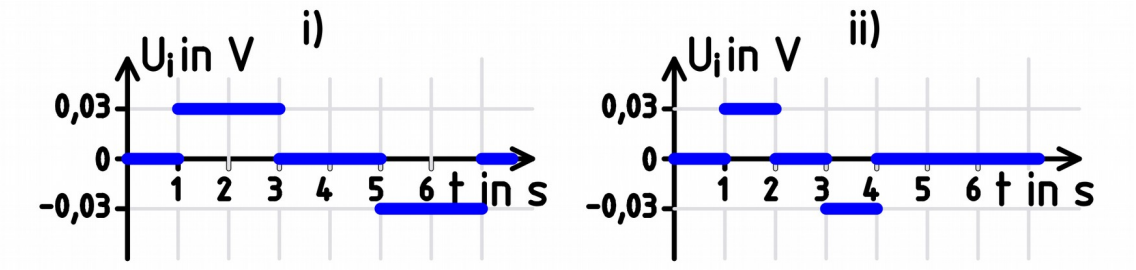
$R = \frac{U}{I} \rightarrow I = \frac{U}{R} = \frac{0{,}03\,V}{0{,}50\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}060\,A}}$

c) Nach der Regel von Lenz ist der induzierte Strom so gerichtet, dass er der Induktionsursache - hier also der Bewegung der Spule - entgegenwirkt. Die Bewegung muss

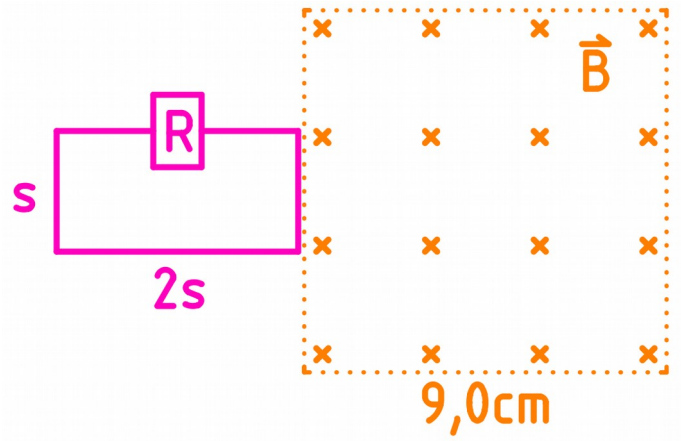
also durch eine Kraft entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung - also jeweils nach links - gebremst werden.

$$F_L = N \cdot B \cdot I \cdot l = 20 \cdot 1{,}2\,T \cdot 0{,}06\,A \cdot 0{,}05\,m = \underline{\underline{72\,mN}}$$

d)



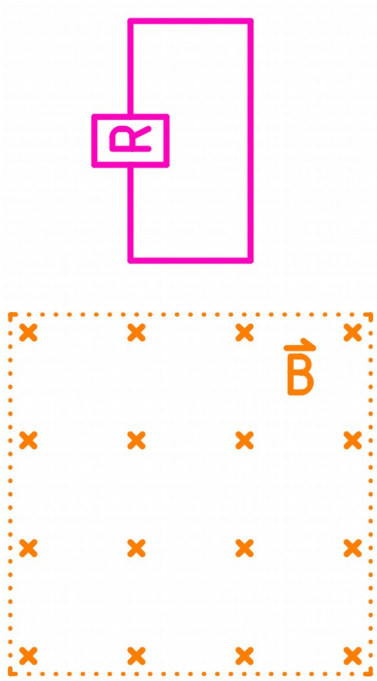
Aufgabe 10.208: Abi 2004



Ein homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte B = 0,8 T steht senkrecht zur Zeichenebene und ist dort auf ein quadratisches Gebiet der Kantenlänge 9,0 cm begrenzt. Durch dieses wird ein rechteckiger Drahtrahmen mit einem Widerstand R = 4,0 Ω (Abmessungen siehe Skizze, s = 3,0 cm) mit einer konstanten Geschwindigkeit von v = 1,5 cm/s von links nach rechts gezogen. Die Zeitmessung beginnt, wenn der rechte Rand des Drahtrahmens den Magnetfeldbereich berührt. Nach der Zeitspanne 12 s wird der Drahtrahmen in einer vernachlässigbar kleinen Zeit abgebremst, erneut beschleunigt und wiederum 12 s lang mit v = 1,5 cm/s in die entgegengesetzte Richtung bewegt.

a) Berechnen Sie die verschiedenen Induktionsspannungen, die im Zeitintervall zwischen t = 0 und t = 24 s am Widerstand R auftreten, und fertigen Sie ein t-U-Diagramm für diesen Zeitraum an.

b) Berechnen Sie die Beträge der Kräfte, die durch die Induktion während dieses Zeitraums auf den Drahtrahmen wirken, und geben sie deren Richtungen mit Begründung an.



c) Nun wird die Anordnung so aufgestellt, dass der Drahtrahmen mit dem Widerstand frei durch das Magnetfeld fallen kann.

ci) Erläutern Sie qualitativ, wie der Fall des Drahtrahmens durch das Magnetfeld beeinflusst wird. Die Magnetfeldlinien sollen dabei die Fläche des Drahtrahmens senkrecht durchsetzten.

cii) Welchen Einfluss auf die Bewegung hat eine Verdopplung des Widerstandswerts von R?

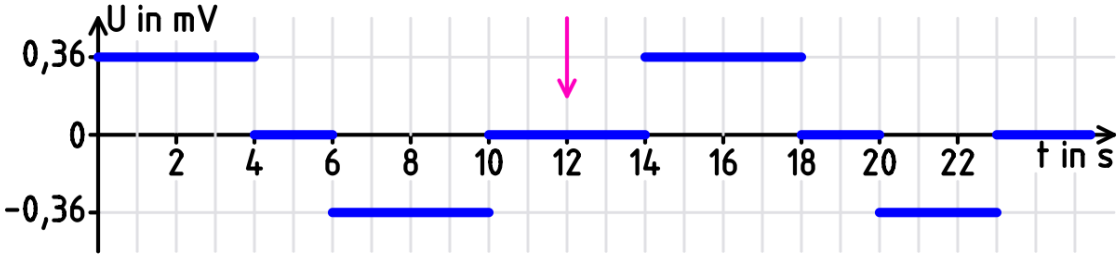
Lösung:

a) $U_i = B \cdot l \cdot v = 0{,}8\,T \cdot 0{,}03\,m \cdot 0{,}015\,m/s = \underline{0{,}36\,mV}$

Eine von Null verschiedene Induktionsspannung gibt es nur beim Eindringen und beim Austreten aus dem Magnetfeld; diese hat dann immer denselben Betrag.

Nach rechts: Eintreten 4,0s - Durchqueren 2,0s - Austreten 4,0s - Außerhalb 2,0s

Nach links dasselbe



b) Eine Kraft wirkt nur dann, wenn ein Induktionsstrom vorliegt, also wenn eine Spannung induziert wird. Die Bewegung ist die Ursache der Induktion, deshalb ist die Kraft immer entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung (Regel von Lenz). Bei Vorliegen einer Kraft ist der Betrag immer gleich groß.

$$F = B \cdot I \cdot s = B \cdot \frac{U}{R} \cdot s = 0{,}80\,T \cdot \frac{0{,}36 \cdot 10^{-3}\,V}{4{,}0\,\Omega} \cdot 0{,}03\,m = \underline{2{,}16\,\mu N}$$

$0 \leqslant t \leqslant 4{,}0\,s$ und $6{,}0\,s \leqslant t \leqslant 10{,}0\,s$: Kraft nach links

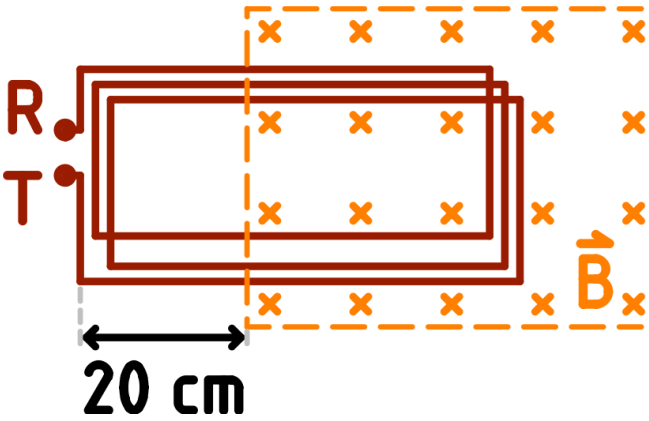
$14\,s \leqslant t \leqslant 18\,s$ und $20\,s \leqslant t \leqslant 24\,s$: Kraft nach rechts

ci) Beim Eintreten in das Magnetfeld und beim Austreten tritt eine Kraft gegen die Bewegungsrichtung auf, welche die Beschleunigung durch die Gewichtskraft verringert oder - abhängig von der Masse des Drahtrahmens - sogar bremst.

cii) doppelter Widerstand -> halber Induktionsstrom -> halb so große bremsende Kraft ; Dies gilt jedoch nicht für die ganze Fallstrecke, weil durch die verringerte Bremswirkung die Geschwindigkeit und deshalb auch die Induktionsspannung größer wird. In jedem Fall jedoch verringerte Bremswirkung.

<u>Aufgabe 10.209: Abi 2007</u>

Eine rechteckige Spule (Länge 80 cm, Breite 30 cm) mit 10 Windungen ist auf einem Wagen gelagert, der sich in der Zeichenebene reibungsfrei bewegen kann. Ein Teil der Spulenfläche wird senkrecht von einem homogenen, begrenzten Magnetfeld durchsetzt. Die nebenstehende Skizze zeigt die Sicht von oben. Zunächst wird der Wagen festgehalten.



a) Die magnetische Flussdichte steigt im Zeitintervall 0 bis 4,0 s linear von 0 bis 0,80 T an. Berechnen Sie für dieses Zeitintervall die zwischen den Spulenenden R und T auftretende Induktionsspannung Ui.

b) Die Spulenenden R und T sind nun leitend verbunden, der Wagen wird immer noch festgehalten. Die magnetische Flussdichte ändert sich wie in Teilaufgabe a). Wie groß ist die Stromstärke während des Anwachsens der Flussdichte, wenn die Spule den Widerstand 2,0 Ω besitzt? Begründen Sie, dass sich die Elektronen im Uhrzeigersinn bewegen.

c) Nun wird der Wagen nicht mehr festgehalten. Die Experimente aus a) und b) werden wiederholt. Begründen Sie, dass sich am Ergebnis von Teilaufgabe a) nichts ändert. Welche Beobachtung erwarten Sie für das Experiment mit dem Aufbau von Teilaufgabe b) (R und T leitend verbunden)?

Lösung:

a) $U_i = -N \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -10 \cdot 0{,}8\,m \cdot 0{,}3\,m \cdot \frac{0{,}8\,T}{4{,}0\,s} = \underline{\underline{0{,}48\,V}}$

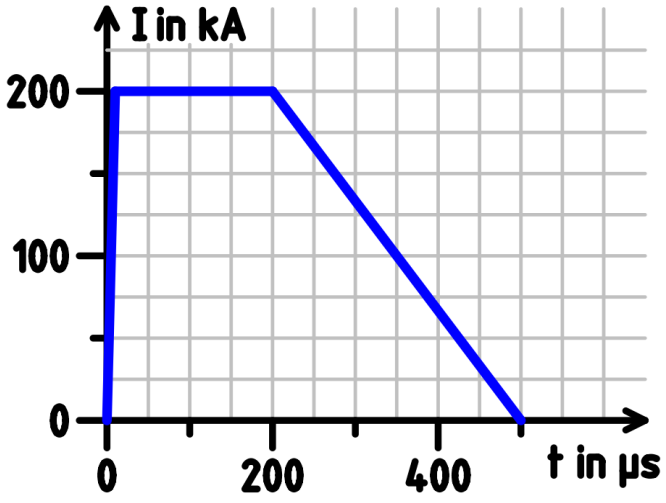
b) $R = \frac{U}{I} \rightarrow I = \frac{U}{R} = \frac{0{,}48\,V}{2{,}0\,\Omega} = \underline{\underline{0{,}24\,A}}$

Der magnetische Fluss des externen Magnetfeldes zeigt in die Zeichenebene hinein und wird stärker -> deshalb muss der magnetische Fluss des induzierten Stroms aus der Zeichenebene heraus zeigen (er muss nämlich der Veränderung entgegenwirken; Regel von Lenz) -> deshalb muss der induzierte Strom gegen den Uhrzeigersinn fließen (Rechte-Hand-Regel für Spulen) -> also müssen sich die Elektronen im Uhrzeigersinn bewegen.

c) Beim Experiment a) ist kein geschlossener Stromkreis vorhanden, deshalb wird kein Strom induziert, sonder nur eine Spannung. Da es keine Strom gibt, gibt es auch keine b e w e g t e n Ladungen in der Spule, die eine Veränderung hervorrufen könnten.

Bei b) fließt ein Strom gegen den Uhrzeigersinn, also in den rechten Leiterstücken der Spule nach unten. Nach der Rechte-Hand-Regel wirkt auf diese Leiterstücke eine Lorentzkraft nach links. Beobachtung -> die Spule wird aus dem Magnetfeld hinaus geschoben.

Aufgabe 10.210: Abi 2009



Nebenstehend ist das t-I-Diagramm einer vereinfachten Blitzentladung ("Norm-Blitz") in einer Gewitterregion abgebildet. Die Anstiegszeit der Stromstärke beträgt 10 µs.

a) Zeigen Sie mithilfe des Diagramms, dass ein Norm-Blitz etwa die Ladung 70 C transportiert.

Der Entladestrom I ist wie ein stromdurchflossener Draht von einem Magnetfeld umgeben. Für die magnetische Flussdichte B im Abstand r vom Entladestrom gilt:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

b) Berechnen Sie die maximale Flussdichte B, die sich in 50 m Abstand vom Normblitz ergibt. Entnehmen Sie dazu benötigte Daten dem Diagramm. (Kontrolle: B = 0,80 mT)

In der Umgebung eines Blitzes können an spannungsempfindlichen Elektrogeräten Schäden durch Induktion auftreten. Gehen Sie davon aus, dass sich in 50 Metern Entfernung vom Normblitz eine kreisförmige Spule der Querschnittsfläche 2,0 cm² mit 1200 Windungen befindet.

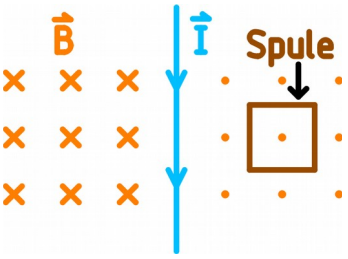
c) Bei welcher Orientierung der Spule ergibt sich die größte Induzierte Spannung, wenn die Blitzentladung senkrecht zur Erdoberfläche verläuft? Begründen Sie ihre Antwort.

d) Berechnen Sie den Betrag der mittleren induzierten Spannung, die in den ersten 10 µs des Normblitzes induziert wird.

Lösung:

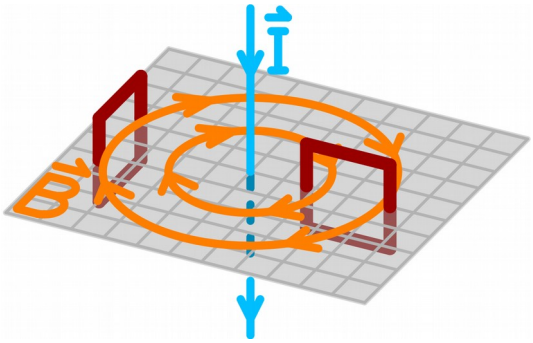
a) Trapezfläche: $\Delta Q = \frac{1}{2} \cdot (500 \cdot 10^{-6} s + 190 \cdot 10^{-6} s) \cdot 200 \cdot 10^{3} A = \underline{\underline{69\,C \approx 70\,C}}$

b) $B = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} Vs/Am \cdot \frac{200 \cdot 10^{3} A}{2 \cdot \pi \cdot 50\,m} = \underline{\underline{0{,}80\,mT}}$



c) Maximale Spannung bei maximalem magnetischen Fluss durch die Spule (<- dann auch maximale Flussänderung); dazu muss die Spulen-Querschnittfläche senkrecht zu den magnetischen Feldlinien stehen; die Spulen-Querschnittfläche muss also vertikal stehen und der Blitz muss in der Ebene der Spulen-Querschnittfläche liegen.

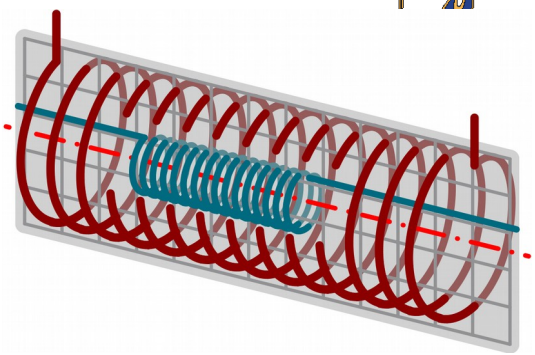
Bemerkung: Wenn Sie einfach nur sagen, dass die Spulen-Querschnittfläche vertikal stehen muss, bzw. dass die Spulenachse horizontal liegen muss reicht das nicht. Wie man am Bild erkennt, geht durch die linke Spule gar kein magnetischer Fluss. Man muss also sagen, dass der Blitz in der Ebene der Spulen-Querschnittfläche liegen muss.



d) $U_i = -N \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = -1200 \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2 \cdot \frac{0{,}80 \cdot 10^{-3} T}{10 \cdot 10^{-6} s} = \underline{\underline{-19{,}2\,V}}$

Mittlere induzierte Spannung beträgt also 19 Volt.

Aufgabe 10.211: Abi 2009; Induktion in einer langgestreckten Spule



Im Innern einer langgestreckten, zylinderförmigen Feldspule (Länge l1 = 750 mm, N1 = 1460; A1 = 45,0 cm²) befindet sich eine Induktionsspule (l2 = 105 mm, N2 = 200, A2 = 20,25 cm²), deren Enden mit einem Spannungsmessgerät verbunden sind (nicht eingezeichnet). Beide Spulen sind zueinander parallel.

a) Erläutern Sie jeweils ausführlich, welche Wirkungen folgende Experimente in der Induktionsspule hervorrufen:

i) Durch die Feldspule fließt ein sinusförmiger Wechselstrom.

ii) In der Feldspule fließt ein Gleichstrom konstanter Stärke, während die Induktionsspule in Richtung ihrer Spulenachse im Innern der Feldspule hin und her bewegt wird.

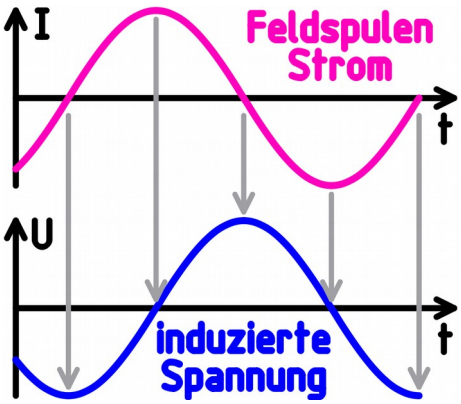
Durch die Feldspule fließt nun ein Gleichstrom der Stärke I = 3,0 A.

b) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte B im Innern der Feldspule bei dieser Stromstärke. (Kontrolle: B = 7,3 mT)

c) Die Feldspule wird innerhalb von 0,50 Sekunden auf die doppelte Länge auseinander gezogen, wobei die Induktionsspule ihre Form und Position beibehält. Begründen Sie ausführlich, weshalb in der Induktionsspule eine Spannung induziert wird. Berechnen Sie den Wert dieser Induktionsspannung.

Lösung:

a) Zwei Teile



i) Wenn sich in der Feldspule permanent die Stromstärke ändert, dann ändert sich auch permanent die magentische Flussdichte und damit der magnetische Fluss in der Induktionsspule. Deshalb wird in der Induktionsspule permanent eine Spannung induziert.

Wenn die Veränderungsrate der Feldspulen-Stromstärke maximal ist (d.h. wenn der Feldspulenstrom gerade Null ist), dann ist die induzierte Spannung maximal. Wenn die Steigung im t-I-Diagramm der

Feldspulen-Stromstärke gleich Null ist, dann ist die induzierte Spannung auch gerade gleich Null, siehe Bild.

ii) Wenn die Induktionsspule in Richtung der Spulenachse bewegt wird, dann wird sie automatisch auch in Richtung der Feldlinien des homogenen Magnetfeldes der Feldspule bewegt. Deshalb ändert sich die Anzahl der magnetischen Feldlinien durch die Induktionsspule bei dieser Bewegung nicht und es wird keine Spannung induziert. Im Experiment wird wahrscheinlich eine kleine Spannung induziert, die sich auf die leichte Inhomogenität des Magnetfeldes oder ein leichtes Verdrehen der Induktionsspule bei dieser Bewegung zurückführen lässt.

b) $B=\mu_0 \cdot I \cdot \frac{N}{l}=4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\,Vs/Am\cdot 3{,}0\,A\cdot\frac{1460}{0{,}75\,m}=\underline{\underline{7{,}3\,mT}}$

c) Wegen $B=\mu_0 \cdot I \cdot N \cdot \frac{1}{l}$ ist die magnetische Flussdichte in der Feldspule indirekt proportional zur Länge der Feldspule (<- bei konstanter Stromstärke). Deshalb ändert sich beim Auseinanderziehen die magnetische Flussdichte (sinkt auf die Hälfte) und damit der magnetische Fluss durch die Induktionsspule, wodurch eine Spannung induziert wird.

Die magnetische Flussdichte sinkt auf die Hälfte, deshalb ist die Veränderung der Flussdichte -3,67 mT.

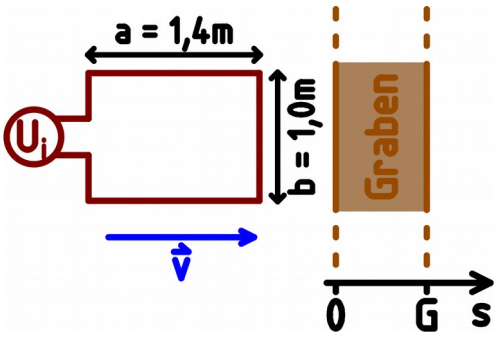
$$U_i=-N\cdot A\cdot\frac{\Delta B}{\Delta t}=-200\cdot 20{,}25\cdot 10^{-4}\,m^2\cdot\frac{-3{,}67\cdot 10^{-3}\,T}{0{,}5\,s}=\underline{\underline{29{,}7\,V}}$$

Aufgabe 10.212: Abi 2010; Erdmagnetfeld und Archäologie

Eine Untersuchung des Erdmagnetfeldes ist für verschiedene Wissenschaften aufschlussreich.

a) Die Flussdichte des Erdmagnetfeldes kann zum Beispiel mithilfe einer Hallsonde bestimmt werden. Erklären Sie das Zustandekommen einer Hallspannung anhand einer Skizze und zeigen Sie, dass die Hallspannung direkt proportional zur magnetischen Flussdichte B ist.

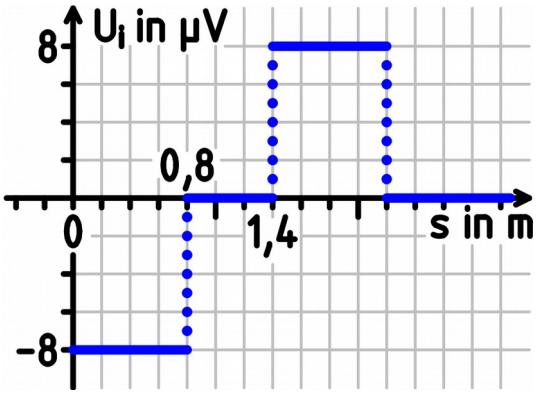
In der Archäologie lassen sich durch Analyse des Erdmagnetfeldes die Grundrisse ehemaliger Bebauungen ermitteln, da zum Beispiel Material, das zur Auffüllung eines Grabens verwendet wurde, eine lokale Veränderung des Magnetfeldes verursachen kann. Ein mögiches Verfahren, diese Veränderung nachzuweisen, ist das folgende:



Eine flache, rechteckige Spule (Maße siehe Bild) wird als liegende Induktionsschleife mit konstanter Geschwindigkeit über das Gelände bewegt.

Dabei misst man die Induktionsspannung Ui und ermittelt für einen alten, verschütteten Graben von einer Breite G = 0,80 m einen Verlauf von Ui wie im untenstehenden Diagramm dargestellt. Die magnetische Flussdichte im Bereich des Grabens soll dabei als homogen vorausgesetzt werden.

b) Erläutern Sie knapp, unter welchen Bedingungen in einer Spule eine Spannung induziert wird, und erklären Sie damit den Verlauf der Induktionsspannung in nebenstehendem Diagramm.

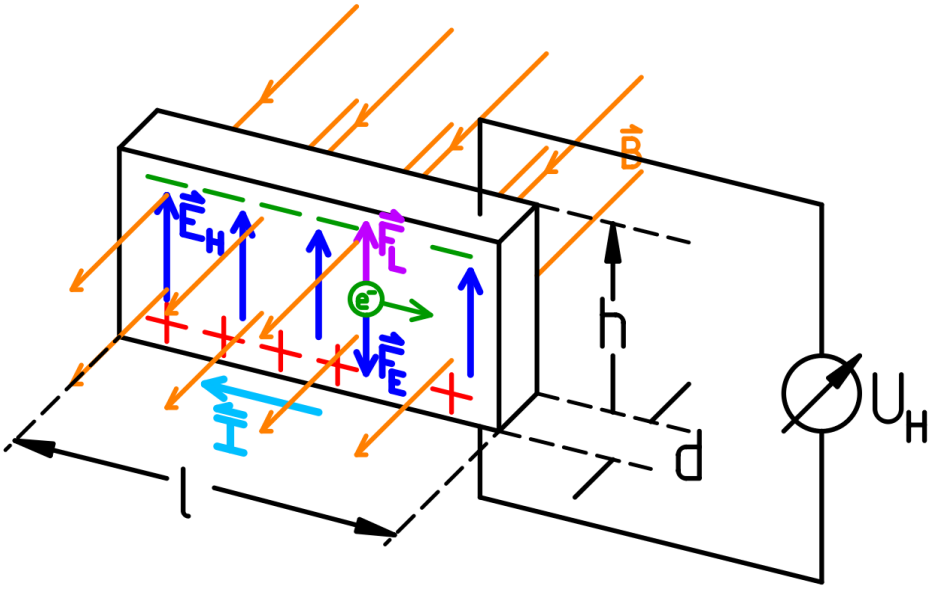


In einem zweiten Versuch wird ein quadratischer Drahtrahmen mit Seitenlänge 0,50 m mit der gleichen Geschwindigkeit v über den Graben geführt.

c) Zeichnen Sie das zu erwartende s-Ui-Diagramm für diesen Fall in ein geeignetes Koordinatensystem und erläutern Sie, wie die Breite des Grabens auch mit einer kleineren Spule bestimmt werden kann.

Lösung:

a) Voraussetzung für das Entstehen einer Hallspannung ist ein stromdurchflossenes Leiterstück, das senkrecht zur Stromrichtung von einem Magnetfeld durchsetzt wird. Im Bild fließt der Strom nach links, was bedeutet, dass sich die Elek-



tronen nach rechts bewegen. Auf die Elektronen wirkt eine Lorentzkraft nach oben wodurch sich am oberen Leiterrand Elektronen sammeln. Dadurch wird der obere Leiterrand negativ und der untere Leiterrand durch Defektladung positiv geladen. Durch die Ladungen entsteht ein elektrisches Feld im Leiter, dass eine elektrische Kraft auf die Elektronen nach unten verursacht. Wenn elektrische Kraft und Lorentzkraft gleich groß sind endet die Ladungstrennung, das elektrische Feld (Hallfeld) hat seine Gleichgewichtsstärke erreicht. Das elektrische Feld verursacht wegen U = E·h eine Spannung (Hallspannung) zwischen dem oberen und dem unteren Leiterrand, die gemessen werden kann.

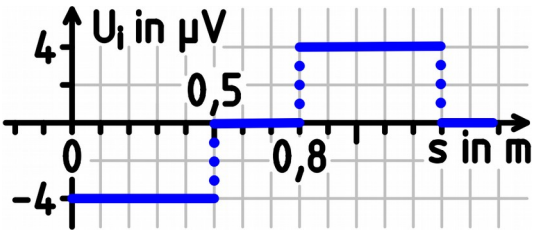
$$E_H \cdot e = e \cdot v \cdot B \;\rightarrow\; E_H = v \cdot B \;\rightarrow\; U_H = E_H \cdot h = v \cdot B \cdot h = (v \cdot h) \cdot B$$

Bei konstanter Stromstärke ist die Driftgeschwindigkeit v der Elektronen konstant und die Hallspannung ist direkt proportional zur Flussdichte mit Proportionalitätskonstante (v·h).

b) In einer Spule wird genau dann eine Spannung induziert, wenn der magnetische Fluss durch die Spule sich verändert.

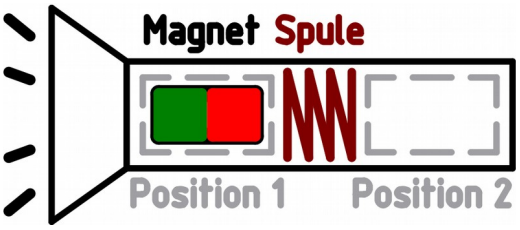
Im Beispiel nimmt der magnetische Fluss auf den ersten 0,8 m zu, weil die Spule in das Magnetfeld des Grabens eindringt, wodurch eine Spannung induziert wird. Auf den nächsten 0,60 m kommen keine neuen magnetischen Feldlinien hinzu, weil der rechte Rand des Grabens erreicht ist und es verlassen auch keine magnetischen Feldlinien die Spule, weil das linke Ende der Spule den linken Rand des Grabens noch nicht erreicht hat, hier wird also keine Spannung induziert. Auf den nächsten 0,80 m überstreicht das linke Ende der Spule den Graben und die magnetischen Feldlinien des Grabens verlassen die Spule wodurch der magnetische Fluss durch die Spule sinkt und wieder eine Spannung induziert wird.

Die Spannung beim Verlassen des Grabens hat entgegengesetztes Vorzeichen zur Spannung beim Eintreten in den Graben, weil beim Verlassen der magnetische Fluss sinkt und beim Eintreten der magnetische Fluss steigt.



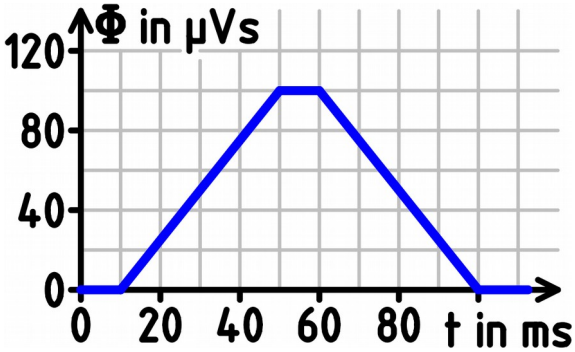
c) Wenn die zweite Spule dieselbe Windungszahl hat, ist die Spannung nur halb so groß, weil die Spule nur halb so breit ist. Die Breite bestimmt man immer auf dieselbe Art. Von Beginn der Induktionsspannung bis zum Ende der entgegengesetzten Induktionsspannung überstreicht man Grabenbreite plus Spulenlänge. Im zweiten Beispiel ist also die Grabenbreite 1,3 m - 0,5 m = 0,8 m.

Aufgabe 10.213: Abi 2011; Induktionstaschenlampe



In einer Induktionstaschenlampe wird ein Permanentmagnet mittels Hin- und Herschütteln durch eine Spule (N = 1500) hindurch bewegt. Die dabei erzeugte Induktionsspannung wird gleichgerichtet und zum Laden eines Kondensators mit der Kapazität C = 1,5 F genutzt.

a) Zunächst wird die Bewegung des Magneten von Position 1 nach Position 2 betrachtet. Als Näherung für den zeitlichen Verlauf des magnetischen Flusses Φ in der Spule soll nebenstehendes t-Φ-Diagramm verwendet werden. Berechnen Sie die Beträge der induzierten Spannungen Ui und zeichnen Sie ein entsprechendes t-Ui-Diagramm.



Am Kondensator liegt nach mehrfachem Schütteln die Spannung U = 3,0 V an.

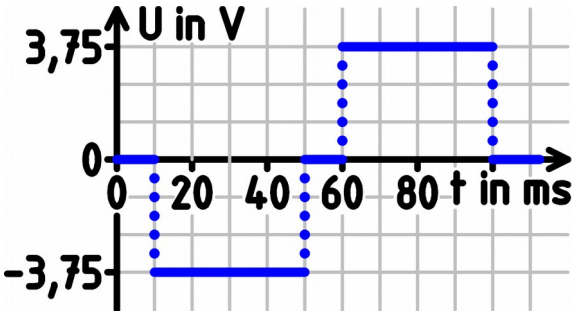
b) Berechnen Sie die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie, sowie die Größe der im Kondensator gespeicherten Ladung. (Kontrolle: E = 6,8 J)

c) Durch die Entladung des Kondensators wird eine Leuchtdiode betrieben. Dem Kondensator wird hierzu eine mittlere Leistung von P = 20 mW entnommen. Die Diode leuchtet nur, wenn die Kondensatorspannung mindestens 1,5 V beträgt. Schätzen Sie damit rechnerisch die Leuchtdauer der Diode ab.

Lösung:

a) $$|U_i| = N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 1500 \cdot \frac{100 \cdot 10^{-6}\,Vs}{40 \cdot 10^{-3}\,s} = \underline{3{,}75\,V}$$

Die Beträge der Steigungen im t-Φ-Diagramm sind beim Steigen und Fallen gleich. Bei steigendem t-Φ-Diagramm ist die Induktionsspannung wegen der Regel von Lenz negativ, bei fallendem t-Φ-Diagramm positiv.



b) $$E_{el} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5\,F \cdot (3{,}0\,V)^2 = \underline{6{,}75\,J}$$

$$Q = C \cdot U = 1{,}5\,F \cdot 3{,}0\,V = \underline{\underline{4{,}5\,As}}$$

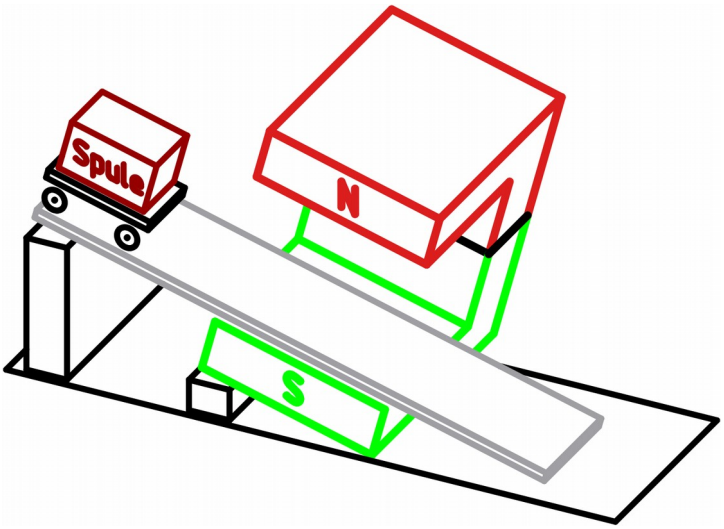
c) Bei halber Spannung hat der Kondensator wegen E ~ U² noch ein Viertel seiner Energie, drei Viertel können also genutzt werden.

$$P=\frac{\Delta E}{\Delta t} \rightarrow \Delta t=\frac{\Delta E}{P}=\frac{0{,}75\cdot 6{,}75 J}{20\cdot 10^{-3} W}=\underline{\underline{253\, s \approx 4\, min}}$$

Die Lampe geht also ca. 4 min. lang.

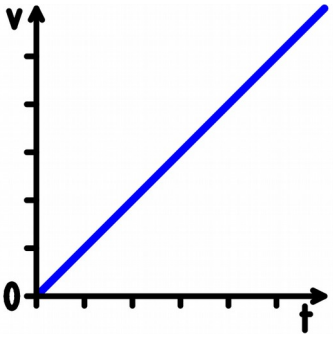
<u>Aufgabe 10.214: G8 Muster-Abi 2010; Bewegung im Magnetfeld</u>

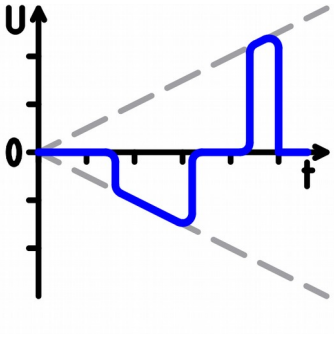
Auf einem Laborwagen aus Kunststoff liegt eine quaderförmige Spule. Der Wagen rollt eine schiefe Ebene hinunter und durchquert dabei ein Magnetfeld, das senkrecht zur schiefen Ebene gerichtet ist. Für die folgenden Betrachtungen kann davon ausgegangen werden, dass das Magnetfeld ausschließlich zwischen den beiden Polen existiert und homogen ist. Die Reibung kann vernachlässigt werden.



a) Begründen Sie kurz, bei welcher Orientierung der Spule sich Induktionseffekte ergeben.

b) Die Anschlüsse der Spule sind nicht verbunden. Die nebenstehenden Diagramme zeigen die Geschwindigkeit v des Wagens bzw. die induzierte Spannung U, die an den Anschlüssen abgegriffen werden kann, in Abhängigkeit von der Zeit t. Beschreiben und erklären Sie das Zustandekommen der Diagramme.





c) Jetzt wird an die Anschlüsse der Spule ein Strommessgerät angeschlossen und der Vorgang wiederholt. Beschreiben Sie qualitativ, was sich an der Bewegung des Wagens gegenüber Teilaufgabe b) ändert. Für welche Zeitbereiche erwarten Sie einen Ausschlag des Strommessgeräts?

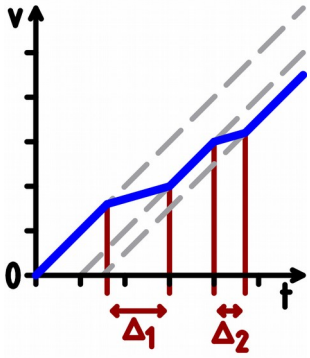
Lösung:

a) Damit es zu Induktion kommt, muss sich der magnetische Fluss durch die Spulenflächen verändern, dass Magnetfeld muss also durch die Spulenflächen hindurch fließen. Dazu darf die Spulenachse nicht senkrecht zum Magnetfeld stehen, in jeder anderen Stellung ergeben sich Induktionseffekte. Bei der quaderförmigen Spule wird man die Spulenachse parallel zu den magnetischen Feldlinien ausrichten, also senkrecht zur schiefen Ebene, dann wird die induzierte Spannung maximal.

b) Das t-v-Diagramm ist eine Ursprungsgerade, die Geschwindigkeit ist also proportional zur vergangenen Zeit. Da die Spulenanschlüsse nicht verbunden sind kann kein Strom fließen. Deshalb gibt es auch keine Lorentzkraft. Die einzige wirkende Kraft ist also die konstante Gewichtskraft (bzw. Hangabtriebskraft) auf den Wagen. Da die Kraft auf den Wagen konstant ist, ist auch die Beschleunigung konstant ($F = m \cdot a$). Wegen der konstanten Beschleunigung ergibt sich die Ursprungsgerade.

Das t-U-Diagramm zeigt zu Anfang keine induzierte Spannung, weil sich die Spule noch vollständig außerhalb des Magnetfeldes befindet. Beim Eindringen in das Magnetfeld steigt der magnetische Fluss durch die Spule und es wird eine negative Spannung induziert. Sobald sich die Spule vollständig im Magnetfeld befindet ändert sich der magnetische Fluss nicht mehr und es wird keine Spannung mehr induziert. Bei Austreten aus dem Magnetfeld wird eine entgegengesetzt gerichtete Spannung induziert, weil der magnetische Fluss jetzt nicht größer wird wie beim Eintreten sondern immer kleiner. Der Spannungsstoß beim Austreten ist zeitlich kürzer und die induzierte Spannung ist betragsmäßig größer als beim Eintreten, weil die Spule beim Austreten eine höhere Geschwindigkeit hat. Da die induzierte Spannung proportional zur Geschwindigkeit ist ($U_i = -N \cdot v \cdot b \cdot B$), ist im Falle des Vorhandenseins der Betrag der induzierten Spannung proportional zur verstrichenen Zeit t, was durch die gestrichelten Hilfslinien angedeutet wird.

c) Beim Eindringen in das Magnetfeld und beim Austreten aus dem Magnetfeld wird die Beschleunigung des Wagens jetzt jeweils kleiner werden (siehe Bild), je nach konkreten Bedingungen könnte der Wagen sogar gebremst werden. Das Eintreten und Austreten wird jeweils auch länger dauern als vorher. Beim Eintreten in das Magnetfeld und beim Austreten aus dem Magnetfeld, also in den Zeitintervallen $\Delta 1$ und $\Delta 2$ wird das Strommessgerät ausschlagen.

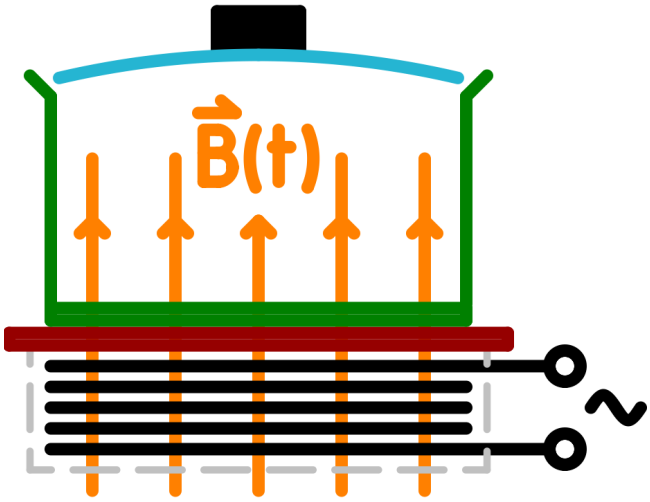


Bemerkung: Man kann jetzt nicht mehr mit Sicherheit behaupten, dass das Austreten schneller geht, als das Eintreten, weil der Wagen ja

evtl. gebremst wird und deshalb beim Austreten evtl. eine kleinere Geschwindigkeit hat als beim Eintreten.

Aufgabe 10.215: Abi 2012; Induktionskochfeld

Bei einem Induktionskochfeld durchsetzt ein magnetisches Wechselfeld der Flussdichte B(t) = Bo·sin(ω·t) einen metallischen Topfboden.



a) Erklären Sie, warum sich der Boden eines Eisentopfes, der auf dem eingeschalteten Kochfeld steht. erwärmt.

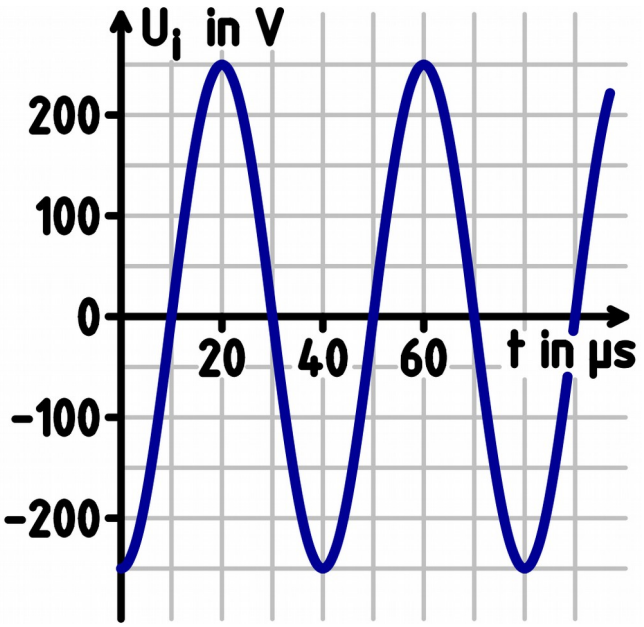
Nun wird anstelle des Topfes eine Induktionsspule mit N = 500 Windungen so auf das eingeschaltete Kochfeld gelegt, dass ihre Querschnittfläche der Größe A = 30 cm² vollständig und senkrecht vom Magnetfeld durchsetzt wird.

b) Zeigen Sie, dass zwischen den Enden der Spule eine Induktionsspannung mit

$$U_i = -N \cdot A \cdot B_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

entsteht.

c) Ein an die Spule angeschlossenes Oszilloskop zeigt den nebenstehenden zeitlichen Verlauf der Induktionsspannung Ui(t). Ermitteln Sie zusammen mit dem Ergebnis der Teilaufgabe 3.b) den Scheitelwert Bo des magnetischen Wechselfeldes.



d) Begründen Sie, weshalb zur Erzeugung hoher Induktionsspannungen bei Induktionskochfeldern Wechselspannungen im kHz-Bereich und nicht solche mit der Frequenz 50 Hz der Netz-Wechselspannung verwendet werden.

Lösung:

a) Weil sich der magnetische Fluss durch den Topfboden ständig verändert, wird permanent eine Spannung induziert und weil der Topfboden elektrisch leitend ist, werden auch Wirbelströme im Topfboden erzeugt. Diese Wirbelströme erwärmen durch den ohmschen Widerstand des Eisens den Topfboden.

b)
$$\dot{B}(t)=B_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\cdot\omega$$
$$U_i(t)=-N\cdot A\cdot\dot{B}(t)=\underline{-N\cdot A\cdot B_0\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t)}$$

c)
$$T=40\cdot10^{-6}\,s \;\rightarrow\; \omega=\frac{2\cdot\pi}{T}=\frac{2\cdot\pi}{40\cdot10^{-6}\,s}=\underline{157\cdot10^{3}\,\frac{1}{s}} \;;\quad U_0=250\,V \;;\quad A=30\cdot10^{-4}\,m^2$$

$$U_0=N\cdot A\cdot B_0\cdot\omega \;\rightarrow\; B_0=\frac{U_0}{N\cdot A\cdot\omega}=\frac{250\,V}{500\cdot30\cdot10^{-4}\,m^2\cdot157\cdot10^{3}\,1/s}=\underline{1{,}06\,mT}$$

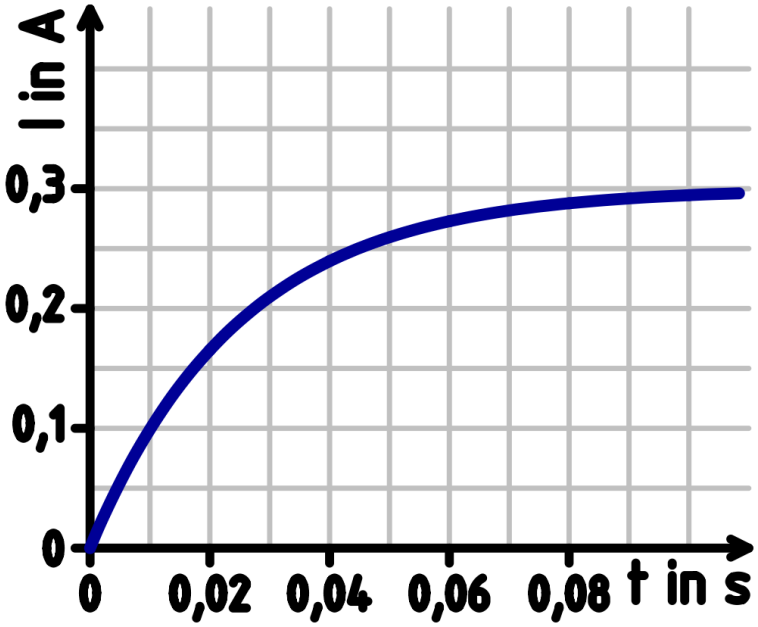
d) Der Scheitelwert der Induktionsspannung ist wegen

$$U_i=\left[-N\cdot A\cdot B_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\right]\cdot\omega=\left[-N\cdot A\cdot B_0\cdot\cos(\omega\cdot t)\right]\cdot2\cdot\pi\cdot f$$

direkt proportional zur Frequenz der Wechselspannung. D.h. je größer die Frequenz, desto größer die induzierte Spannung, desto größer die induzierten Wechselströme und desto heißer wird der Topf.

Aufgabe 10.216: Abi 2013; Induktivität einer Spule

Eine Spule und ein Schalter werden in Serie an einen 6,0 V-Akku angeschlossen. Das t-I-Diagramm zeigt die Stromstärke in der Spule, wenn zum Zeitpunkt t = 0 s der Schalter geschlossen wird.



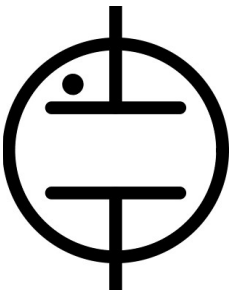
a) Erklären Sie das Zustandekommen des Kurvenverlaufs. Gehen Sie insbesondere darauf ein, dass zum Zeitpunkt t = 0 s die Stromstärke I = 0 A beträgt.

b) Entnehmen Sie dem Diagramm die Steigung der Kurve bei t = 0 s und verwenden Sie diese um nachzuweisen, dass die Induktivität der Spule ca. 0,5 H beträgt.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des Diagramms, dass der Ohmsche Widerstand der Spule ungefähr 20 Ω beträgt.

d) Die bisher verwendete Spule wird gegen eine andere Spule mit doppelter Induktivität und doppelt so großem Ohmschen Widerstand ausgetauscht. Zeichnen Sie in das gegebene Diagramm den t-I-Kurvenverlauf für die neue Versuchssituation ein.

Durch das Öffnen des Schalters wird nun die Spule wieder vom 6,0 V-Akku getrennt. Die dabei auftretende Selbstinduktionsspannung lässt sogar eine Glimmlampe aufleuchten, deren Zündspannung sehr viel größer als 6,0 V ist.



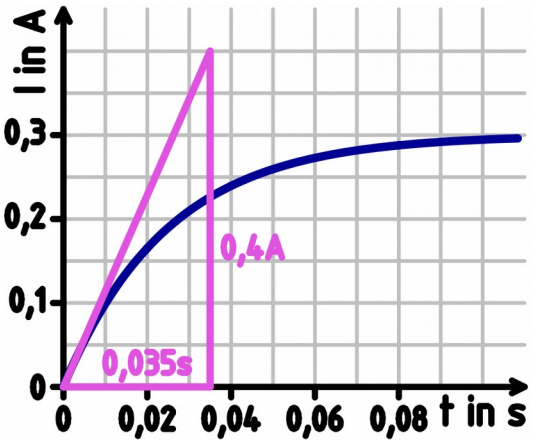
e) Erstellen Sie einen Schaltplan für dieses Demonstrationsexperiment; verwenden Sie dafür das abgebildete Schaltsymbol für eine Glimmlampe. Erklären Sie, warum die Selbstinduktionsspannung die Akkuspannung deutlich übersteigen kann.

Lösung:

a) Beim Einschalten ist die Stromstärke I = 0, d.h. es fällt gar keine Spannung am ohmschen Widerstand der Spule ab. Die gesamte Anliegende Spannung von 6,0 V fällt als Induktionsspannung -6,0 V = -Uo = Ui = -L·dI/dt an der Spule ab. Dadurch wird die Tangentensteigung der Kurve bei t = 0 festgelegt. Da der Strom ansteigt wird die am Widerstand abfallende Spannung UR = R·I immer größer, weshalb die Induktionsspannung an der Spule betragsmäßig immer kleiner wird. Wegen Ui = -L·dI/dt muss bei betragsmäßig kleiner werdender Induktionsspannung die Kurve immer flacher werden. Schließlich ist die Stromstärke so groß, dass fast die ganze Spannung Uo am Widerstand abfällt und die Kurve verläuft fast horizontal.

b) Tangentensteigung aus Steigungsdreieck

$$\dot{I}(t)=\frac{dI}{dt}\approx\frac{0{,}4\,A}{0{,}035\,s}\approx\underline{11{,}4\,A/s}$$
$$6{,}0\,V=-U_i=L\cdot\dot{I}(t)$$
$$L=\frac{6{,}0\,V}{\dot{I}}\approx\frac{6{,}0\,V}{11{,}4\,A/s}\approx\underline{0{,}53\,H\approx 0{,}5\,H}$$

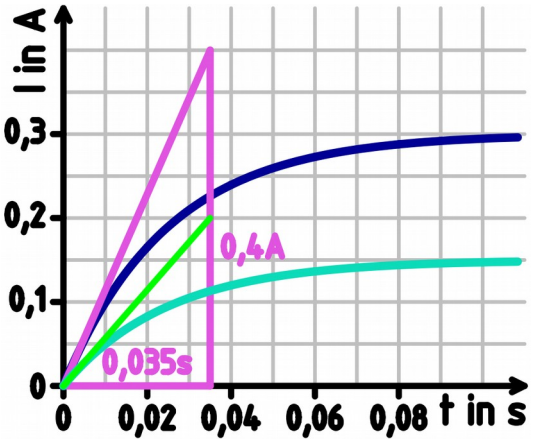


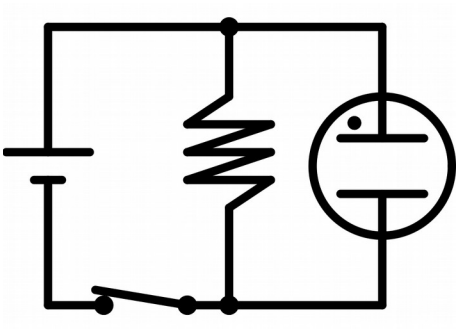
c) Ohmscher Widerstand aus maximaler Stromstärke am Ende der Kurve

$$R=\frac{U}{I}\approx\frac{6{,}0\,V}{0{,}3\,A}\approx\underline{\underline{20\Omega}}$$

d) doppelte Induktivität -> halb so große Tangentensteigung bei t = 0 (Tangente einzeichnen!)

doppelter Widerstand -> halb so große maximale Stromstärke (Asymptote bei I = 0,15 A)





e) Schaltplan siehe Bild

Beim Ausschalten fällt die Stromstärke plötzlich auf Null, d.h. dI/dt ist betragsmäßig sehr groß. Deshalb ist auch die in der Spule induzierte Spannung Ui = -L·dI/dt betragsmäßig sehr groß. Die beim Ausschalten induzierte Spannung hängt auch überhaupt nicht von der Akkuspannung ab. Sie ist nur abhängig von der Induktivität der Spule und von der Steigung der Stromstärke beim Ausschalten, aber nicht direkt von der Akkuspannung.

11 Schwingungen

Eine Schwingung ist ein sich selbständig periodisch wiederholender Vorgang. Voraussetzung für das Entstehen einer Schwingung ist ein schwingungsfähiges System und eine Anregung der Schwingung von außen. Ist die Schwingung einmal angeregt kann sie sich ohne Dämpfung beliebig lang selbst erhalten. Reale Schwingungen sind meistens gedämpft, weil (unerwünschte?) Energieumwandlungen stattfinden.

Parameter einer Schwingung

Schwingungsdauer, T: [T] = 1s

Frequenz, f: $\boxed{f=\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{\text{Anzahl der Schwingungen}}{\text{dafür benötigte Zeit}}}$; $[f]=\frac{1}{s}=1\,Hz$

Damit gilt : $\boxed{f=\frac{1}{T}}$

Für die Amplitude werden sich bei elektromagnetischen Schwingungen verschiedene Größen ergeben, deshalb kein pauschales Formelzeichen.

11.1 Spannung: Vorzeichen und Schleifenregel

Das Vorzeichen der Spannungen wird jetzt wichtig für das Verständnis der Zusammenhänge im Schwingkreis sein. vor allem damit wir die Diagramme richtig zeichnen.

Ohmscher Widerstand, R

Ein Widerstand bremst den Strom, der durch ihn hindurch fließt, d.h. die am Widerstand abfallende Spannung ist gegen die Richtung des Stroms gerichtet, deshalb:

$$\boxed{U_R=-R\cdot I}$$

Kapazität (Kondensator), C

Ein Kondensator setzt dem "aufgeladen werden" einen Widerstand entgegen. Die am Kondensator abfallende Spannung ist also gegen seine Ladung gerichtet, deshalb:

$$\boxed{U_C=-\frac{1}{C}\cdot Q}$$

Induktivität (Spule), L

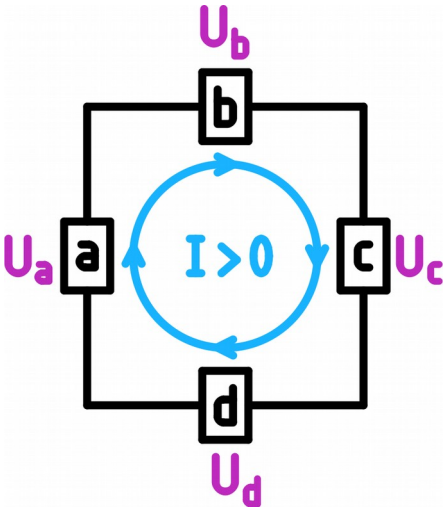
Die in der Spule induzierte Spannung ist gegen die Veränderung der Stromstärke (dI/dt) gerichtet. Das haben wir schon beim Induktionsgesetz mit Vorzeichen richtig gelernt.

$$\boxed{U_i = -L \cdot \dot{I} = -L \cdot \frac{dI}{dt}}$$

Spannungsquelle

Die Spannung, die eine Spannungsquelle zur Verfügung stellt ist halt so wie sie ist Uo oder Uo(t). Dafür können wir keine Formel angeben. Die Information, wie diese Spannung ist, muss uns jemand geben.

Schleifenregel (auch Maschenregel)

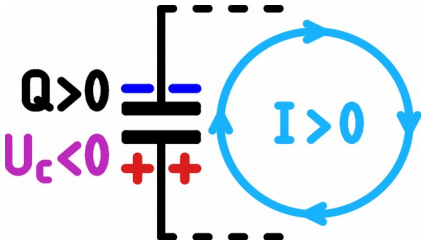


Wenn sich mehrere Bauteile in einer geschlossenen Schleife (Masche) befinden, dann ergibt die Summe der an den Bauteilen abfallenden (anliegenden) Spannungen Null (<- folgt aus Energieerhaltung).

$$\boxed{U_a + U_b + U_c + U_d = 0}$$

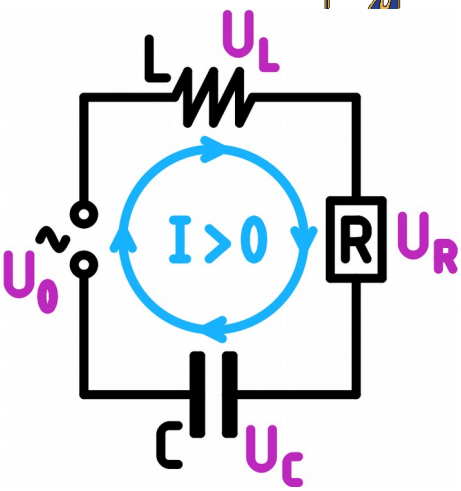
Damit man die Vorzeichen auswerten kann, muss man noch eine Stromrichtung (z.B. im Uhrzeigersinn, das ist Standard) als positiv definieren.

Dann gilt eine Spannung als positiv, wenn Sie einen Strom im Uhrzeigersinn antreibt oder einen Strom, der gegen den Uhrzeigersinn fließt, bremst. Eine Spannung die den Strom gegen den Uhrzeigersinn antreibt oder einen Strom, der im Uhrzeigersinn fließt, bremst gilt als negativ. Wenn wir unsere Formeln von oben richtig benutzen kommt das auch richtig raus.



Wenn sich ein Kondensator im Stromkreis befindet, dann erzeugt wegen I = dQ/dt ein positiver Strom eine positive Kondensatorladung. Die Ladung Q ist also in der gezeichneten Stellung positiv. Das bedeutet, dass wegen Uc = - (1/C) · Q die Kondensatorspannung Uc in der gezeichneten Stellung negativ ist. Das passt auch, weil in dieser Stellung der Kondensator einen Strom gegen den Uhrzeigersinn antreibt oder einen Strom, der im Uhrzeigersinn fließt (wie im Bild), bremst.

Aufgabe 11.217: Kann doch gar nicht sein, ist aber so!



In der Schleife im Bild befindet sich eine Spule der Induktivität L = 4,0 H, ein ohmscher Widerstand mit R = 10 Ω und ein Kondensator mit einer Kapazität von C = 20 µF. Die Schleife wird von einer Wechselspannungsquelle gespeist, die eine Spannungsamplitude von 5,0 V besitzt. Die Frequenz dieser Wechselspannung beträgt 18 Hz.

Zum Zeitpunkt t = 0 ist Uo = +5,0 V, UL = -113 V und UR = -2,4 V.

a) Bestimme die Kondensatorspannung Uc. In welche Richtung fließt der Strom gerade, wie groß ist die Stromstärke? Ist der Stromfluss gerade zunehmend oder abnehmend? Welche Kondensatorplatte ist gerade positiv geladen? Begründungen!

Zum Zeitpunkt t = 0,045 s ist Uo = +1,8 V, Uc = +140V und UR = + 1,4 V.

b) Bestimme die Induktionsspannung UL an der Spule. In welche Richtung fließt der Strom gerade, wie groß ist die Stromstärke? Ist der Stromfluss gerade zunehmend oder abnehmend? Welche Kondensatorplatte ist gerade positiv geladen?

Lösung:

a) $U_C = -U_0 - U_L - U_R = -5\text{V} + 113\,V + 2{,}4\,V = \underline{+110{,}4\,V}$; positiv

Wenn UR negativ ist, ist wegen UR = - R · I die Stromstärke I positiv, der Strom fließt also im Uhrzeigersinn.

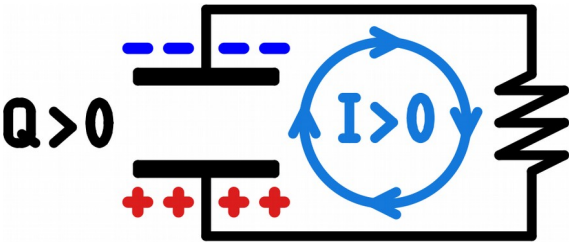
$$U_R = -R \cdot I \;\rightarrow\; I = -\frac{U_R}{R} = -\frac{-2{,}4\,V}{10\,\Omega} = \underline{+0{,}24\,A}$$

Wenn UL negativ ist, ist wegen UL = - L · (dI/dt) die Ableitung dI/dt positiv. D.h. der positive Strom ist gerade zunehmend.

Wenn UC positiv ist, ist wegen UC = - (1/C) · Q die Ladung Q negativ. D.h. die linke Platte ist gerade positiv geladen.

b) UL = -143,2 V; Strom fließt gegen den Uhrzeigersinn; I = - 0,14 A; dI/dt ist positiv, d.h. "der negative Stromfluss ist gerade abnehmend"; Q negativ, d.h. die linke Platte ist positiv geladen

11.2 Schwingkreis: Freie Schwingung



Ein elektromagnetischer Schwingkreis besteht aus einer Kapazität (z.B. Kondensator) und einer Induktivität (z.B. Spule). Die Stromrichtung im Uhrzeigersinn definieren wir als positiv. Ein positiver Strom führt wegen I = dQ/dt zu einer positiven Kondensatorladung. Deshalb ist die Ladung Q in der gezeichneten Stellung positiv. Wegen Uc + UL = 0 gilt Uc = - UL = L · (dI/dt). Die Änderungsrate der Stromstärke ist also zu jedem Zeitpunkt proportional zur Kondensatorspannung (mit gleichem Vorzeichen). Wir müssen nur aufpassen, dass die Kondensatorspannung wegen Uc = -(1/C) · Q negativ ist, wenn die Ladung Q positiv ist und umgekehrt.

Zur Erinnerung: Energien und Spannungen

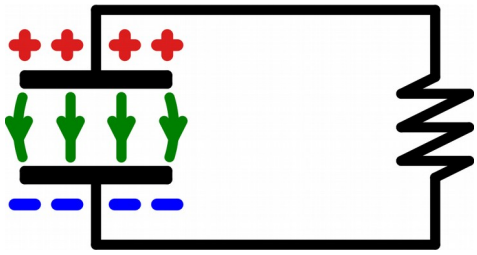
$$E_{mag}=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2 \quad ; \quad E_{el}=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2 \quad ; \quad U_L=-L\cdot \dot{I} \quad ; \quad U_C=-\frac{1}{C}\cdot Q$$

Zusammenhang zwischen Kondensator und Spule:

$$U_C+U_L=0 \;\rightarrow\; U_C=-U_L=L\cdot\frac{dI}{dt}$$

Wir betrachten einen Schwingkreis, bei dem zum Zeitpunkt t=0 der Kondensator geladen ist (negativ, Q < 0; d.h. Uc > 0 !!) und zum Zeitpunkt t=0 kein Strom fließt. Dieser Zustand des Schwingkreises muss "künstlich" erzeugt werden (Anregung der Schwingung von außen). Dazu wird der Kondensator mit Hilfe einer externen Spannungsquelle aufgeladen. Anschließend wird die Spannungsquelle abgetrennt und der Schwingkreis sich selbst überlassen. Alle Überlegungen vorerst ohne Widerstand.

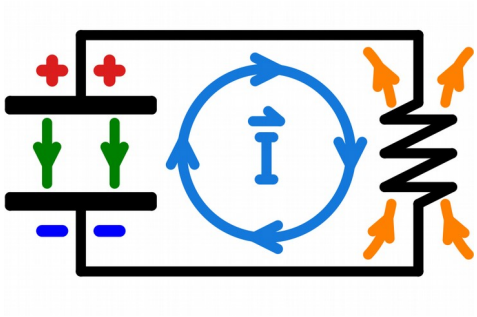
t=0: Kondensator geladen, kein Strom



➔ Energie: Die gesamte Energie des Schwingkreises liegt als elektrische Energie des Kondensators (E_{el} = 1/2 · C · U^2) vor.

Die Elektronen auf der negativen Platte stoßen sich gegenseitig ab, und werden von der positiven Platte angezogen, der Kondensator will sich über die Spule entladen, also einen Stromfluss erzeugen. Die Selbstinduktivität der Spule bremst das Ansteigen der Stromstärke.

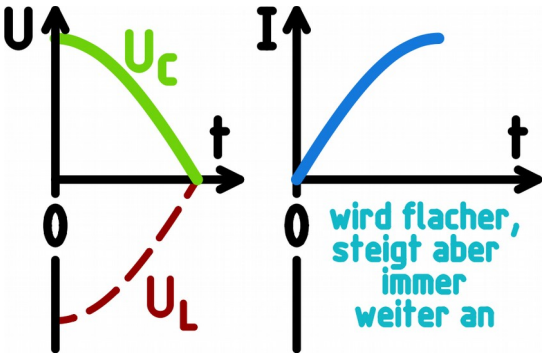
➔ Energie: Die elektrische Energie ($E_{el} = 1/2 \cdot C \cdot U^2$) des Kondensators wird langsam in magnetische Energie ($E_{mag} = 1/2 \cdot L \cdot I^2$) der Spule umgewandelt.

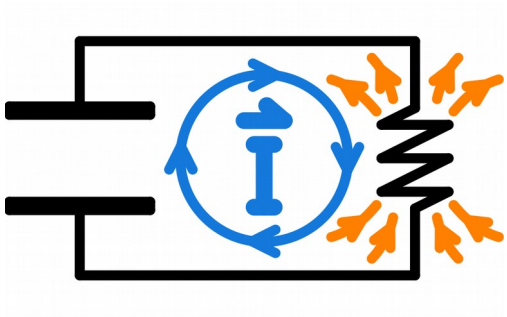


Durch die abnehmende Ladung wird die Kondensatorspannung kleiner. Die Induktionsspannung an der Spule ist genauso groß, hat aber entgegengesetztes Vorzeichen (Uc = - UL ; siehe oben).

Wegen Uc = - UL = L · (dI/dt) muss das Ansteigen der Stromstärke dI/dt dann kleiner werden, das t-I-Diagramm wird also flacher.

Beachten Sie auch, dass Q , Uc und auch dI/dt ihr Vorzeichen bis jetzt nicht geändert haben. Die Stromstärke steigt zwar langsamer, aber immer weiter an, solange die Kondensatorladung ihr Vorzeichen nicht geändert hat. Die Diagramme zeigen den Verlauf der Spannungen und der Stromstärke von t = 0 bis jetzt. Es gibt nur ein t-I-Diagramm, weil die Stromstärke an jedem Punkt im Stromkreis gleich ist.

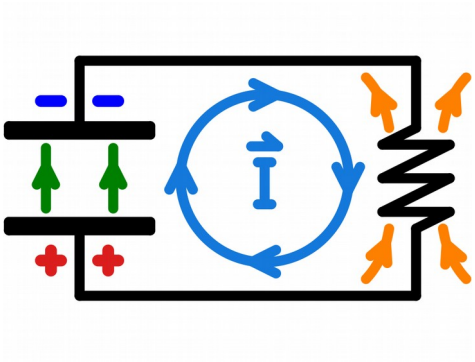




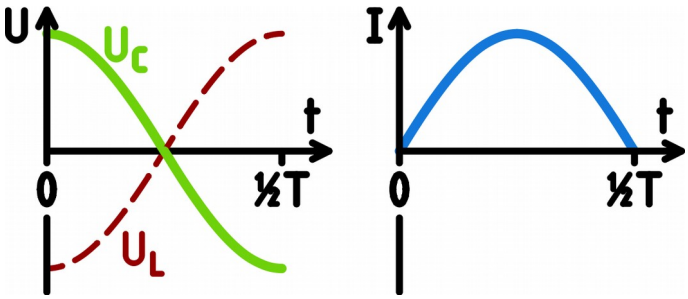
Schließlich hat die Stromstärke ihr Maximum erreicht, und die Spannungen am vollständig entladenen Kondensator und an der Spule sind gleich Null (dann ist auch dI/dt = 0).

➔ Energie: Die gesamte Energie des Schwingkreises liegt nun als magnetische Energie der Spule ($E_{mag} = 1/2 \cdot L \cdot I^2$) vor.

Die Selbstinduktivität der Spule versucht den Stromfluss aufrechtzuerhalten. Durch den Stromfluss lädt sich der Kondensator allerdings wieder auf und behindert so den Stromfluss, wodurch die Stromstärke abnimmt (kommt gleich noch genauer).

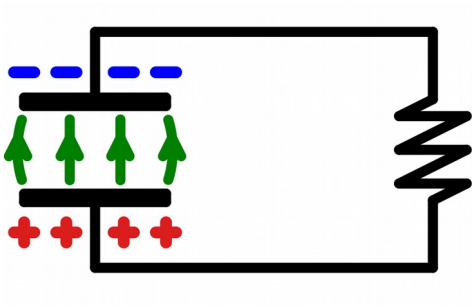


➔ Energie: Die magnetische Energie der Spule wird wieder langsam in elektrische Energie des Kondensators umgewandelt.



Durch die zunehmende Ladung wird die Kondensatorspannung betragsmäßig wieder größer. Weil der Kondensator sich aber jetzt entgegengesetzt auflädt hat die Kondensatorspannung negatives Vorzeichen und wegen Uc = - UL = L · (dI/dt) ändert sich auch das Vorzeichen von dI/dt und die Stromstärke muss immer schneller abnehmen, bis sie schließlich gleich Null ist.

Zu diesem Zeitpunkt (t = $\frac{1}{2}$·T) ist der Kondensator wieder maximal aufgeladen. Wegen der Energieerhaltung muss die Ladung dann genauso groß sein wie ganz zu Anfang.



➔ Energie: Die gesamte Energie des Schwingkreises liegt wieder als elektrische Energie des Kondensators vor.

Was wir bisher überlegt haben ist einer halben Schwingung. Nochmal dasselbe, und der Ausgangszustand ist wieder hergestellt, dass ist dann eine ganze Schwingung. Der sich selbst überlassene Schwingkreis schwingt mit seiner

Eigenfrequenz

Eigenfrequenz der Schwingung

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad \text{bzw.} \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$$

(Thomsongleichung)

Aufgabe 11.218: Thomsongleichung

a) Eine Spule mit Querschnittfläche 0,15 cm², 10 Windungen und einer Länge von 0,80 cm bildet mit einem Kondensator der Kapazität 5,0 pF einen elektromagnetischen Schwingkreis. Bestimme die Eigenfrequenz des Schwingkreises.

b) Ein Kondensator mit Plattenfläche 0,20 cm² und 0,50 mm Plattenabstand bildet mit einer Spule der Induktivität 0,10 µH einen elektromagnetischen Schwingkreis. Bestimme die Eigenfrequenz des Schwingkreises und seine Schwingungsenergie, wenn die maximale Stromstärke 3,0 mA beträgt.

c) Bestimme eine geeignete Kombination aus Induktivität L und Kapazität C für einen Schwingkreis mit einer Eigenfrequenz von 90 MHz.

Lösung:

a) $L=\mu_0\cdot A\cdot\frac{N^2}{l}=4\pi\cdot10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot0{,}15\cdot10^{-4}m^2\cdot\frac{10^2}{0{,}008\,m}=\underline{0{,}236\,\mu H}$

$$f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{C\cdot L}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{5\cdot10^{-12}F\cdot0{,}236\cdot10^{-6}H}}=\underline{\underline{147\,MHz}}$$

b) $C=\epsilon_0\cdot\frac{A}{d}=8{,}85\cdot10^{-12}\frac{C}{Vm}\cdot\frac{0{,}2\cdot10^{-4}m^2}{0{,}5\cdot10^{-3}m}=\underline{3{,}5\,pF}$

$$f=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{3{,}5\cdot10^{-12}F\cdot0{,}1\cdot10^{-6}H}}=\underline{\underline{120\,MHz}}$$

$$E=E_{mag}=\frac{1}{2}\cdot0{,}1\cdot10^{-6}H\cdot\left(3\cdot10^{-3}A\right)^2=\underline{\underline{0{,}45\,pJ}}$$

c) Am einfachsten gibt man sich die Kapazität vor und rechnet dann die Induktivität aus. Für hohe Frequenzen braucht man kleine Kapazitäten, z.B. C = 0,1 pF.

$$f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}\rightarrow L=\frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot f^2\cdot C}=\frac{1}{4\cdot\pi^2\cdot(90\cdot10^6\,Hz)^2\cdot0{,}1\cdot10^{-12}F}=\underline{31\,\mu H}$$

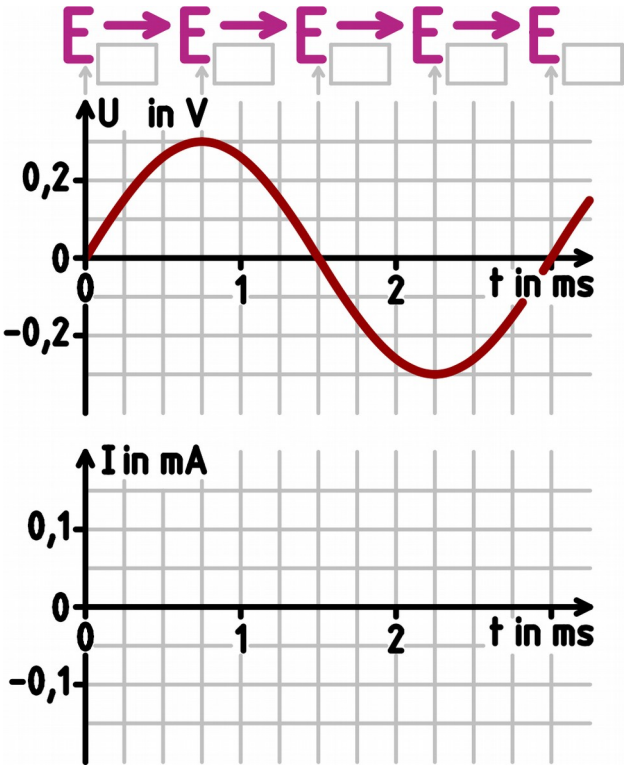
Aufgabe 11.219:

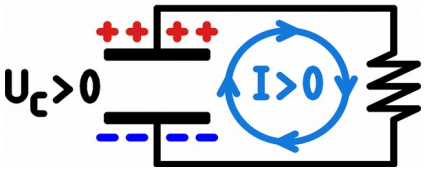
Gegeben ist das t-U-Diagramm für den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung eines elektromagnetischen Schwingkreises.

a) Zeichne ein dazu passendes t-I-Diagramm in das KOSY darunter, wenn die maximale Stromstärke im Schwingkreis 0,15 mA beträgt..

b) Beschrifte jeweils für die verschiedenen Zeitpunkte (Pfeilmarkierungen) die vorliegenden Energieformen.

c) Bestimme die Kapaazität C des Schwingkreises. (Kontrolle: 0,24 µF)

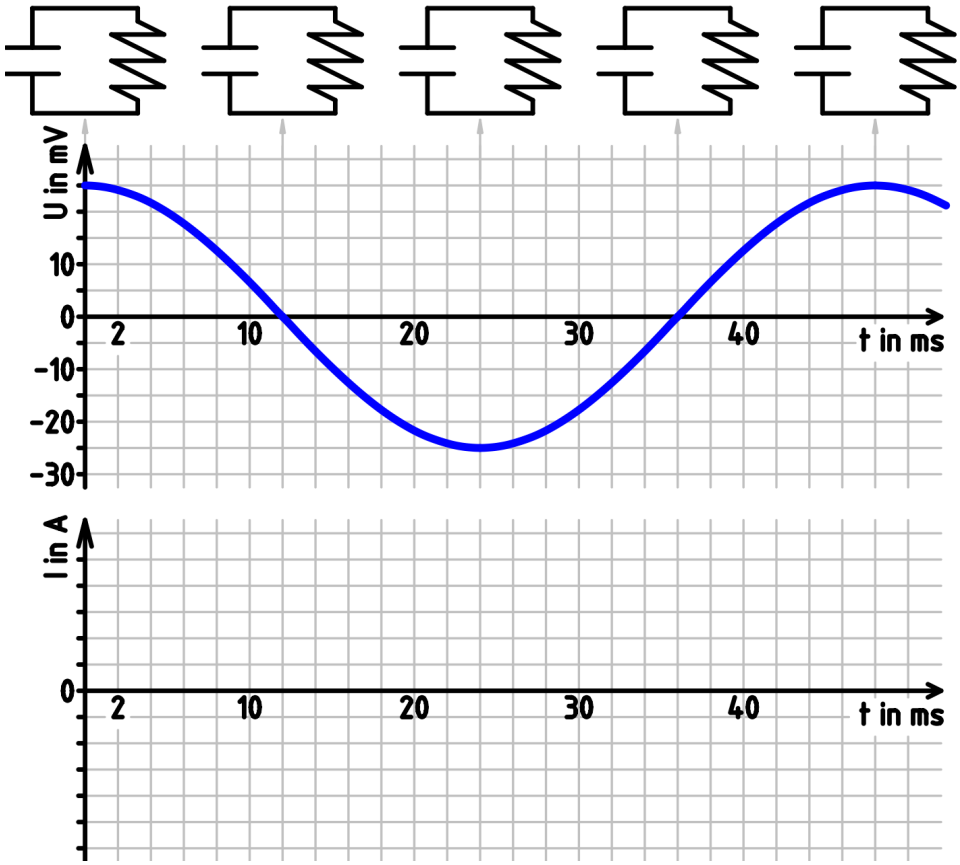




Aufgabe 11.220:

Für diese Aufgabe gilt Vorzeichenkonvention in der Skizze. Wenn die obere Platte positiv geladen ist, dann ist die Kondensatorspannung positiv. Wenn der Strom im Uhrzeigersinn fließt, dann ist die Stromstärke positiv. Das Diagramm unten zeigt den Verlauf der Kondensatorspannung einer Schwingung.

a) Zeichne in die fünf kleinen Schaltpläne jeweils den Ladezustand des Kondensators und die Richtung des eventuell fließenden Stroms ein.



b) Zu welchen Zeitpunkten besitzt der Kondensator maximale elektrische Energie. Zu welchen Zeitpunkten besitzt der Kondensator keine elektrische Energie. Wo und in welcher Form liegt die Energie zu diesen Zeitpunkten vor.

c) Der Kondensator des Schwingkreises hat eine Kapazität von 250mF. Bestimme die maximale elektrische Energie im Kondensator. (0,078mJ)

d) Bestimme die Induktivität der Spule dieses Schwingkreises. (0,23mH)

e) Bei maximaler Stromstärke liegt die gesamte Schwingungsenergie als magnetische Energie der Spule vor. Bestimme die maximale Stromstärke in der Spule. (0,82A)

f) Zeichne in das t-I-Diagramm den Verlauf der Stromstärke für diese Schwingung ein. Berechne hierzu noch die Steigung des t-I-Diagramms an den Nullstellen und zeichne die Tangenten an den Nullstellen ein. (dI/dt = 0,11 A/ms)

11.3 Dämpfung

Bei einer elektromagnetischen Schwingung wird permanent elektrische Energie (des Kondensators) in magnetische Energie (der Spule) und wieder zurück umgewandelt. Als Amplitude der Schwingung lässt sich die Spannung (Kondensatorspannung) oder die Stromstärke ansehen.

Da ein Schwingkreis meistens einen ohmschen Widerstand R besitzt, ist die Schwingung fast immer gedämpft. Die am Widerstand erbrachte Leistung führt zu Energieumwandlung in innere Energie, für uns ist das also eine Verlustleistung. Für die Verlustleistung am Widerstand gilt:

$$P = U_R \cdot I$$

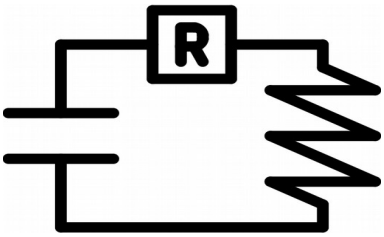
☠ Beim Einsetzten muss man aufpassen, weil natürlich nur die Spannung eingesetzt werden darf, die am Widerstand abfällt, und nicht die Kondensatorspannung.

☺ Die Stromstärke ist aber an jeder Stelle des Stromkreises gleich groß, also auch am Widerstand. deshalb haben wir beim Einsetzten der Stromstärke kein Problem.

Wir brauchen also einen Ausdruck ohne Spannung, nur mit der Stromstärke.

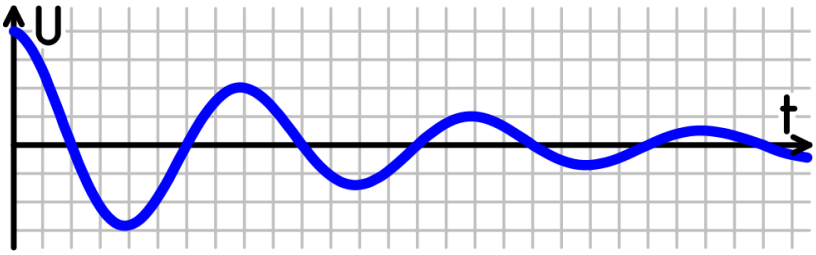
$R = \frac{U_R}{I} \Rightarrow U_R = R \cdot I$ und damit $P = U_R \cdot I = R \cdot I \cdot I$

Also ist die Verlustleistung: $\boxed{P = R \cdot I^2}$



Der Widerstand des Schwingkreises liegt als ohmscher Widerstand der Leitungen und der Spule vor. Im Schaltplan zeichnet man dann für die beiden Widerstände einfach einen ohmschen Widerstand R als zusätzliches Bauteil ein. Dieses Bauteil gibt es in Wirklichkeit gar nicht, es hätte aber dieselbe Wirkung wie der Widerstand von Spule und Leitungen. So etwas nennt man dann ein Ersatzschaltbild.

Durch die Dämpfung wird natürlich die Amplitude der Schwingung immer kleiner. Später werden wir lernen, dass eine elektromagneti-

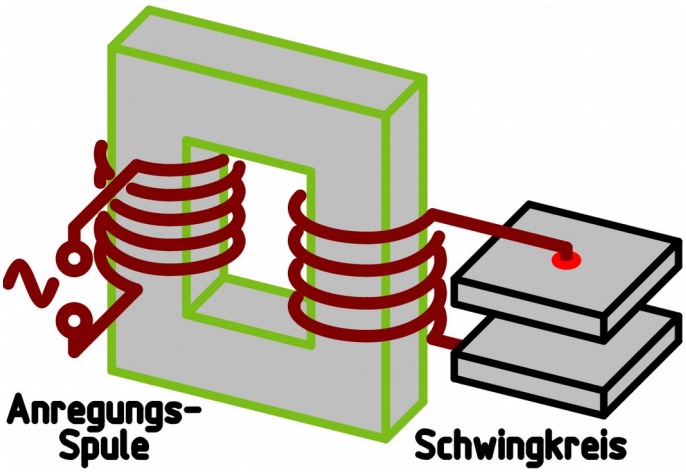


sche Schwingung in jedem Fall gedämpft ist, also Energie abgibt, weil in ihr immer elektrische Ladungen beschleunigt werden, und weil beschleunigte Ladungen immer elektromagnetische Strahlung - also Energie - an die Umgebung abgeben. Im Vergleich zur Energieabgabe am Widerstand ist dieser Effekt allerdings vernachlässigbar klein.

11.4 Anregung: Erzwungene Schwingung

Will man eine ungedämpfte Schwingung erzeugen, dann muss man dem Schwingkreis permanent Energie zuführen. Das macht man entweder mit einer Rückkopplungsschaltung (Suchbegriffe: Rückkopplungsschaltung, Meißner) oder indem man den Schwingkreis von außen zu erzwungenen Schwingungen anregt.

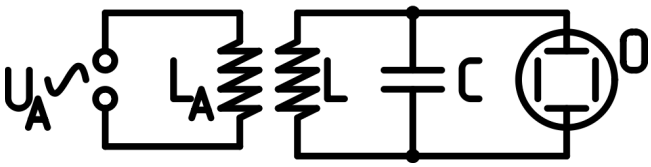
Anregung durch induktive Kopplung



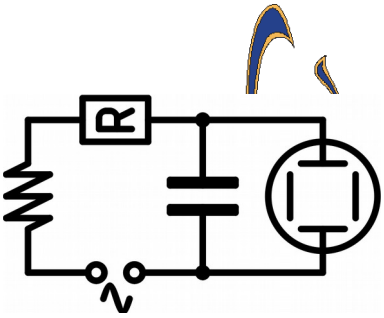
Dazu schließt man eine Anregungsspule an eine Wechselspannung an, und platziert die Spule des Schwingkreises so, dass sie vom Magnetfeld der Anregungsspule möglichst gut durchdrungen wird, normalerweise indem man die beiden Spulen auf einen gemeinsamen Eisenkern steckt. Durch das sich periodisch verändernde Magnetfeld der Anregungsspule wird in der Spule des Schwingkreises periodisch eine Spannung erzeugt, ständig Energie zugeführt und der Schwingkreis zu einer ungedämpften, erzwungenen Schwingung angeregt. Ein so angeregter Schwingkreis schwingt nicht mit seiner Eigenfrequenz (Thomsongleichung), sondern genau mit der Frequenz, mit der er angeregt wird.

Die Frequenz einer jeden Schwingung wird immer vom Erreger der Schwingung vorgegeben. Nur wenn ein schwingungsfähiges System sich selbst überlassen ist (Freie Schwingung), dann schwingt es mit seiner Eigenfrequenz.

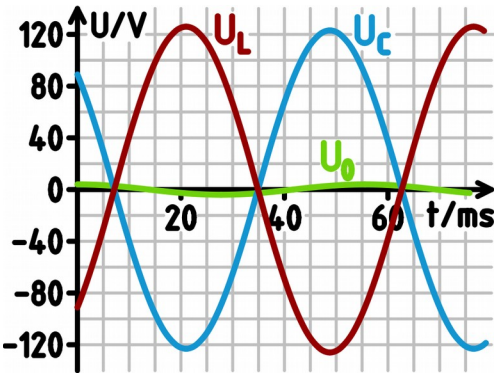
Die Amplitude der erzwungenen Schwingung lässt sich z.B. als Kondensatorspannung mit einem Oszilloskop untersuchen (Schaltplan siehe Bild).



Direkte Anregung



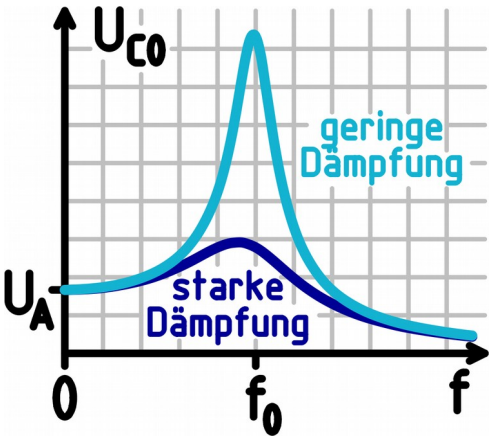
Man kann einen Schwingkreis auch direkt mit einer Wechselspannungsquelle anregen. Ein Beispiel für eine mögliche Schaltung zeigt das Bild. Diese Schaltung nennt man Serienschwingkreis (Reihenschwingkreis). Auch hier kann man z.B. die Kondensatorspannung der Schwingung mit einem Oszi aufzeichnen.



Resonanz

Die Anregung funktioniert umso besser, d.h. die Amplitude der Schwingung ist umso größer, je genauer die Frequenz der Anregung mit der Eigenfrequenz des Schwingkreises übereinstimmt (Resonanz). Das Bild zeigt die Spannungsverläufe eines Serienschwingkreises (R = 10Ω, C= 20 μF und L = 4,0 H), der mit einer Spannungsamplitude von 4V bei 18 Hz in der Nähe seiner Eigenfrequenz (17,8 Hz) angeregt wird. Die Spannungen an Spule UL und an Kondensator Uc werden sehr viel größer als die Anregungsspannung Uo. Das widerspricht weder der Schleifenregel (UL und Uc sind gegenphasig) noch der Energieerhaltung (erst nach einiger Zeit ist die Amplitude so groß).

Das Bild zeigt die Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz eimal für geringe und einmal für starke Dämpfung. Die Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreises ist mit fo markiert, die Amplitude der Anregungsspannung mit UA. Wie man sieht, weicht die Resonanzfrequenz ein wenig von der Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreises ab. Je größer die Dämpfung, desto größer die Abweichung.



➔ Extrem kleine Frequenzen

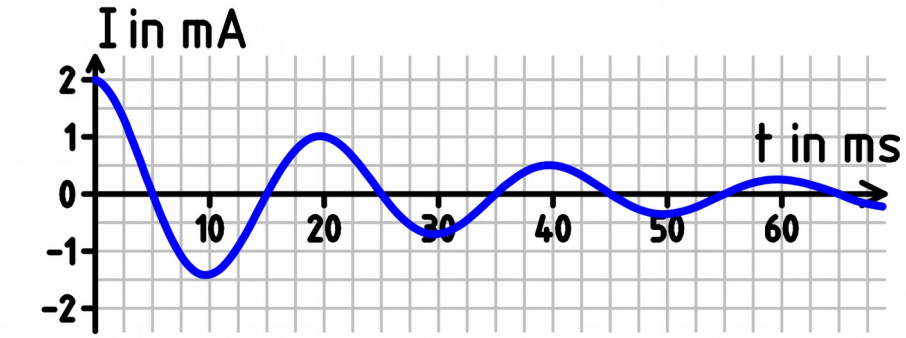
Bei extrem kleinen Frequenzen (Gleichspannung) liegt am Kondensator einfach die Spannung der Gleichspannungsquelle an. Wenn man am Spannungsregler der Gleichspannungsquelle dreht folgt die Kondensatorspannung dieser langsamen Bewegung.

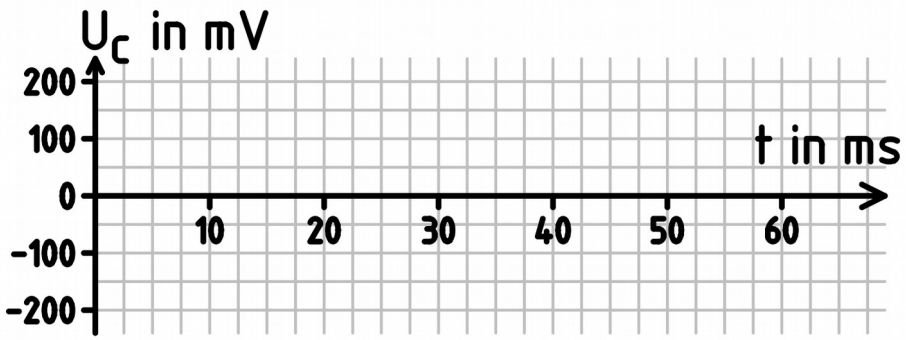
➔ Extrem hohe Frequenzen

Bei extrem hohen Frequenzen kann der Schwingkreis nicht mehr folgen. Er reagiert so gut wie gar nicht mehr und am Kondensator liegt keine Spannung an.

Aufgabe 11.221:

Das Bild zeigt das t-I-Diagramm eines sich selbst überlassenen Schwingkreises mit den Werten C = 40 µF, L = 0,25 H und einem Widerstand R = 20 Ω.





a) Wie viel Prozent seiner Energie verliert der Schwingkreis jeweils im Verlauf einer Schwingungsperiode (Schwingungsdauer).

b) Weshalb ist die Verlustleistung nicht zu allen Zeitpunkten gleich groß? Zu welchen Zeitpunkten ist sie Null, zu welchen Zeitpunkten ist sie maximal? Bestimme die erste maximale Verlustleistung. (Kontrolle: 80 µW)

c) Bestimme die Energie des Schwingkreises zu den Zeitpunkten t = 0; 10 ms; 20 ms ... bis 60 ms. (Kontrolle: 0,5 µJ; 0,25 µJ; 0,125 µJ; 0,0625 µJ; 0,031 µJ; 0,016 µJ; 0,008 µJ)

d) Wie lange würde es bei konstant maximaler Verlustleistung aus b) dauern, bis der Schwingkreis völlig stillsteht? (Kontrolle: 6,2 ms)

Im weiteren gehen wir davon aus, dass sich die Schwingungsenergie im Verlauf einer viertel Schwingungsperiode um 30% auf 70% des vorherigen Wertes reduziert.

e) Zu welchen Zeitpunkten ist die Kondensatorspannung betragsmäßig maximal. Bestimme mit Hilfe der Werte aus c) die jeweiligen Kondensator-Energien und damit die dazugehörigen Kondensator-Spannungen für diese Zeitpunkte und zeichne das t-U-Diagramm für die Kondensator-Spannung.

(Kontrolle: Energien -> 0,35 µJ; 0,18 µJ; 0,09 µJ; 0,044 µJ; 0,022 µJ; 0,011 µJ; 0,005 µJ; Spannungen (Beträge) -> 132 mV; 94 mV; 66 mV; 47 mV; 33 mV; 23 mV; 17 mV)

f) Bestimme mit Hilfe eines Steigungsdreiecks im gegebenen t-I-Diagramm die Induktionsspannung an der Spule für t = 15 ms und vergleiche mit der in e) gefundenen Kondensatorspannung. Plausibel? (Kontrolle: dI/dt = 0,42 A/s; U = 105 mV)

11.5 Mathematische Beschreibung der Schwingung

Hier geht's nicht um Herleitungen, sondern nur um das Beschreiben der relevanten Funktionen Q(t), I(t) und U(t) mit Hilfe von Sinus- und Kosinus.

Zusammenhänge zwischen Q, I und U:

Q ist die Ladung auf dem Kondensator, I ist die Stromstärke, die an jeder Stelle des Schwingkreises gleich groß ist. Und zwar: $I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{dQ}{dt}=\dot{Q}(t)$

Bei dem U haben wir ein kleines Problem.

U ist entweder die Spannung am Kondensator: $U_C=-\frac{1}{C}\cdot Q$

oder die Selbstinduktionsspannung an der Spule: $U_i=-L\cdot\dot{I}$

oder die am Widerstand abfallende Spannung: $U_R=-R\cdot I$

D.h. bei der Spannung müssen wir jedes mal dazu sagen, welche Spannung wir meinen.

Kreisfrequenz (Winkelgeschwindigkeit):

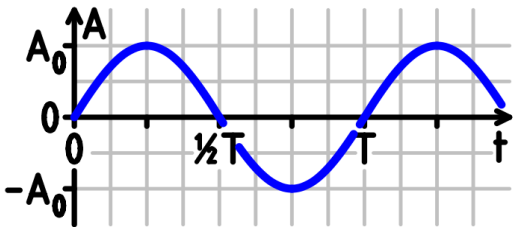
Das Argument einer Sinus- oder Kosinus-Funktion lässt sich als Winkel interpretieren. Die Geschwindigkeit mit der sich dieser Winkel ändert nennt man Winkelgeschwindigkeit oder Kreisfrequenz ω (<- kleines griechisches omega).

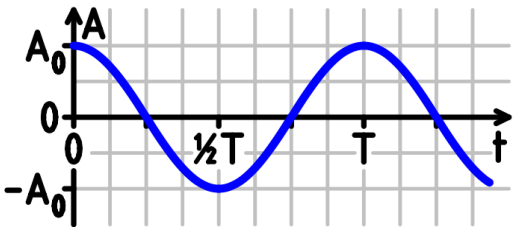
$$\omega=\frac{2\cdot\pi}{T}$$

Funktionen:

Eine Schwingung mit Schwingungsdauer T besitzt die Funktion:

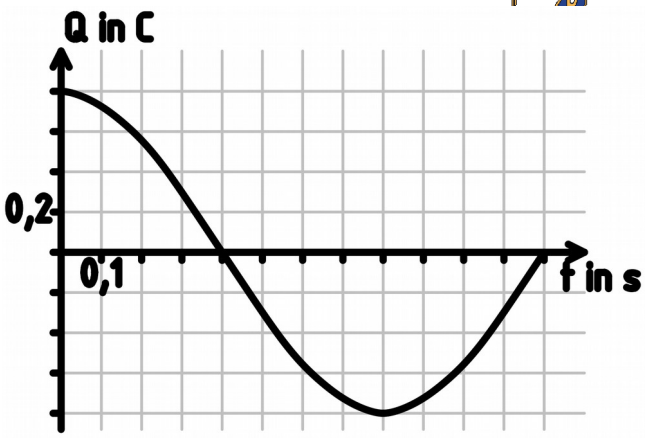
$$A(t)=A_0\cdot\sin\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)=A_0\cdot\sin(\omega\cdot t) \quad \text{bzw.} \quad A(t)=A_0\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{T}\cdot t\right)=A_0\cdot\cos(\omega\cdot t)$$





Aufgabe 11.222:

Das Bild rechts zeigt das t-Q-Diagramm eines freien Schwingkreises ohne ohmschen Widerstand, mit einem Kondensator der Kapazität 1,5mF.



a) Bestimme die Ladungsfunktion Q(t).

b) Bestimme die Stromstärke als Funktion der Zeit I(t). Gib die Amplitude der Stromstärke an.

c) Bestimme die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der Zeit und gib ihre Amplitude an.

d) Gib die Selbstinduktionsspannung an der Spule in Abhängigkeit von der Zeit an.

e) Bestimme die Induktivität der Spule.

Lösung:

$$T=4\cdot 0{,}4\,s=1{,}6\,s \qquad Q_0=0{,}8\,C$$

a) $$Q(t)=0{,}8\,C\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{1{,}6\,s}\cdot t\right)=\underline{\underline{0{,}8\,C\cdot\cos\left(3{,}93\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$$

b) $$I(t)=\dot{Q}(t)=-0{,}8\,C\cdot\sin\left(3{,}93\frac{1}{s}\cdot t\right)\cdot 3{,}93\frac{1}{s}=\underline{\underline{-3{,}14\,A\cdot\sin\left(3{,}93\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$$

$$\underline{\underline{I_0=3{,}14\,A}}$$

c) $$U_C(t)=-\frac{1}{C}\cdot Q(t)=-\frac{1}{1{,}5\cdot 10^{-3}\,F}\cdot 0{,}8\,C\cdot\cos\left(3{,}93\frac{1}{s}\cdot t\right)=\underline{\underline{-533\,V\cdot\cos\left(3{,}93\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$$

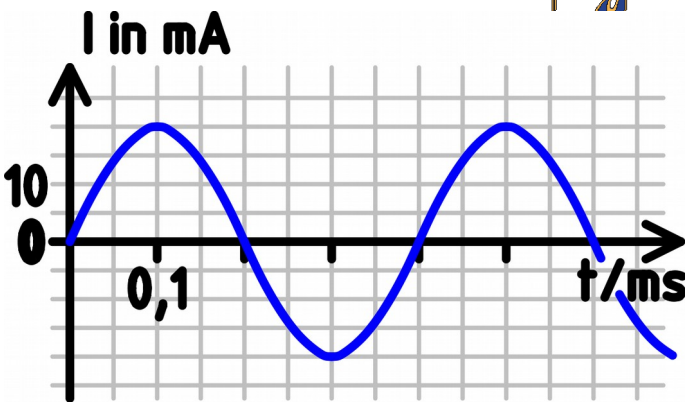
$$\underline{\underline{U_{0C}=533\text{V}}}$$

d) Ohne ohmschen Widerstand gilt: $U_i=-U_C=\underline{\underline{533\text{V}\cdot\cos\left(3{,}93\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$

e) $$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}\;\Rightarrow\;L=\frac{T^2}{(2\cdot\pi)^2\cdot C}=\frac{1{,}6^2\,s^2}{(2\cdot\pi)^2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}\,F}=\underline{43\,H}$$

Aufgabe 11.223:

Das Bild zeigt das t-I-Diagramm eines freien, ungedämpften Schwingkreises mit Induktivität L=5,0mH.



a) Bestimme die Funktion I(t) und gib ihre Amplitude an.

b) Bestimme die Schwingungsenergie des Schwingkreises.

c) Bestimme mit Hilfe der Ableitung von a) die Selbstinduktionsspannung an der Spule als Funktion der Zeit.

d) Bestimme die Kapazität des Schwingkreises.

e) Bestimme mit Hilfe der Energieerhaltung die maximale Spannung am Kondensator und vergleiche mit der Amplitude der Selbstinduktionsspannung der Spule.

Lösung:

$$T=0{,}4\cdot 10^{-3}\,s \quad I_0=20\text{mA} \;\Rightarrow\; I(t)=20\text{mA}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{0{,}4\cdot 10^{-3}\,s}\cdot t\right)$$

a) $\underline{\underline{I(t)=20\text{mA}\cdot\sin\left(15708\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$

$\underline{\underline{I_0=20\text{mA}}}$

b) $E_{ges}=E_{mag,max}=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I_0^2=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 10^{-3}\,H\cdot(20\cdot 10^{-3}\,A)^2=\underline{\underline{1{,}0\,\mu J}}$

$$\dot{I}(t)=20\text{mA}\cdot\cos\left(15708\frac{1}{s}\cdot t\right)\cdot 15708\frac{1}{s}=314\frac{A}{s}\cdot\cos\left(15708\frac{1}{s}\cdot t\right)$$

c) $U_i=-L\cdot\dot{I}(t)=-5{,}0\cdot 10^{-3}\,H\cdot 314\frac{A}{s}\cdot\cos\left(15708\frac{1}{s}\cdot t\right)$

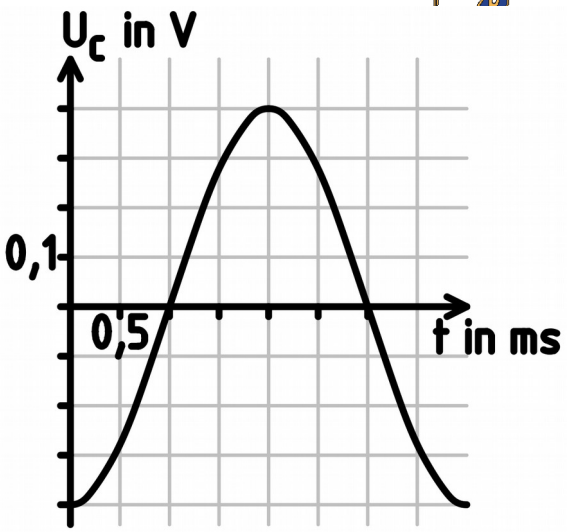
$\underline{\underline{U_i=-1{,}57\,V\cdot\cos\left(15708\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$

d) $T=2\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}$ → $C=\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{L}=\left(\frac{0{,}4\cdot 10^{-3}\,s}{2\pi}\right)^2\cdot\frac{1}{5\cdot 10^{-3}\,H}=\underline{\underline{0{,}81\,\mu F}}$

e) $E_{ges}=E_{el,max}=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U_0^2$ → $U_0=\sqrt{\frac{2\cdot E_{ges}}{C}}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}0\cdot 10^{-6}\,J}{0{,}81\cdot 10^{-6}\,F}}=\underline{\underline{1{,}57\,V}}$ <- passt

Aufgabe 11.224:

Das Bild zeigt das t-U-Diagramm der Kondensatorspannung eines freien, ungedämpften Schwingkreises mit einer Kapazität von 20µF.



a) Bestimme die Kondensatorspannung als Funktion der Zeit und gib ihre Amplitude an.

b) Bestimme mit Hilfe von a) die Ladung des Kondensators als Funktion der Zeit.

c) Bestimme mit Hilfe von b) die Stromstärke im Schwingkreis als Funktion der Zeit.

d) Bestimme zeichnerisch die maximale Tangentensteigung des Graphen von $U_C(t)$ und damit die Amplitude der Stromstärke im Schwingkreis $I_0=\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{max}$ und vergleiche mit c).

Lösung:

a)
$$T=4\cdot 10^{-3}\,s \quad U_{C0}=0{,}4\,V \;\Rightarrow\; U_C(t)=-0{,}4\,V\cdot\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{4\cdot 10^{-3}\,s}\cdot t\right)$$
$$\underline{\underline{U_C(t)=-0{,}4\,V\cdot\cos\left(1571\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$$

b)
$$Q(t)=-C\cdot U_C(t)=-\left(-20\cdot 10^{-6}\,F\right)\cdot 0{,}4\,V\cdot\cos\left(1571\frac{1}{s}\cdot t\right)$$
$$\underline{\underline{Q(t)=8{,}0\cdot 10^{-6}\,C\cdot\cos\left(1571\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$$

c)
$$I(t)=\dot{Q}(t)=-8\cdot 10^{-6}\,C\cdot\sin\left(1571\frac{1}{s}\cdot t\right)\cdot 1571\frac{1}{s}$$
$$\underline{\underline{I(t)=-0{,}0126\,A\cdot\sin\left(1571\frac{1}{s}\cdot t\right)}}$$

d)
$$\left(\frac{\Delta U_C}{\Delta t}\right)_{max}=\frac{0{,}8\,V}{1{,}4\cdot 10^{-3}\,s}=\underline{571\frac{V}{s}}$$

Mit Beträgen gilt: $Q=C\cdot U \;\rightarrow\; \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{max}=20\cdot 10^{-6}\,F\cdot 571\frac{V}{s}=\underline{0{,}011\,A}$

Stimmt gut mit der in c) bestimmten Amplitude der Stromstärke 0,013 A überein.

11.6 Analogie zu mechanischen Schwingungen

Wir vergleichen eine elektromagnetische Schwingung mit der Schwingung eines Körpers, der an einer Feder befestigt ist. Die aktuelle Position des Körpers bei der Federschwingung x(t) kann man dann vergleichen mit der momentanen Ladung des Kondensators im Schwingkreis Q(t).

Analoge Größen:

Ausgehend von x(t) entspricht Q(t) können wir schlussfolgern, welche anderen Größen bzw. Phänomene dann einander entsprechen.

Wegen $\frac{\Delta x}{\Delta t}=\dot{x}(t)=v(t)$ und $\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\dot{Q}(t)=I(t)$ sind dann v(t) und I(t) einander entsprechende Größen.

Weil die kinetische Energie von v abhängt ($E_{kin}=1/2\cdot m\cdot v^2$) und die magnetische Energie von I abhängt ($E_{mag}=1/2\cdot L\cdot I^2$) und weil v und I einander entsprechen, sind kinetische und magnetische Energie analoge Größen.

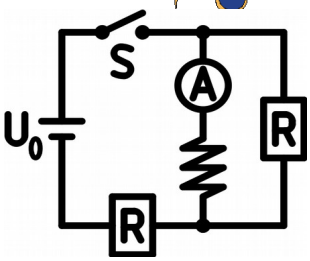
Die Energie, die noch übrig ist, steckt bei der mechanischen Schwingung in der potentiellen Energie und bei der elektromagnetischen Schwingung in der elektrischen Energie. Deshalb müssen diese beiden Energien analog zueinander sein.

Tabelle: Analoge Größen und Phänomene

mechanische Schwingung	elektromagnetische Schwingung
Auslenkung x(t)	Kondensatorladung Q(t)
Geschwindigkeit v(t)	Stromstärke I(t)
potentielle Energie	elektrische Energie
kinetische Energie	magnetische Energie
andauernde Umwandlung von potentieller Energie in kinetische Energie und wieder zurück	andauernde Umwandlung von elektrischer Energie in magnetische Energie und wieder zurück
Dämpfung durch Reibung (Luftwiderstand, innere Reibung in der Feder)	Dämpfung durch ohmschen Widerstand

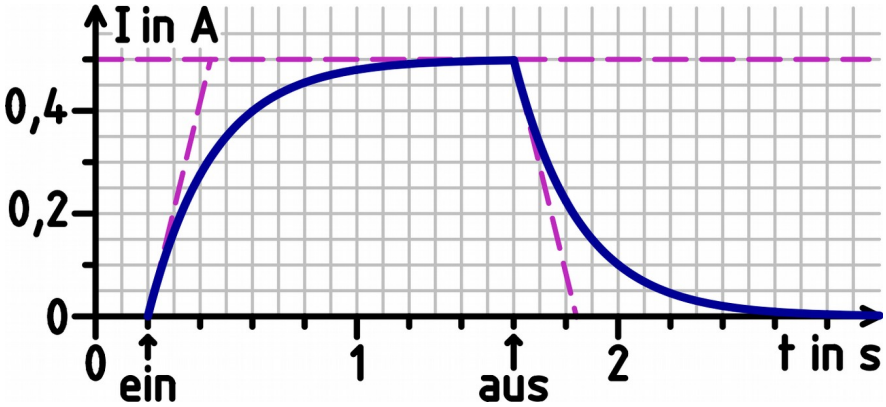
Die Analogie hat auch ihre Grenzen. Ein elektromagnetischer Schwingkreis gibt z.B. wegen seiner beschleunigten Ladungen immer elektromagnetische Strahlung an die Umgebung ab. Ein Federpendel gibt keine Strahlung ab.

11.7 Ein- und Ausschaltvorgänge nochmal

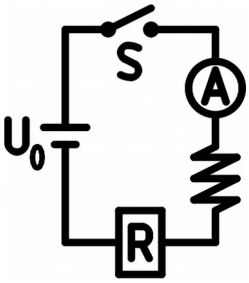


Damit beim Ausschalten die Spule noch einen Stromkreis besitzt, muss man rechts von der Spule einen zweiten Stromkreis mit Widerstand aufbauen. Gemessen wird beim Einschalten und beim Ausschalten der Strom durch die Spule.

Aufgabe 11.225:



Beim Schließen und wieder Öffnen des Schalters in der Schaltung oben (Spannungsquelle, Uo = 20 V) wird das im nebenstehenden Bild gezeigte t-I-Diagram aufgenommen.

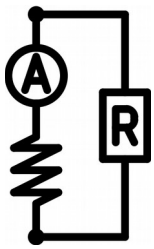


Beim Einschalten betrachten wir nur den linken Teil der Schaltung.

a) Erkläre weshalb beim Einschalten zuerst die gesamte Quellspannung Uo an der Spule abfällt.

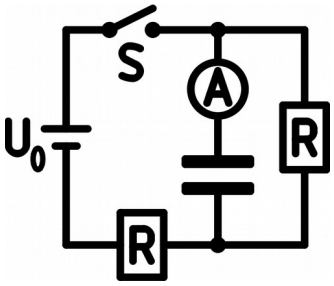
b) Erkläre weshalb der Spulenstrom zuerst sehr steil ansteigt, und der Anstieg des Spulenstroms im weiteren Verlauf immer flacher wird.

c) Gib die maximale Stromstärke nach dem Einschalten in Abhängigkeit von U_0 und R an.

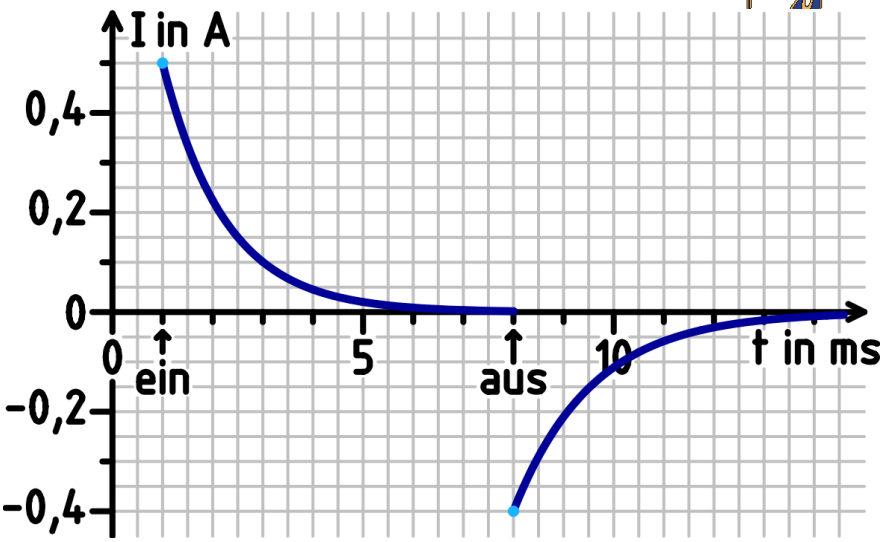


Beim Ausschalten betrachten wir nur den rechten Teil der Schaltung. Beachte, dass beim Ausschalten durch die Spule der maximale Strom von oben fließt, dass die Spule versucht den Stromfluss aufrechtzuerhalten, und dass die Spule dafür die Stromrichtung im Widerstand umkehren muss. Ganz zu Anfang des Ausschaltvorgangs fließt also durch den Widerstand der maximale Spulenstrom von oben.

d) Erkläre weshalb bei abnehmender Stromstärke zugleich das t-I-Diagramm flacher werden muss.



Aufgabe 11.226:

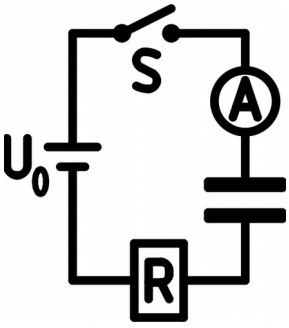


Tauscht man die Spule durch einen Kondensator aus, erhält man ein ganz anderes Diagramm.

(Uo = 20 V; andere - verschiedene - Widerstände also vorher)

a) Erkläre weshalb der Strom beim Ausschalten seine Richtung ändert.

Beim Einschalten betrachten wir nur den linken Teil der Schaltung.



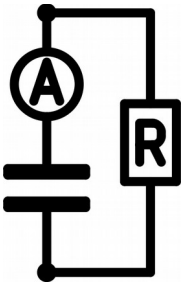
b) Weshalb fällt zu Anfang (bei "ein") die ganze Spannung am Widerstand ab?

c) Weshalb wird die am Widerstand abfallende Spannung im Verlauf der Zeit kleiner?

d) Weshalb fällt die Stromstärke bei Einschalten?

e) Wie groß muss in Abhängigkeit von C und Uo die Ladung auf dem Kondensator sein, damit die Stromstärke schließlich auf Null fällt?

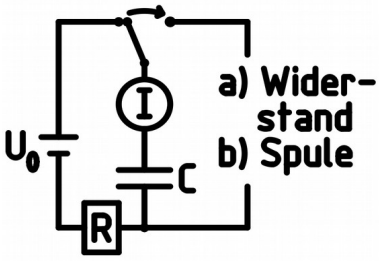
Beim Ausschalten betrachten wir nur den rechten Teil der Schaltung.



f) Weshalb wird beim Ausschalten die am Widerstand abfallende Spannung immer kleiner?

g) Weshalb sinkt die Stromstärke beim Ausschalten immer weiter ab?

h) Skizziere das t-U-Diagramm für die Kondensatorspannung beim Ein- und Ausschalten.



Aufgabe 11.227:

Ein Kondensator wird durch eine Spannungsquelle aufgeladen, und anschließend a) über einen Widerstand, b) über eine Spule entladen. Skizziere die entstehenden t-I-Diagramme für den Zeitraum nach dem umlegen des Schalters.

Aufgabe 11.228: ISB, Link-Ebene Lehrplan; Mech. und EM-Schwingung

Die ungedämpfte harmonische Schwingung eines Federpendels ist ein mechanisches Analogon zur ungedämpften Schwingung eines elektromagnetischen Schwingkreises. Dabei wird die (momentane) Auslenkung x(t) des Federpendels als die zur (momentanen) Ladung Q(t) des Kondensators analoge Größe betrachtet.

a) Begründen Sie, dass dann der (momentanen) Geschwindigkeit des Federpendels die (momentane) Stromstärke I im Schwingkreis entspricht.

b) Geben Sie an, welche Formen elektromagnetischer Energie im Rahmen dieser Analogiebetrachtung der kinetischen Energie bzw. der potentiellen Energie des Federpendels entsprechen. Geben Sie eine kurze Begründung an.

c) Beschreiben Sie die Phasen der EM-Schwingung, die den Phasen maximaler Auslenkung bzw. maximaler Geschwindigkeit des Federpendels entsprechen.

d) Q_{max} sei die maximale Ladung des Kondensators, I_{max} seid er Maximalwert der Stromstärke in der Spule des Schwingkreises. Erläutern Sie, warum folgende Gleichung gilt: $\frac{1}{2}\cdot L\cdot I_{max}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\cdot Q_{max}^2$

e) Geben Sie an, was im elektromagnetischen Fall dem Luftwiderstand entspricht.

Lösung:

a) $x(t)$ entspricht $Q(t)$ deshalb entspricht $\dot{x}(t)$ auch $\dot{Q}(t)$ was Geschwindigkeit bzw. Stromstärke ist.

b) $v(t)$ entspricht $I(t)$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2$ entspricht $\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2$; also entspricht die kinetische Energie der magnetischen, folglich entspricht die potentielle Energie des Federpendels der elektrischen Energie im Kondensator.

c) Maximale Auslenkung heißt max. potentielle Energie; entspricht max. elektrischer

Energie, also max. aufgeladenem Kondensator bei Stromstärke gleich Null

Maximale Geschwindigkeit heißt max. kinetische Energie; entspricht max. magnetischer Energie, also max. Stromstärke bei vollständig entladenem Kondensator

d) Bei einer ungedämpften Schwingung ist die Energie konstant, also ist die maximale magnetische Energie genauso groß wie die maximale elektrische Energie, da die Energien jeweils maximal sind, wenn die andere jeweils Null ist.

e) Der Luftwiderstand entspricht dem ohmschen Widerstand des Schwingkreises.

<u>Aufgabe 11.229: ISB, Link-Ebene Lehrplan; Schwingkreis</u>

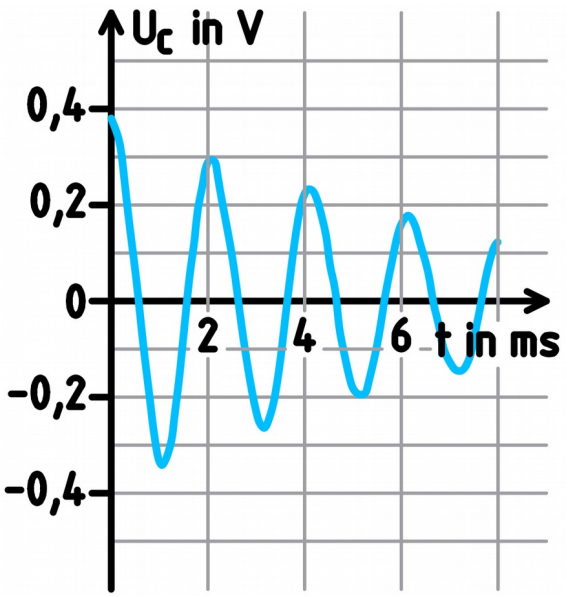
An einen Kondensator mit der Kapazität $C=300\,\mu F$ ist zunächst die Spannung $U_0=0{,}40\,V$ angelegt. Die Stromquelle wird danach abgetrennt und der Kondensator über eine Spule mit der Induktivität $L=0{,}35\,mH$ entladen. Während des Entladens wird der zeitliche Verlauf der Spannung U_C am Kondensator mit einem Oszilloskop dargestellt.

a) Fertigen Sie einen Schaltplan zur Durchführung des obigen Versuchs an.

b) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T dieses zunächst als ideal angenommenen Schwingkreises.

c) Nehmen Sie an, dass während der ersten Periode der Schwingung die Energie im Schwingkreis konstant bleibt. Berechnen Sie unter dieser Annahme den maximalen Spulenstrom I_0 in diesem Zeitraum.

d) Das Diagramm zeigt den realen Verlauf von U_C. Geben Sie zu den folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch sind und begründen Sie jeweils kurz ihre Antwort.

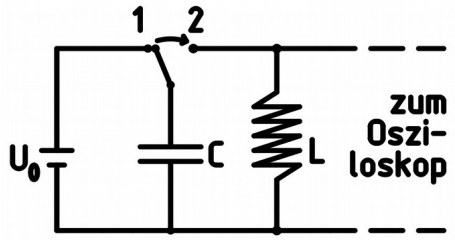


i) Nach 2,5 Perioden ist die Energie im Schwingkreis auf etwa 25% der Anfangsenergie abgesunken.

ii) Das Produkt aus U_C und I_L ist zeitlich konstant.

iii) Die Spule erwärmt sich.

Lösung:



a) siehe Bild

b) $T=2\cdot\pi\sqrt{L\cdot C}=\underline{2{,}0\,ms}$

c) $\frac{1}{2}\cdot L\cdot I_0^2=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U_0^2 \rightarrow I_0=\sqrt{\frac{C\cdot U_0^2}{L}}=\underline{0{,}37\,A}$

d) in drei Teilen

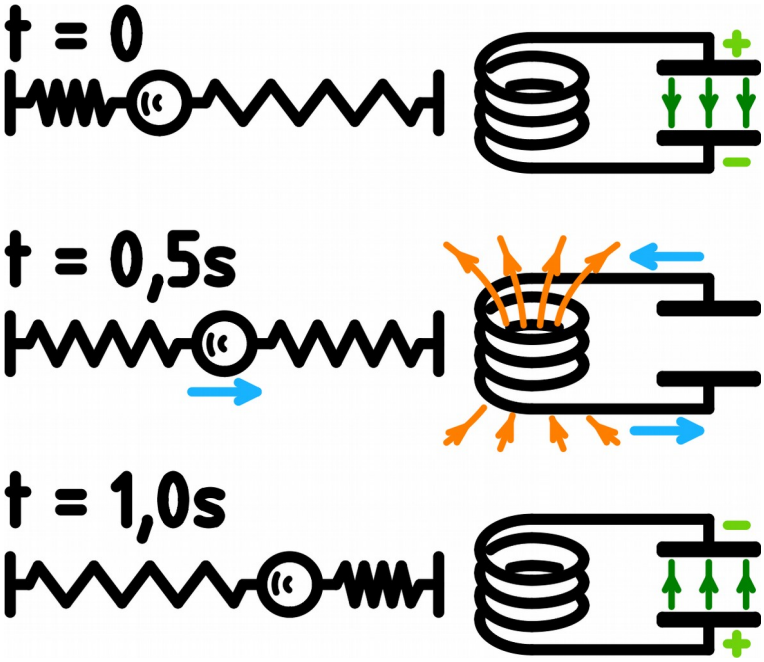
i) richtig; die Spannung am Kondensator ist gerade maximal - d.h. die ganze Energie steckt im Kondensator - und betragsmäßig halb so groß wie zu Anfang; wegen $E_{el}=0{,}5\cdot C\cdot U^2$ ist die Energie dann nur noch ein Viertel so groß

ii) falsch; wenn eines Null ist, dann ist auch das Produkt Null, ansonsten nicht

iii) richtig; wegen des ohmschen Widerstandes erwärmt sich der Spulendraht

Aufgabe 11.230:

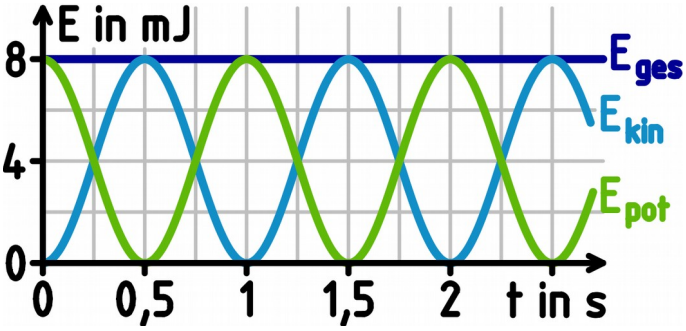
Das Bild zeigt den Zustand einer Federschwingung und einer elektromagnetischen Schwingung, die beide eine Schwingungsdauer von T = 2,0 s besitzen, für drei aufeinander folgende Zeitpunkte. Zum Zeitpunkt t = 0 ist der schwingende Körper maximal ausgelenkt und der Kondensator des Schwingkreises maximal geladen. Der schwingende Körper hat eine Masse von m = 0,40 kg und eine maximale Geschwindigkeit von 0,20 m/s. Der Kondensator des Schwingkreises hat eine Kapazität von C = 160 µF und eine maximale Ladung von 1,6 mC.



a) Skizziere in einem einzigen skalierten Diagramm den zeitlichen Verlauf der kinetischen Energie, der potentiellen Energie (Spannenergie) und der gesamten Schwingungsenergie der Federschwingung für den Zeitraum t = 0 bis t = 2,5 s für den Fall einer ungedämpften Schwingung.

b) Skizziere in einem einzigen Diagramm den zeitlichen Verlauf der magnetischen Energie (in der Spule), der elektrischen Energie (im Kondensator) und der gesamten Schwingungsenergie der elektromagnetischen Schwingung für den Zeitraum t = 0 bis t = 2,5 s für den Fall einer ungedämpften Schwingung.

Lösung:

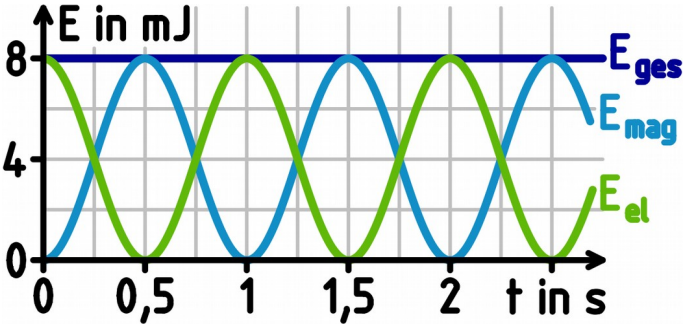


a) Schwingungsenergie aus maximaler Geschwindigkeit und Masse gibt eine Gesamtenergie von 8,0 mJ.

Maximale Auslenkung bei t = 0 bedeutet maximale potentielle Energie zur Zeit t = 0.

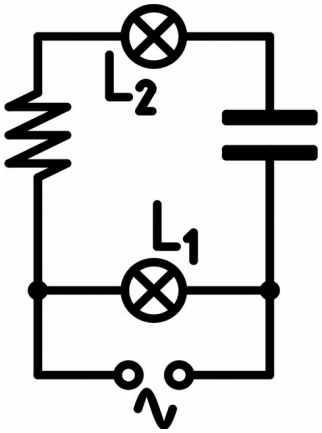
b) Schwingungsenergie aus Kapazität und maximaler Ladung gibt eine Gesamtenergie von 8,0 mJ.

Maximale Ladung bei t = 0 bedeutet maximale elektrische Energie zur Zeit t = 0.



Dasselbe Diagramm.

Aufgabe 11.231:



Aus einer Spule, einem Kondensator und zwei identischen Lämpchen L1 und L2 wird die Schaltung im Bild aufgebaut. Die Schaltung ist an ein Wechselspannungsquelle mit regelbarer Frequenz (Sinusgenerator) angeschlossen, die eine konstante Spannungsamplitude von 6,0 V besitzt.

Was lässt sich beobachten, wenn man die Frequenz der Spannungsquelle beginnend bei extrem kleinen Frequenzen bis hin zu extrem hohen Frequenzen langsam hoch regelt?

11.8 Abi mit Lösung

Aufgabe 11.232: Abi 1999

Ein elektromagnetischer Schwingkreis, bestehend aus einer Spule mit einem Eisenkern der Induktivität L = 0,25 H und einem Kondensator der Kapazität C = 0,13 µF, schwingt ungedämpft mit seiner Eigenfrequenz f. Als Nachweisgerät dient ein Lautsprecher.

a) Berechnen Sie die Frequenz f des vom Lautsprecher abgegebenen Tons.

b) Erläutern Sie, wie sich die Tonhöhe verhält, wenn man den Eisenkern nach und nach aus der Spule herauszieht.

Ist der Eisenkern ganz entfernt, beträgt die Tonfrequenz fo = 4,2 kHz.

c) Berechnen Sie die Induktivität Lo der eisenlosen Spule.

d) Der Schwingkreis soll nun mit der Eigenfrequenz 2·fo schwingen. Geben Sie eine Möglichkeit für eine entsprechende Veränderung des Schwingkreises an. Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:

a) $f=\frac{1}{2\cdot\pi\sqrt{L\cdot C}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{0{,}13\cdot10^{-6}F\cdot0{,}25\,H}}=\underline{\underline{883\,Hz}}$

b) Beim Herausziehen des Eisenkerns wird die Induktivität der Spule immer kleiner und wegen $f=1/\left(2\cdot\pi\sqrt{L\cdot C}\right)$ wird die Frequenz des Schwingkreises dadurch größer, der Ton wird also höher.

c) $f=\frac{1}{2\cdot\pi\sqrt{L\cdot C}}$ → $L=\frac{1}{C\cdot\left(2\cdot\pi\cdot f\right)^2}=\frac{1}{0{,}13\cdot10^{-6}F\cdot\left(2\cdot\pi\cdot4200\,Hz\right)^2}=\underline{\underline{11\,mH}}$

d) Wegen $f=1/\left(2\cdot\pi\sqrt{L\cdot C}\right)$ muss sich $\sqrt{L\cdot C}$ halbieren. Das kann erreicht werden, indem man die Induktivität L auf ein Viertel reduziert (z.B. mit einer gleich langen und dicken Spule die nur halb so viele Windungen hat). Man kann natürlich auch die Kapazität des Kondensators auf ein Viertel reduzieren (zum Beispiel durch vervierfachen des Plattenabstandes) oder die Induktivität halbieren und gleichzeitig die Kapazität halbieren.

Aufgabe 11.233: Abi 1999, stark modifiziert

Ein kleiner Dezimeterwellensender für Experimentierzwecke im Unterricht hat die Eigenfrequenz f = 454 MHz. Durch ein zusätzliches Gerät wird die Schwingung in der Eigenfrequenz als ungedämpfte Schwingung aufrechterhalten. Die gesamte Schwingungsenergie beträgt im eingeschwungenen Zustand 14 nJ. Der ohmsche Widerstand des Schwingkreises wird für alle Rechnungen als vernachlässigbar klein angenommen.

a) Die Induktivität des Schwingkreises beträgt L = 0,10 µH. Berechnen Sie den Scheitelwert (Amplitude) der Stromstärke im Schwingkreis. (Kontrolle: 0,53 A)

b) Berechnen Sie die Kapazität des Schwingkreises. (Kontrolle: C = 1,2 pF)

c) Berechnen Sie die maximale Ladung Q der Kapazität im Schwingkreis bei dieser ungedämpften Schwingung. (Kontrolle: Q = 0,18 nC)

d) Berechnen Sie die mittlere Stromstärke zwischen zwei aufeinander folgenden Zeitpunkten zu denen die Kapazität maximal, aber entgegengesetzt geladen ist.

e) Berechnen Sie die maximale Selbstinduktionsspannung an der Induktivität des Schwingkreises und damit die maximale Änderungsrate dI/dt der Stromstärke im Schwingkreis in A/ns. (Kontrolle: 1,5 A/ns)

f) Fertigen Sie unter Ausnutzung der gewonnenen Ergebnisse ein Skaliertes t-I-Diagramm dieser Schwingung für eine vollständige Schwingungsdauer T an. Skalierung: t-Achse 1 cm <-> 0,2 ns ; I-Achse 1cm <-> 0,1 A.

g) Ohne ständige Energiezufuhr kann die ungedämpfte Schwingung eines realen Schwingkreises nicht aufrechterhalten werden. Geben Sie den hauptsächlichen Grund dafür an.

Lösung:

a) $E_{mag}=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2 \rightarrow I=\sqrt{\frac{2\cdot E_{mag}}{L}}=\sqrt{\frac{2\cdot 14\cdot 10^{-9}J}{0{,}1\cdot 10^{-6}}}=\underline{\underline{0{,}53\,A}}$

b) $f=\frac{1}{2\cdot\pi\sqrt{L\cdot C}} \rightarrow C=\frac{1}{L\cdot(2\cdot\pi\cdot f)^2}=\frac{1}{0{,}1\cdot 10^{-6}H\cdot(2\cdot\pi\cdot 454\cdot 10^6 Hz)^2}=\underline{\underline{1{,}2\,pF}}$

c) $E_{el}=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2=\frac{Q^2}{2\cdot C} \rightarrow Q_{max}=\sqrt{2\cdot E_{el}\cdot C}=\sqrt{2\cdot 14\cdot 10^{-9}J\cdot 1{,}2\cdot 10^{-12}F}=\underline{\underline{0{,}18\,nC}}$

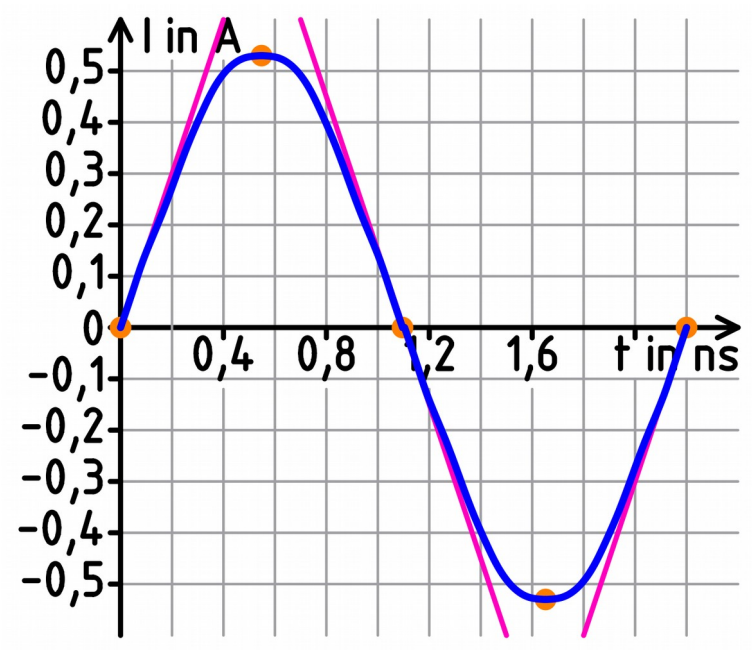
d) $T=\frac{1}{f}=\frac{1}{454\cdot 10^{6}\,Hz}=\underline{2{,}2\,ns}$

$$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{2\cdot Q}{0{,}5\cdot T}=\frac{0{,}36\cdot 10^{-9}\,C}{1{,}1\cdot 10^{-9}\,s}=\underline{\underline{0{,}33\,A}}$$

e) Maximale Spannung aus maximaler Kondensatorladung

$$C=\frac{Q}{U}\ \rightarrow\ U_{max}=\frac{Q}{C}=\frac{0{,}18\cdot 10^{-9}\,C}{1{,}2\cdot 10^{-12}\,F}=\underline{\underline{150\,V=U_{i,max}}}$$

$$U_i=-L\cdot\dot{I}\ \rightarrow\ \dot{I}=-\frac{U_i}{L}=-\frac{150\,V}{0{,}1\cdot 10^{-6}\,H}=\underline{\underline{-1{,}5\,A/ns}}$$



f) Maximale Steigung:

$$\frac{1{,}5\,A}{1\,ns}=\frac{0{,}3\,A}{0{,}2\,ns}$$

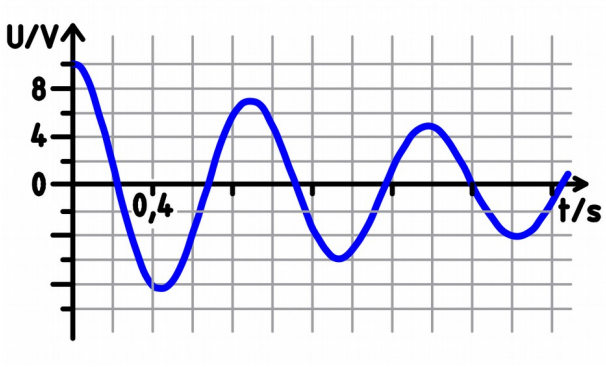
Steigungsdreieck

g) Ein realer Schwingkreis hat einen ohmschen Widerstand an dem permanent Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt wird. Dadurch wird die Schwingungsenergie immer kleiner.

Aufgabe 11.234: Abi 2007

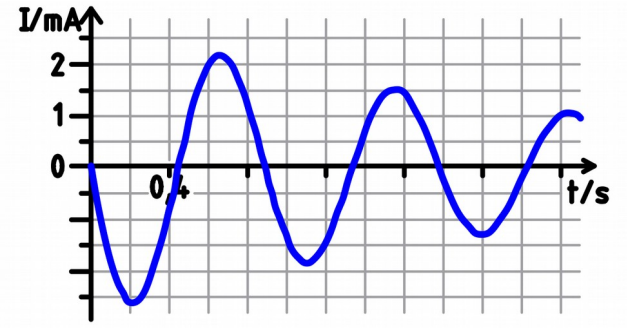
Ein elektromagnetischer Schwingkreis enthält einen Kondensator der Kapazität 40µF und eine Spule der Induktivität 500 H.

Die Diagramme zeigen jeweils den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung U, der Stromstärke I in der Spule und der gesamten Schwingungsenergie E dieses gedämpften Schwingkreises.



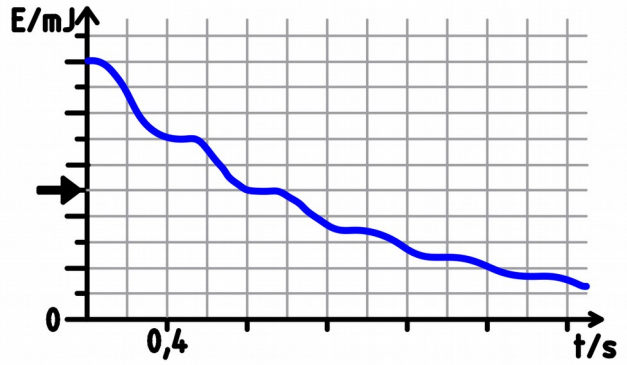
a) Wodurch wird die Schwingung eines elektromagnetischen Schwingkreises gedämpft?

b) Lesen Sie aus einem der Diagramme die Periodendauer der gedämpften Schwingung ab. Zeigen Sie, dass diese Periodendauer in guter Näherung übereinstimmt, mit der Periodendauer eines ungedämpften Schwingkreises mit den angegebenen Werten für Induktivität und Kapazität.



c) Begründen Sie, dass die Energieachse des t-E-Diagramms an der mit dem Pfeil markierten Stelle mit dem Wert 1,0 mJ beschriftet werden muss.

d) Bestimmen Sie mit Hilfe des t-E-Diagramms die Verlustleistung zum Zeitpunkt t = 0,67 s (bei maximaler Stromstärke). (Kontrolle: P = 2,0 mW)



e) Bestimmen Sie mit dem in d) gefundenen Wert und mit Hilfe des t-I-Diagramms den ohmschen Widerstand des Schwingkreises.

f) Abgesehen von einer gewissen Welligkeit nimmt die Schwingungsenergie exponentiell ab. Entnehmen Sie dem t-E-Diagramm die "Halbwertszeit" für die Schwingungsenergie und berechnen Sie damit, nach welcher Zeit der Schwingkreis 99% seiner anfänglichen Energie verloren hat.

Lösung:

a) Der Schwingkreis wird durch den ohmschen Widerstand gedämpft.

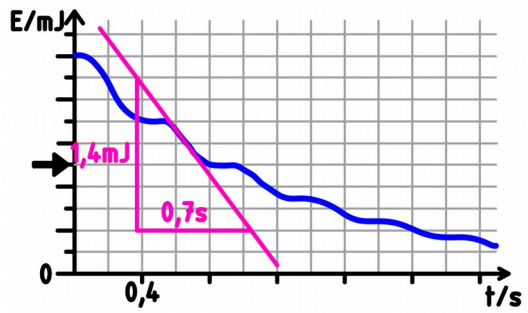
b) Abgelesen: T = 0,88 s

$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{C\cdot L}=2\cdot\pi\sqrt{40\cdot 10^{-6}F\cdot 500}=\underline{0{,}89\,s}$ Die Werte sind fast identisch.

c) Bei ca. t = 0,9 s ausschließlich elektrische Energie im Kondensator, I = 0.

$$E_{ges}=E_{el}=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 10^{-6}F\cdot(7\,V)^2=\underline{0{,}98\,mJ\approx 1{,}0\,mJ}$$

Die kleine Abweichung ist beim Ablesen unvermeidlich.



d) Verlustleistung aus Tangentensteigung

$$P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{0{,}0014\,J}{0{,}7\,s}=\underline{2{,}0\,mW}$$

e)

$$P=U_R\cdot I_R=R\cdot I^2 \rightarrow R=\frac{P}{I^2}$$

$$P=\frac{0{,}002\,W}{(0{,}0022\,A)^2}=\underline{413\,\Omega}$$

f) $T_{1/2}\approx 0{,}9\,s$; $\left(\frac{1}{2}\right)^x=0{,}01 \rightarrow x=\log_{0,5}0{,}01=\underline{6{,}6}$; $t=6{,}6\cdot 0{,}9\,s=\underline{5{,}9\,s}$

Aufgabe 11.235: Abi 2000

Ein Kondensator mit der Kapazität C und eine Spule mit der Induktivität L bilden einen elektromagnetischen Schwingkreis, der ungedämpft mit der Eigenfrequenz fo schwingt. Die Kapazität des Kondensators beträgt C = 22 nF. Bei der Spule handelt es sich um eine lang gestreckte Spule mit der Querschnittsfläche A = 31 cm², der Länge l = 30 cm und der Windungszahl N = 20 000.

a) Berechnen Sie die Induktivität der Spule. (Kontrolle: L = 5,2 H)

b) Untersuchen Sie, ob sich mit den gegebenen Bauteilen ein Schwingkreis aufbauen lässt, dessen Eigenfrequenz höchstens um 10% von 500 Hz abweichen soll.

c) Berechnen Sie den Maximalwert Im der Stromstärke in diesem Schwingkreis, wenn der Maximalwert der Spannung Um = 3,8 V beträgt.

Lösung:

a) $L=\mu_0 \cdot A \cdot \frac{N^2}{l}=4\cdot\pi\cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot 0{,}0031\,m^2\cdot\frac{20\,000^2}{0{,}3\,m}=\underline{5{,}19\,H}$

b) $f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{22\cdot 10^{-9}F\cdot 5{,}19\,H}}=\underline{\underline{471\,Hz}}$

$\frac{471\,Hz}{500\,Hz}=0{,}942$

Die Eigenfrequenz des Schwingkreises weicht um 5,8% von 500 Hz ab, das sind weniger als 10%. Es geht also.

c) Energieumwandlung: Elektrische Energie -> magnetische Energie

$E_{mag}=E_{el} \rightarrow \frac{1}{2}\cdot L\cdot I_{max}^2=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U_{max}^2 \quad I_{max}=U_{max}\cdot\sqrt{\frac{C}{L}}=3{,}8\,V\cdot\sqrt{\frac{22\cdot 10^{-9}F}{5{,}19\,H}}=\underline{0{,}247\,mA}$

Aufgabe 11.236: Abi 2002; Schwingungen

Die harmonische Schwingung eines Federpendels mit der Masse m und der Federkonstante D ist ein mechanisches Analogon zur ungedämpften Schwingung eines elektromagnetischen Schwingkreises. Dabei wird die (momentane) Auslenkung x des Federpendels als die zur (momentanen) Ladung Q des Kondensators analoge Größe betrachtet.

a) Begründen Sie, dass dann der (momentanen) Geschwindigkeit des Federpendels die (momentane) Stromstärke I im Schwingkreis entspricht.

b) Welche Formen elektromagnetischer Energie entsprechen im Rahmen dieser Analogiebetrachtung der kinetischen Energie bzw. der potentiellen Energie des Federpendels, welche durch $E = \frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2$ gegeben ist? Geben Sie eine kurze Begründung an.

c) Charakterisieren Sie die Phasen der elektromagnetischen Schwingung, die den Phasen maximaler Auslenkung bzw. maximaler Geschwindigkeit des Federpendels entsprechen.

Qmax sei die maximale Ladung des Kondensators, Imax sei der Scheitelwert der Stromstärke in der Spule des Schwingkreises.

d) Erläutern Sie, warum folgende Gleichung gilt: $\frac{1}{2}\cdot L\cdot I_{max}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\cdot Q_{max}^2$

Umax sei der Scheitelwert der Spannung am Kondensator des Schwingkreises.

e) Entwickeln Sie (unter Verwendung der bei Teilaufgabe d) angegebenen Gleichung) die Beziehung $I_{max}=2\pi\cdot f_0\cdot C\cdot U_{max}$, wenn fo die Eigenfrequenz des Schwingkreises bezeichnet.

In einem ungedämpft mit der Frequenz fo = 2,0 Hz schwingenden Schwingkreis S beobachtet man die Scheitelwerte Umax = 15 V und Imax = 7,5 mA.

f) Berechnen Sie Kapazität C und Induktivität L des Schwingkreises.

Mit dem oben genannten Schwingkreis S wird ein Schwingkreis S' mit gleicher Kapazität C' = C und einer zwischen 4·L und L veränderlichen Induktivität L' zu erzwungenen Schwingungen angeregt.

g) Beschreiben Sie qualitativ, wie sich die Frequenz bzw. die Amplitude der erzwungenen Schwingung des Schwingkreises S' verhält, wenn L' allmählich von 4·L auf L verringert wird.

<u>Lösung:</u>

a) Wenn x(t) und Q(t) einander entsprechen, dann entsprechen sich auch deren Ableitungen dx/dt und dQ/dt, also Geschwindigkeit v(t) und Stromstärke I(t).

b) $x\equiv Q \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot D\cdot x^2\equiv\frac{1}{2\cdot C}\cdot Q^2$, also entsprechen sich potentielle Energie und elektrische Energie. $v\equiv I \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2\equiv\frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2$, also entsprechen sich kinetische und magnetische Energie.

c) Maximale Auslenkung: x maximal heißt Q maximal, d.h. der Kondensator ist maximal geladen und die Stromstärke ist gerade Null, ändert also gerade ihre Richtung.

Maximale Geschwindigkeit: v maximal heißt I maximal, d.h. die Stromstärke durch die Spule ist gerade maximal und der Kondensator ist vollständig entladen.

d) Im Schwingkreis wird permanent elektrische Energie in magnetische umgewandelt und wieder zurück. Wenn die elektrische Energie maximal ist, dann ist die magnetische Energie Null und umgekehrt. Außerdem ist der Schwingkreis ungedämpft und andere Energien sind nicht beteiligt. Deshalb ist die maximale magnetische Energie (linke Seite) genauso groß wie die maximale elektrische Energie (rechte Seite).

e) $f_0=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}$ → $L=\frac{1}{4\pi^2\cdot f_0^2\cdot C}$ und $Q=C\cdot U$ einsetzen in die gegebene Gleichung gibt:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi^2 f_0^2\cdot C}\cdot I_{max}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\cdot Q_{max}^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C}\cdot C^2\cdot U_{max}^2=\frac{1}{2}\cdot C\cdot U_{max}^2$$

$$I_{max}^2=4\pi^2\cdot f_0^2\cdot C\cdot C\cdot U_{max}^2 \rightarrow I_{max}=2\pi\cdot f_0\cdot C\cdot U_{max}$$

f) Benutzen der Gleichung aus e) gibt

$$C=\frac{I_{max}}{2\pi\cdot f_0\cdot U_{max}}=\frac{0{,}0075\,A}{2\pi\cdot 2\,Hz\cdot 15\,V}=\underline{\underline{39{,}8\mu\,F}}$$

$$f_0=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} \rightarrow L=\frac{1}{4\pi^2\cdot f_0^2\cdot C}=\frac{1}{4\pi^2\cdot 4\,Hz^2 39{,}8\cdot 10^{-6}F}=\underline{\underline{500\,H}}$$

g) Der angeregte Schwingkreis S' schwingt immer mit der Frequenz, mit der er angeregt wird, also mit fo. Die Frequenz ändert sich deshalb während des Vorgangs nicht.

Da L' viel größer als L ist, ist die Eigenfrequenz des Schwingkreises S' kleiner als die von S. Beim Verringern von L' nähert sich die Eigenfrequenz von S' an die von S an, wodurch die Amplitude der Schwingung von S' immer größer wird bis schließlich die Eigenfrequenzen bei L' = L übereinstimmen und die Amplitude maximal wird, es kommt zu Resonanz.

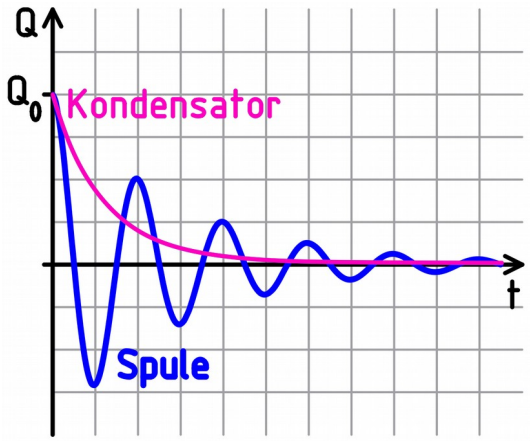
Aufgabe 11.237: Abi 2003

Ein Kondensator wird mit der Ladung Qo aufgeladen. Anschließend wird er zunächst über einen ohmschen Widerstand und - nach erneuter vollständiger Aufladung - über eine Spule vollständig entladen. Der ohmsche Widerstand der Spule sei klein, aber nicht vernachlässigbar.

a) Zeichnen Sie für jeden Entladungsvorgang qualitativ das Zeit-Ladungs-Diagramm.

b) Erklären Sie, weshalb es bei der Entladung über die Spule zu einer Umladung des Kondensators kommt.

Lösung:



a) siehe Bild

b) Beim Entladen über ein Spule steigt die Stromstärke zuerst an. Bei sinkender Kondensatorladung sinkt auch die Kondensatorspannung und deshalb die Selbstinduktionsspannung an der Spule. Deshalb wird wegen Ui = -L·dI/dt der Anstieg der Stromstärke immer flacher und erreicht erst bei vollständig entladenem Kondensator ihr Maximum. Die Selbstinduktivität der Spule verhindert ein sofortiges Abbrechen des Stromflusses, der zuerst langsam abnimmt während sich der Kondensator wieder auflädt wodurch die Kondensatorspannung wieder zunimmt, jedoch mit anderem Vorzeichen, deshalb muss auch die Selbstinduktionsspannung der Spule langsam mit anderem Vorzeichen zunehmen. Wegen des geänderten Vorzeichens von Ui und wegen Ui = -L·dI/dt nimmt die Stromstärke immer stärker ab, bis die Spannungen wider ihr Maximum erreichen und der Kondensator entgegengesetzt aufgeladen ist.

Bemerkung: Aufgabe b) ist ein Beispiel für eine offene Aufgabenstellung. Hier müssen Sie berücksichtigen, wie viel Punkte es gibt und entsprechend genau erklären.

Aufgabe 11.238: Abi 2003; Erzwungene Schwingungen

Ein ungedämpfter eletromagnetischer Schwingkreis schwingt mit der konstanten Frequenz fo = 1,5 kHz. Er wird induktiv mit einem weiteren elektromagnetischen Schwingkreis gekoppelt, der aus einer Spule der Induktivität 20 mH und einem Drehkondensator besteht, dessen Kapazität zwischen 0,31 µF und 1,30 µF variiert werden kann.

Untersuchen Sie durch geeignete Rechnung, ob hier der Resonanzfall eintreten kann.

Lösung:

$$f_1 = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{0{,}020\,H\cdot 0{,}31\cdot 10^{-6}\,F}} = \underline{2021\,Hz}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{0{,}020\,H\cdot 1{,}30\cdot 10^{-6}\,F}} = \underline{987\,Hz}$$

Zwischen diesen beiden Eigenfrequenzen kann der Schwingkreis eingestellt werden. 1500 Hz liegen dazwischen, also ist Resonanz möglich.

Aufgabe 11.239: Abi 2004

Ein idealer Schwingkreis, der aus der Kapazität C = 44 pF und der Induktivität L = 3,0 µH besteht, schwingt ungedämpft. Zum Zeitpunkt t = 0 ist der Kondensator vollständig aufgeladen; die Spannung beträgt dann 12 V.

a) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T. (Kontrolle: T = 72 ns)

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Kondensator nach t = 0 erstmals vollständig entladen ist. Bestimmen Sie rechnerisch die Stromstärke I zu diesem Zeitpunkt. (Kontrolle: I = 46 mA)

c) Zeichnen Sie mit Hilfe der Teilaufgabe a) und b) den zeitlichen Verlauf der Spannung und den der Stromstärke innerhalb einer Schwingungsdauer.

d) Warum kann ein realer Schwingkreis nur mit Einfluss von außen zu ungedämpften Schwingungen angeregt werden? Was ist dazu prinzipiell notwendig?

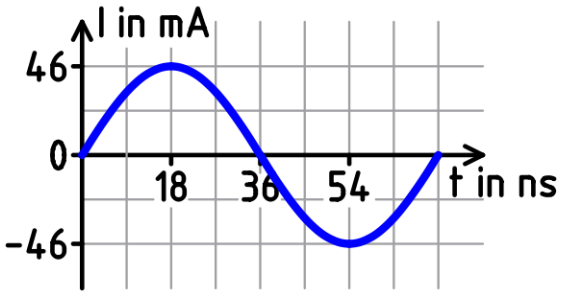
Lösung:

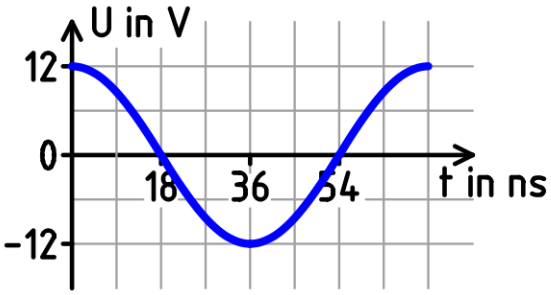
a) $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{3{,}0\cdot 10^{-6}\,H\cdot 44\cdot 10^{-12}\,F} = \underline{\underline{72{,}2\,ns}}$

b) Kondensator zum ersten mal vollständig entladen nach einer viertel Schwingungsdauer, also bei t = 18 ns. Stromstärke aus Energieerhaltung:

$$E_{el} = E_{mag} \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\cdot C\cdot U^2 = \frac{1}{2}\cdot L\cdot I^2 \;\rightarrow\; I = \sqrt{\frac{C}{L}}\cdot U = \sqrt{\frac{44\cdot 10^{-12}\,F}{3{,}0\cdot 10^{-6}\,F}}\cdot 12\,V = \underline{\underline{46\,mA}}$$

c)





d) Im ohmschen Widerstand des Schwingkreises wird permament Schwingungsenergie in Wärme umgewandelt wodurch der Schwingkreis ständig Energie abgibt und die Schwingungsamplituden immer kleiner werden. Um eine ungedämpfte Schwingung zu realisieren muss deshalb von außen ständig Energie zugeführt werden.

Aufgabe 11.240: Abi 2006; Resonanz

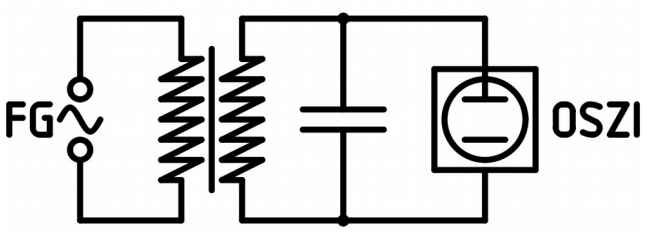
Aus einer Spule (Länge l = 25,0 mm, Durchmesser 6,0 mm, 160 Windungen) und einem Kondensator der Kapazität 4,2 nF wird ein Schwingkreis aufgebaut.

a) Durch einen Resonanzversuch soll die Eigenfrequenz bestimmt werden. Es steht ein Frequenzgenerator sowie ein Oszilloskop zur Verfügung. Skizzieren Sie einen geeigneten Versuchsaufbau und beschreiben Sie, wie die Eigenfrequenz am Oszilloskop bestimmt werden kann.

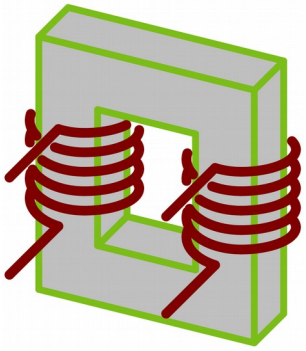
b) Berechnen Sie die Frequenz, für die Resonanz zu erwarten ist.

c) Die tatsächlich gemessene Resonanzfrequenz stimmt mit dem Ergebnis von Teilaufgabe b) nicht genau überein. Geben Sie eine kurze Begründung dafür an.

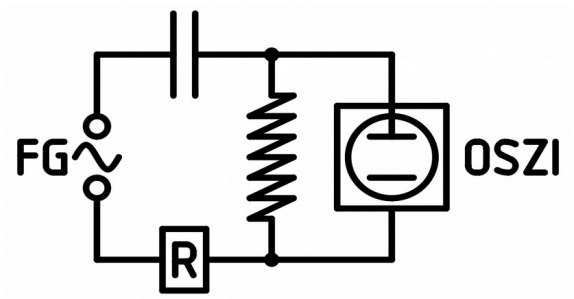
Lösung:



a) Der Frequenzgenerator FG wird an eine zweite Spule angeschlossen, die mit der Schwingkreis-Spule induktiv gekoppelt ist. Am Kondensator des Schwingkreises wird die Spannung für das Oszilloskop OSZI abgegriffen. Zur Bestimmung der Eigenfrequenz regelt man die Frequenz am Frequenzgenerator von kleinen Frequenzen zu großen Frequenzen langsam hoch und beobachtet die Amplitude der Schwingung im Schwingkreis am Oszilloskop. Im Bereich der Eigenfrequenz wird die Amplitude der Schwingung sehr hoch. Exakt bei der Eigenfrequenz ist sie maximal.



Bemerkung: Induktive Kopplung heißt, das das Magnetfeld der ersten Spule möglichst gut durch die zweite Spule geleitet wird. Dazu steckt man die beiden Spulen auf einen - möglichst ringförmig geschlossenen - gemeinsamen Eisenkern.



Bemerkung: In der Angabe steht nichts davon, dass eine zweite Spule zur Verfügung steht. Ich hab trotzdem eine benutzt, weil die Anregung durch induktive Kopplung meist die einzige Methode zur Anregung ist, die ich im Unterricht bespreche. Wenn man auf die zweite Spule verzichten will, kann man die Schaltung im Bild aufbauen. Die ist aber meiner Meinung nach schwerer zu Verstehen.

b) $L = \mu_0 \cdot A \cdot \frac{N^2}{l} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} Vs/Am \cdot \pi \cdot (0{,}003\,m)^2 \cdot \frac{160^2}{0{,}025\,m} = \underline{36{,}4\,\mu H}$

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{36{,}4 \cdot 10^{-6}\,H \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-9}\,F}} = \underline{\underline{407\,kHz}}$$

c) Die Spule ist nicht sehr lang -> die Formel für die Induktivität stimmt nicht genau. Außerdem verändert der ohmsche Widerstand des Schwingkreises die Eigenfrequenz.

<u>Aufgabe 11.241: Abi 2007; Elektromagnetischer Schwingkreis</u>

An einen Kondensator der Kapazität C = 300 µF ist zunächst die Spannung Uo = 0,40 V angelegt. Die Stromquelle wird danach abgetrennt und der Kondensator über eine Spule mit der Induktivität L = 0,35 mH entladen. Während des Entladens wird der zeitliche Verlauf der Spannung Uc am Kondensator mit einem Oszilloskop dargestellt.

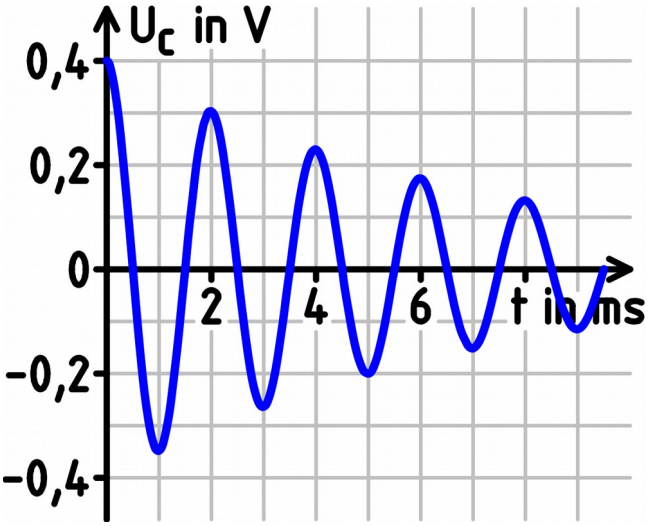
a) Fertigen Sie eine Schaltskizze zur Durchführung des obigen Versuchs an.

b) Berechnen Sie die Schwingungsdauer T dieses zunächst als ideal angenommenen Schwingkreises. (Kontrolle: T = 2,0 ms)

c) Nehmen Sie an, dass während der ersten zwei Perioden der Schwingung die Energie im Schwingkreis konstant bleibt. Berechnen Sie unter dieser Annahme den maximalen Spulenstrom Io in diesem Zeitraum. (Kontrolle: Io = 0,37 A)

d) Zeichnen Sie für die Annahmen aus Teilaufgabe c) den Verlauf der Kondensatorspannung Uc und des Spulenstroms IL in ein t-Uc- bzw. t-IL-Diagramm. Begründen Sie, warum Uc und IL nicht gleichzeitig ihre Maximalwerte annehmen.

e) Das nebenstehende Diagramm zeigt den realen Verlauf von Uc. Geben Sie zu den folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch sind und begründen Sie jeweils kurz ihre Antwort.



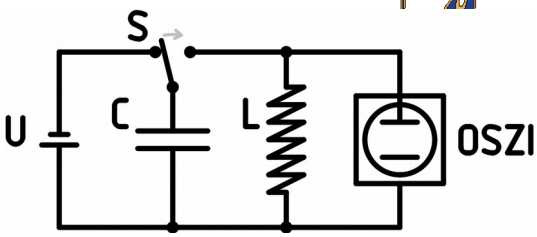
i) Nach 2,5 Perioden ist die Energie im Schwingkreis auf etwa 25% der Anfangsenergie gesunken.

ii) Das Produkt aus Uc und IL ist zeitlich konstant.

iii) Die Spule erwärmt sich.

Lösung:

a) Siehe Bild



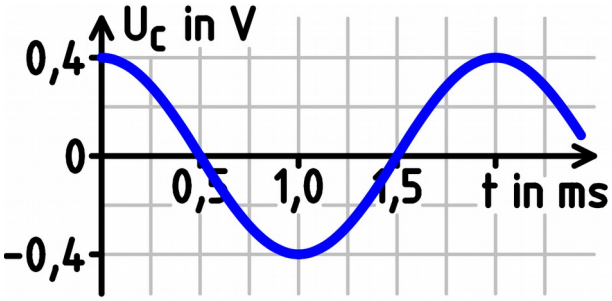
b) $T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$

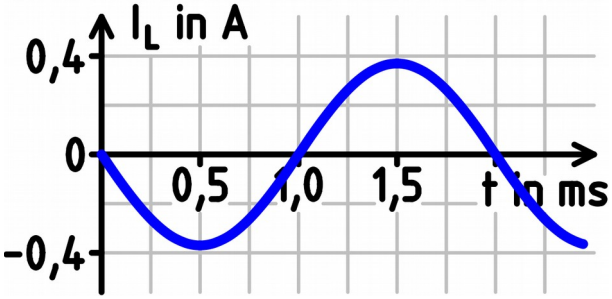
$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{0{,}35 \cdot 10^{-3}\,H \cdot 300 \cdot 10^{-6}\,F} = \underline{\underline{2{,}0\,ms}}$

c) Energieerhaltung; elektrische Energie im Kondensator wird in magnetische Energie in der Spule umgewandelt.

$$E_{el} = E_{mag} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_{max}^2 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_{max}^2 \rightarrow I_{max} = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot U_{max} = \sqrt{\frac{300 \cdot 10^{-6}\,F}{0{,}35 \cdot 10^{-3}\,H}} \cdot 0{,}40\,V = \underline{\underline{0{,}37\,A}}$$

d) Zum Vorzeichen von IL: Uc ist proportional zur Kondensatorladung Q; die Ableitung von Q ist die Stromstärke I, die an jeder Stelle des Schwingkreises gleich ist; deshalb ist IL proportional zur Ableitung von Uc; wenn also die Steigung von Uc negativ ist, dann ist auch IL negativ.





Wenn Uc maximal ist, dann ist der Kondensator maximal aufgeladen und die elektrische Energie im Kondensator ist maximal. Wenn sich der Kondensator dann wieder entlädt sinkt die elektrische Energie im Kondensator. Weil die Gesamtenergie im Schwingkreis konstant ist - laut Annahme - muss dann die magnetische Energie in der Spule und damit auch die Stromstärke in der Spule steigen. D.h. die Stromstärke hat vorher nicht ihren maximalen Wert gehabt. (<- Man kann das auch ganz anders erklären, aber irgendwie hab ich das Gefühl, die Frage zielt darauf.)

e) drei Teile

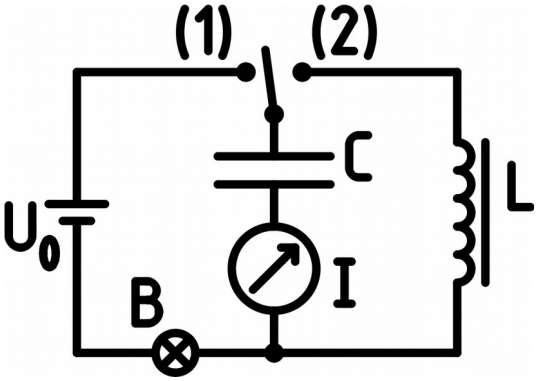
i) Nach 2,5 Perioden, bei t = 5 ms ist gerade maximale Kondensatorspannung (<- gesamte Schwingungsenergie als elektrische Energie im Kondensator) und zwar die Hälfte der Anfangsspannung. Wegen der Proportionalität der elektrischen Energie zum Quadrat der Kondensatorspannung ist die elektrische Energie - und deshalb auch die Gesamtenergie - dann nur noch ein Viertel der Anfangsenergie, also 25%.

ii) Uc und IL nehmen beide immer wieder den Wert Null an, die meiste Zeit sind aber beide nicht Null. Schon deshalb kann das Produkt nicht konstant sein.

iii) Am Diagramm erkennt man, dass die Schwingungsenergie sinkt, dass also Schwingungsenergie im ohmschen Widerstand der Spule umgewandelt wird. Deshalb wird die Spule sich leicht erwärmen.

Aufgabe 11.242: Abi 2008; Schwingkreis

In der abgebildeten Schaltung ist die Kapazität des Kondensators C = 1,2 mF und die Spannung an der Spannungsquelle Uo = 5,0 V. Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises beträgt fo = 2,0 Hz.



a) Wenn der Schalter in Stellung (1) gebracht wird, leuchtet das Lämpchen B kurz auf. Erklären Sie diese Beobachtung.

b) Der Schalter wird nun in Stellung (2) gebracht. Beschreiben und erläutern Sie die zu erwartende Beobachtung am Strommessgerät über einen längeren Zeitraum.

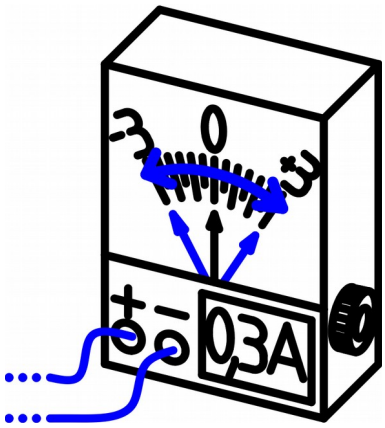
c) Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung Uc(t) für die erste Sekunde nach dem Umschalten auf (2).

d) Berechnen Sie die Induktivität L. Die ohmschen Widerstände von Messgerät und Spule können dabei vernachlässigt werden. (Kontrolle: L = 5,3 H)

e) Um wie viel Prozent ändert sich die Resonanzfrequenz fo, wenn man den Kondensator durch einen sonst baugleichen Kondensator mit doppelter Plattenfläche ersetzt. Wird fo kleiner oder größer?

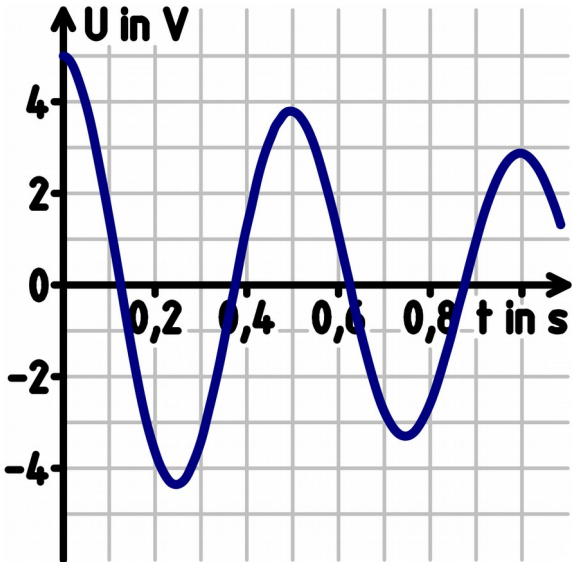
Lösung:

a) Wenn der Schalter geschlossen wird, lädt sich der Kondensator auf und es fließt Strom, das Lämpchen leuchtet. Beim Aufladen des Kondensators steigt seine Ladung und wegen Q = C·U die Spannung am Kondensator. Sobald die Kondensatorspannung genauso groß ist wie die Spannung der Spannungsquelle Uo, kann kein Strom mehr fließen und das Lämpchen leuchtet nicht mehr.



b) Nach Umlegen des Schalters beginnt er Schwingkreis mit seiner Eigenfrequenz zu schwingen. Die Anzeige des Strommessgerätes schwingt - zwischen maximaler positiver Amplitude und maximaler negativer Amplitude - mit derselben Frequenz. Wegen des ohmschen Widerstands ist der Schwingkreis gedämpft und die Amplitude der schwingenden Anzeige wird immer kleiner, bis schließlich kein Ausschlag mehr erkennbar ist.

c) Siehe Bild: Schwingungsdauer 0,5 s; bei Zeitpunkt t = 0 maximale Kondensatorspannung (Schalter umlegen); Dämpfung



d)

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C} \;\rightarrow\; L = \frac{1}{C}\cdot\left(\frac{T}{2\cdot\pi}\right)^2$$

$$L = \frac{1}{1{,}2\cdot 10^{-3}\,F}\cdot\left(\frac{0{,}5\,s}{2\cdot\pi}\right)^2 = \underline{\underline{5{,}28\,H}}$$

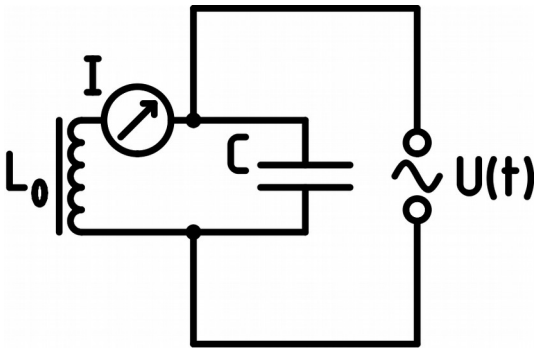
e) Doppelte Plattenfläche -> doppelte Kapazität;

wegen f ~ 1/√C ist f = 1/√2 · fo ≈ 0,707 · fo

Die Frequenz wird also um 29,3% kleiner.

<u>Aufgabe 11.243: Abi 2011; Foto bei Rot</u>

Um Fahrzeuge, die trotz roter Ampel eine Kreuzung befahren, fotografisch erfassen zu können, ist zwischen Haltelinie und Kreuzungsmitte eine rechteckige Drahtspule in den Straßenbelag eingelassen. Ihre Ausdehnung in Fahrtrichtung ist gegenüber der Fahrzeuglänge vernachlässigbar. Die Spule ist Bestandteil eines Schwingkreises, der von hochfrequentem Wechselstrom durchflossen wird.



Die Abbildung zeigt die Schaltskizze eines Modellexperiments. Ein Schwingkreis, gebildet aus einer Spule mit der Induktivität L = 200 μH und einem Kondensator mit der

Kapazität C = 0,14 µF, wird von einer hochfrequenten Wechselspannung in Resonanz angeregt. Die Stromstärke I im Schwingkreis wird gemessen.

a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenz f des Schwingkreises. (Kontrolle: f = 30 kHz)

Befindet sich ein Fahrzeug im Bereich der Drahtspule, so ändert sich deren Induktivität. Im Modellversuch wird dazu ein Eisenkern in die Spule geschoben.

b) Die Eigenfrequenz ändert sich dabei um 1,0 kHz. Geben Sie an, ob die Eigenfrequenz steigt oder sinkt und begründen Sie ihre Entscheidung. Berechnen Sie die prozentuale Änderung der Induktivität.

c) Erläutern Sie, wie sich die Änderung der Eigenfrequenz an der Stromstärke I im Schwingkreis bemerkbar macht, wenn sich die Anregungsfrequenz nicht ändert.

d) Ein Fahrzeug über der Schleife wird durch die Änderung der Stromstärke im Schwingkreis registriert. Schätzen Sie ab, wie lange diese Änderung für einen PKW im Ortsverkehr andauert. Wählen Sie hierzu sinnvolle Ausgangsgrößen.

<u>Lösung:</u>

a) $$f = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{200\cdot 10^{-6}\,H\cdot 0{,}14\cdot 10^{-6}\,F}} = \underline{\underline{30{,}1\,kHz}}$$

b) Durch den Eisenkern steigt die Induktivität der Spule; wegen f ~ 1/√L wird dadurch die Eigenfrequenz kleiner.

Wegen L ~ 1/f² ist L' = 1/(29/30)² · L ≈ 1,070 · L

Die Induktivität ist also um 7,0% gestiegen.

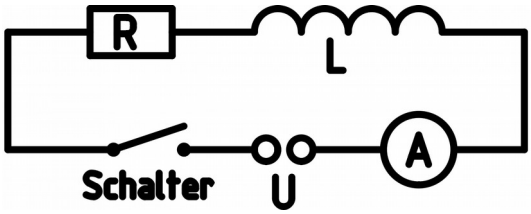
c) Wenn sich die Eigenfrequenz ändert, wird der Schwingkreis nicht mehr in Resonanz angeregt. In Resonanz - also bei Anregung mit der Eigenfrequenz - erhält man maximale Schwingungsamplitude. Durch das Verlassen des Resonanz-Bereichs sinkt deshalb die Stromstärke erheblich.

d) Ein Auto ist etwa 4 bis 5 Meter lang, die Ausdehnung der Drahtspule ist vernachlässigbar. Die Geschwindigkeit ist etwa 50 km/h also 27,8 m/s.

Mit v = s/t -> t = s/v = (4,5/27,8) s ≈ 0,16 s

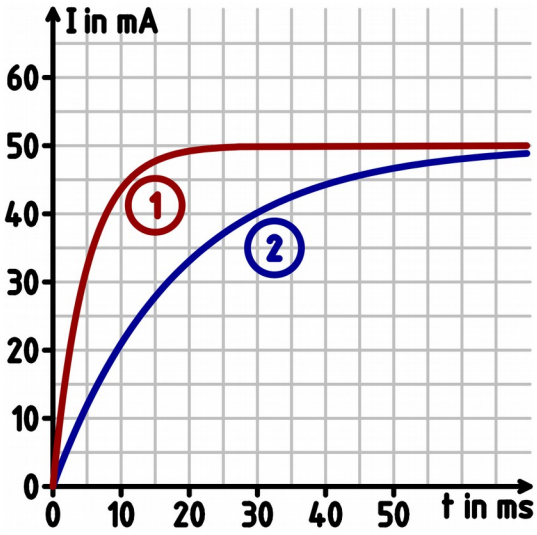
Die zeitliche Dauer des Einbrechens der Stromstärke ist also im Bereich von Zehntel Sekunden.

Aufgabe 11.244: G8 Abi 2011; Spulenexperimente



Eine Spule mit vernachlässigbarem ohmschen Widerstand, in die ein Eisenkern eingeführt werden kann, wird mit einem Widerstand R in Reihe gechaltet. Die elektrische Quelle liefert eine konstante Spannung von 10 V. Beim Einschaltvorgang wird die Stromstärke in Abhängigkeit von der Zeit aufgenommen.

Es wird sowohl eine Messung ohne als auch eine Messung mit Eisenkern durchgeführt. Man erhält die beiden Messkurven im nebenstehenden Diagramm.



a) Erklären Sie, weshalb in beiden Fällen die Stromstärke nicht sofort ihren Maximalwert erreicht. Entscheiden und begründen Sie, bei welcher Messung der Eisenkern verwendet wurde.

b) Begründen Sie, warum sich in beiden Fällen nach einiger Zeit die gleiche Stromstärke einstellt. Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms die Größe des verwendeten Widerstands R -> Zusatzfrage -> und die Induktivität der Spule mit der Kurve (2).

Die Spule besitzt mit Eisenkern eine Induktivität von 3,8 H (mit dieser Zahl soll weitergearbeitet werden). Aus dieser Spule und einem Kondensator soll ein Schwingkreis mit der Schwingungsdauer 20 ms aufgebaut werden.

c) Berechnen Sie, welche Kapazität der Kondensator haben muss.

Der Kondensator wird auf 10 V aufgeladen, von der Quelle getrennt und mit der Spule verbunden.

d) Skizzieren Sie das zu erwartende t-Uc-Diagramm für die ersten 40 ms, wobei Uc die Spannung am Kondensator ist. Geben Sie zudem die Periodendauer für die im Kondensator gespeicherte Energie an.

e) Der Eisenkern wird nun aus der Spule entfernt. Erklären Sie, wie sich dies qualitativ auf die Frequenz der Schwingung auswirkt.

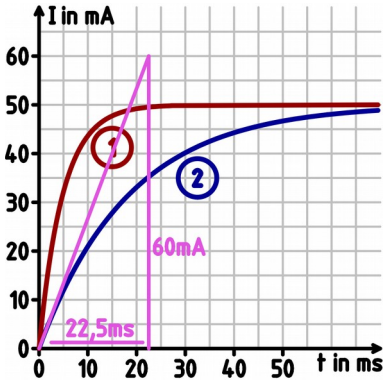
Lösung:

a) Wegen Ui = -L·dI/dt erzeugt eine Veränderung der Stromstärke in der Spule eine Selbstinduktionsspannung an der Spule, die der Veränderung entgegengerichtet ist. In diesem Fall ist die Selbstinduktionsspannung an der Spule der Spannung des Netzgerätes entgegengerichtet und bremst deshalb das Ansteigen der Stromstärke.

Zu Anfang ist die Stromstärke gleich Null und die gesamte Spannung von 10V fällt als Selbstinduktionsspannung an der Spule ab. Wegen Uo = -Ui = L·dI/dt führt eine Vergrößerung von L (durch einen Eisenkern) zu einer Verringerung von dI/dt, d.h. das t-I-Diagramm wird flacher. Deshalb gehört Kurve (2) zur Spule mit Eisenkern.

b) Im Verlauf der Zeit wird das t-I-Diagramm immer flacher, d.h. dI/dt wird immer kleiner und wegen Ui = -L·dI/dt wird die Selbstinduktionsspannung an der Spule immer kleiner. Schließlich ist dI/dt und damit Ui fast gleich Null und die gesamte Spannung fällt am Widerstand als Uo = UR = R·I ab. Die Stromstärke ist dann konstant gleich I = Uo/R , und unabhängig von der Induktivität der Spule.

$$R=\frac{U_0}{I_{grenz}}=\frac{10\,V}{0{,}05\,A}=\underline{\underline{200\,\Omega}}$$



Zu Anfang fällt die gesamte Spannung als Selbstinduktionsspannung an der Spule ab. dI/dt erhält man als Tangentensteigung bei t = 0.

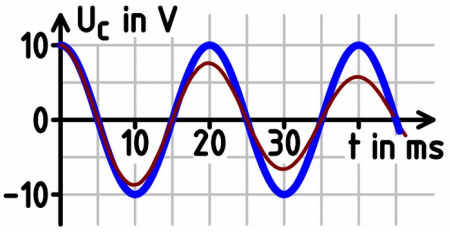
$$\dot{I}=\frac{dI}{dt}=\frac{60\,mA}{22{,}5\,ms}=\underline{2{,}67\,A/s}$$

$$U_0=-U_i=L\cdot\frac{dI}{dt}\ \rightarrow\ L=\frac{U_0}{\dot{I}}=\frac{10\,V}{2{,}67\,A/s}=\underline{\underline{3{,}75\,H}}$$

c) $$T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}\ \rightarrow\ C=\frac{T^2}{4\cdot\pi^2\cdot L}=\frac{(0{,}02\,s)^2}{4\cdot\pi^2\cdot 3{,}8\,H}$$

$$\underline{\underline{C=2{,}67\,\mu F}}$$

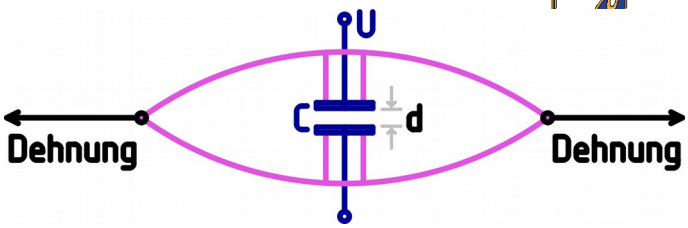
d) Siehe Bild; gedämpft (blau) oder ungedämpft (rot), gilt beides



Periodendauer für Kondensatorenergie: 10ms

e) Wegen $T=2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}$ führt eine kleinere Induktivität zu einer kleineren Schwingungsdauer und deshalb zu einer höheren Frequenz.

Aufgabe 11.245: Abi 2012; Kapazitiver Dehnungsmessstreifen



In einem Dehnungsmessstreifen wird der Plattenabstand d eines eingebauten Messkondensators durch Dehnung verringert. Als Kondensator wird ein luftgefüllter Plattenkondensator mit quadratischen Platten der Seitenlänge 4,0 mm verwendet, der im ungedehnten Ausgangszustand des Messstreifens einen Plattenabstand von 1,0 mm hat.

a) Berechnen Sie die Kapazität C des Messkondensators im Ausgangszustand und seine Ladung bei einer anliegenden Spannung von 12,0 V. (Kontrolle: C = 0,14 pF)

b) Der Messkondensator wird nach dem Ladevorgang von der Stromquelle getrennt. Beschreiben und begründen Sie, ob und gegebenenfalls wie sich die Ladung, die Kapazität und die Spannung des Kondensators bei Dehnung des Messstreifens ändern.

Nun bildet der Messkondensator zusammen mit einer Spule (L = 20 mH) einen elektromagnetischen Schwingkreis.

c) Berechnen Sie die Eigenfrequenz des Schwingkreises ohne Dehnung des Messstreifens.

d) Leiten Sie eine Formel für die Eigenfrequenz f des Schwingkreises in Abhängigkeit vom Plattenabstand d her. Wie verändert sich die Eigenfrequenz des Schwingkreises, wenn aufgrund einer Dehnung des Messstreifens der Plattenabstand halbiert wird?

Lösung:

a) $C=\epsilon_0\cdot\frac{A}{d}=8{,}85\cdot10^{-12}\,As/(Vm)\cdot\frac{(0{,}004\,m)^2}{0{,}001\,m}=\underline{\underline{0{,}14\cdot10^{-12}\,F}}$

$Q=C\cdot U=14\cdot10^{-12}\,F\cdot12\,V=\underline{1{,}7\,pC}$

b) Ladung: Weil die beiden Kondensatorplatten nun isoliert sind, bleibt die Ladung gleich.

Kapazität: Wegen $C=\epsilon_0\cdot\frac{A}{d}$ wird bei kleiner werdendem d die Kapazität des Kondensators größer.

Spannung: Wegen $U=\frac{Q}{C}$ wird bei konstanter Ladung und größer werdender Ladung des Kondensators die Spannung kleiner.

c) $$f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{20\cdot 10^{-3}H\cdot 0{,}14\cdot 10^{-12}F}}=\underline{\underline{3{,}0\,MHz}}$$

d) $$f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot\epsilon_0\cdot\frac{A}{d}}}=\frac{\sqrt{d}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot\epsilon_0\cdot A}}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{d}{d_0}}\cdot\sqrt{d_0}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot\epsilon_0\cdot A}}=\frac{\sqrt{d_0}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot\epsilon_0\cdot A}}\cdot\sqrt{\frac{d}{d_0}}=f_0\cdot\sqrt{\frac{d}{d_0}}=\underline{\underline{3{,}0\,MHz\cdot\sqrt{\frac{d}{d_0}}}}$$

Wenn d halbiert wird, dann gibt √(d/do) den Faktor $\sqrt{\frac{1}{2}}$. D.h. die Frequenz verringert sich um den Faktor 0,71.

12 Elektromagnetische Wellen

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen allein durch die in ihnen enthaltenen Felder – ohne Hilfe einer elektrischen Ladung - zeigt, dass die Felder tatsächlich real existieren und nicht nur ein geistiger Krückstock sind, um die Wechselwirkungen zwischen Ladungen zu beschreiben.

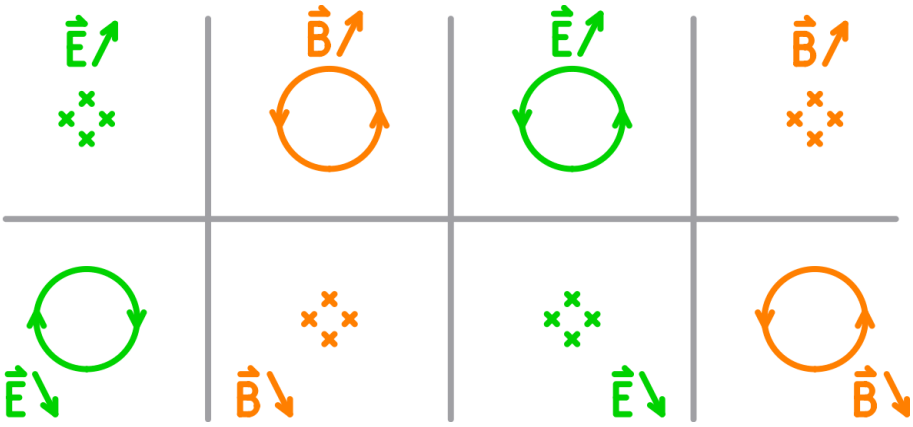
12.1 Ausbreitung im Vakuum

Sich verändernde elektrische oder magnetische Felder erzeugen "ringförmige" magnetische oder elektrische Felder, welche das ursprüngliche Feld "umschließen". Für die Richtung der so erzeugten "ringförmigen" Felder benutzen wir Regeln für die rechte Hand (Daumen ausgestreckt, Finger gekrümmt).

- ➔ Der Daumen zeigt entgegen der Änderung des magnetischen Feldes, die gekrümmten Finger geben die Richtung des dadurch entstehenden elektrischen Feldes (Induktionsgesetz).
- ➔ Der Daumen zeigt in Richtung der Änderung des elektrischen Feldes, die gekrümmten Finger geben die Richtung des dadurch entstehenden magnetischen Feldes.
- ☠ Nur wenn ein Feld sich verändert, dann erzeugt es ein anderes.

Aufgabe 12.246:

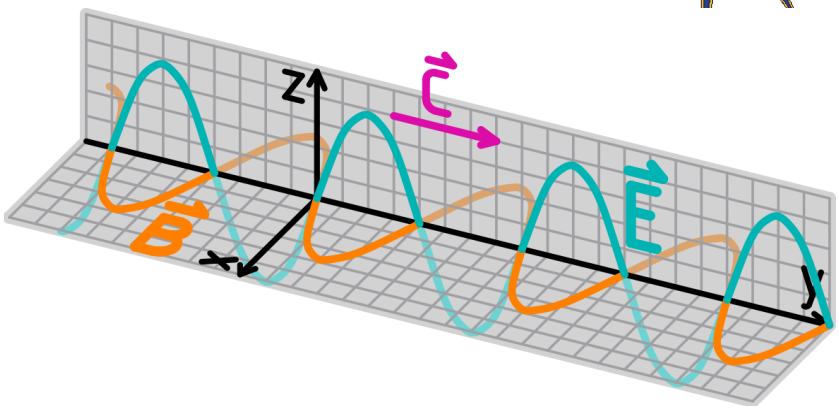
Die Bilder zeigen sich verändernde Felder. Zeichne jeweils die dadurch entstehenden Felder in der Zeichenebene ein.



Wellenausbreitung:

Ein sich periodisch veränderndes elektrisches Feld erzeugt ein Magnetfeld, das sich auch wieder periodisch ändert. Dieses erzeugt dann wieder ein elektrisches Feld, das sich auch wieder periodisch ändert usw.

Gestalt der Welle:



Das Bild zeigt die Felder einer sich in y-Richtung ausbreitenden Welle. Die elektrischen Feldvektoren schwingen in z-Richtung. Die magnetischen Feldvektoren schwingen in x-Richtung. Im Vakuum schwingen die beiden Feldvektoren der Welle an jedem Punkt gleichphasig.

Ausbreitungsrichtung:

Die Ausbreitungsrichtung ergibt sich aus der Dreifinger-Regel der rechten Hand. Der Daumen zeigt in die Richtung des E-Feldes an einem beliebigen Punkt. Der Zeigefinger zeigt in die Richtung des B-Feldes im selben Punkt. Der Mittelfinger gibt die Richtung der Ausbreitung.

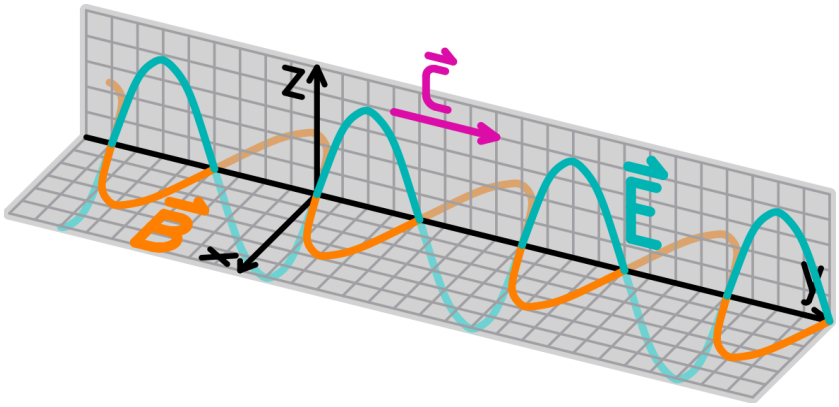
Ausbreitungsgeschwindigkeit:

Im Vakuum breiten sich elektromagnetische Wellen mit Lichtgeschwindigkeit c aus. Für die Lichtgeschwindigkeit c gilt der Zusammenhang:

$$c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

In einem Medium ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit etwas geringer (Brechzahl). Falls nicht ausdrücklich anders verlangt benutzen wir grundsätzlich den genäherten Wert $c=3\cdot 10^8 m/s$, d.h. in einer Nanosekunde bewegt sich eine Welle um 0,3m vorwärts.

Aufgabe 12.247:

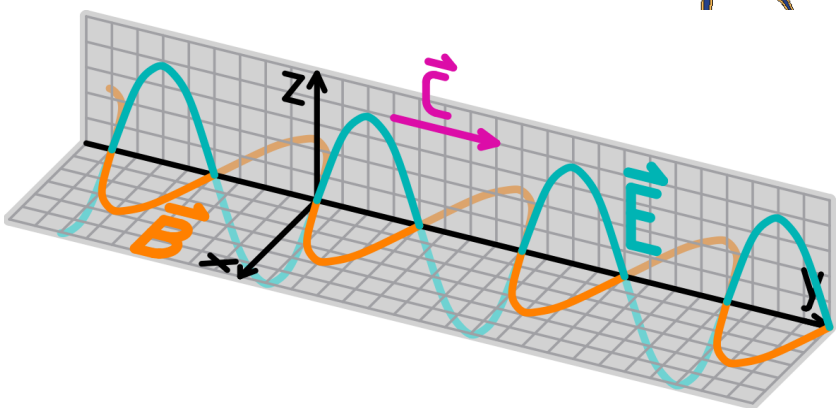


Das Bild rechts zeigt eine EM-Welle zum Zeitpunkt t=0. In y-Richtung entspricht ein Kästchen 3cm.

a) Skizziere in das selbe Bild die Gestalt der Welle für den Zeitpunkt t=0,2ns.

b) Skizziere die Welle zum Zeitpunkt t=0,4ns.

c) Wie groß sind Wellenlänge und Frequenz der Welle?

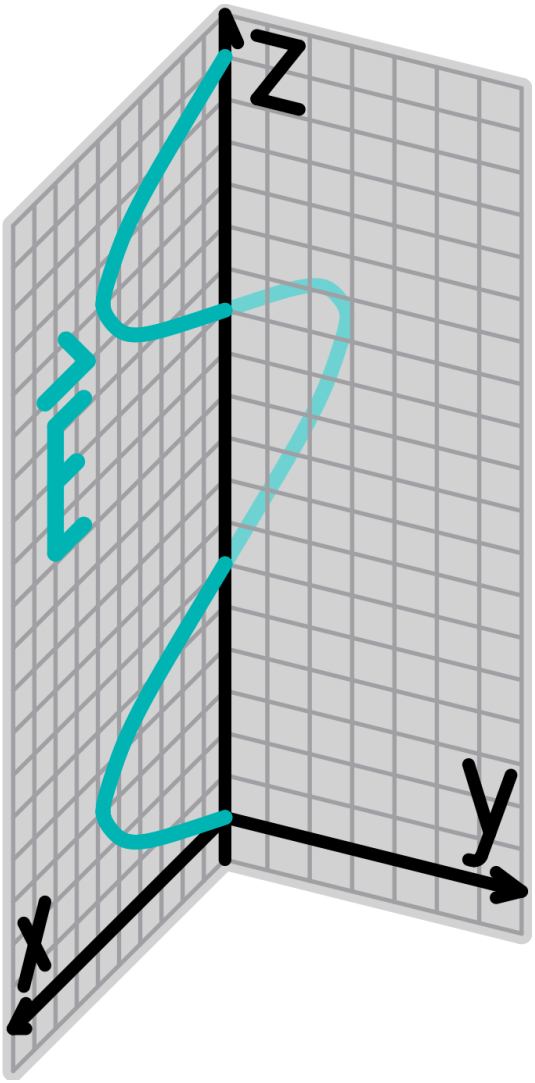


Aufgabe 12.248:

Das Bild zeigt das Elektrische Feld einer sich in positive z-Richtung ausbreitenden Welle zum Zeitpunkt t=0. Der elektrische Feldvektor schwingt in x-Richtung. In z-Richtung entspricht ein Kästchen 3cm.

a) Skizziere das Magnetfeld dieser Welle zum Zeitpunkt t=0.

b) Skizziere das elektrische Feld der Welle zum Zeitpunkt t=0,3ns.



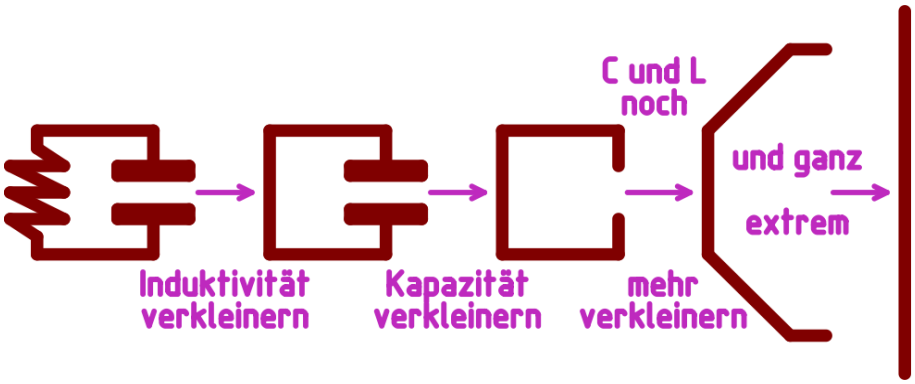
Bevor sich eine EM-Welle ausbreiten kann, muss sie zuerst mal erzeugt werden. Davon handelt der folgende Abschnitt.

12.2 Erzeugung von EM-Wellen: Hertzscher Dipol

Für die Frequenz eines EM-Schwingkreises gilt die Thomsongleichung

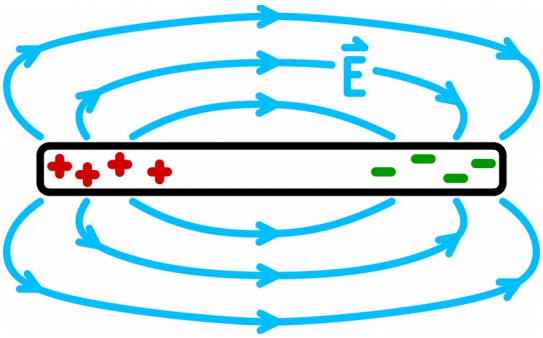
$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$$

Je kleiner Induktivität L und Kapazität C des Schwingkreises, desto höher ist die Eigenfrequenz. Für eine sehr hohe Frequenz braucht man also eine Spule mit sehr wenig Windungen und einen Kondensator mit sehr kleiner Plattenfläche und großem Plattenabstand. Im Extremfall erhält man als Schwingkreis ein gerades Leiterstück wie eine Antenne, einen Hertzschen Dipol.



Schwingung im Dipol (analog zum bekannten Schwingkreis)

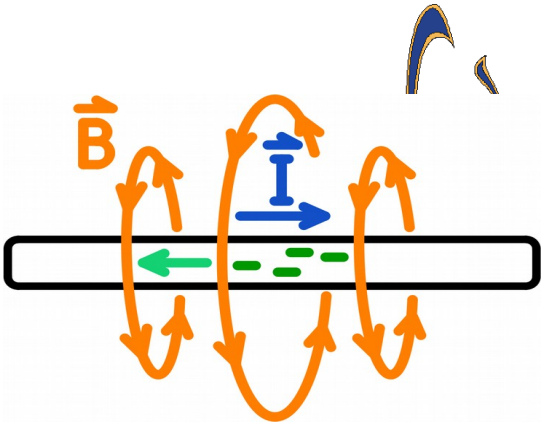
Zu Anfang seien die Leitungselektronen am rechten Ende des Dipols gehäuft. Wie der Ausgangszustand hergestellt wurde, soll jetzt nicht unser Problem sein. Der Dipol besitzt ein elektrisches Feld, das an den Enden des Dipols besonders stark ist. In der Mitte des Dipols ist es am schwächsten. Die Energie liegt als elektrische Energie vor (Kondensator geladen).



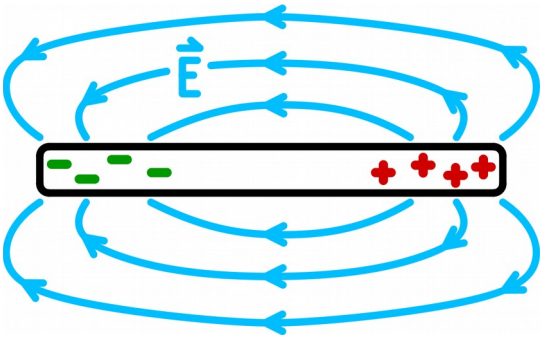
➔ Das elektrische Potential ist am größten direkt an der Quelle des elektrischen Feldes und am kleinsten direkt an der Senke des elektrischen Feldes, also an den Rändern des Stabes. In der Mitte des Stabes ist das Potential gleich Null.

Durch elektrische Kräfte angetrieben bewegen sich die verschobenen Elektronen nach links und erzeugen einen Strom und damit ein Magnetfeld. Die Energie liegt als magnetische Energie vor. Durch die Mitte des Dipols müssen alle Elektronen durch. Je weiter man an ein Ende des Dipols geht, desto geringer ist der Anteil der Elektronen, die an dieser Stelle vorbei fließen.

➔ Deshalb sind Stromstärke und Magnetfeld in der Mitte des Stabes am größten, ganz am Rand des Dipols sind B-Feld und Stromstärke gleich Null.



Zum Zeitpunkt des Ladungsausgleichs sind keine elektrischen Kräfte mehr vorhanden um den Strom anzutreiben und die Stromstärke sinkt.



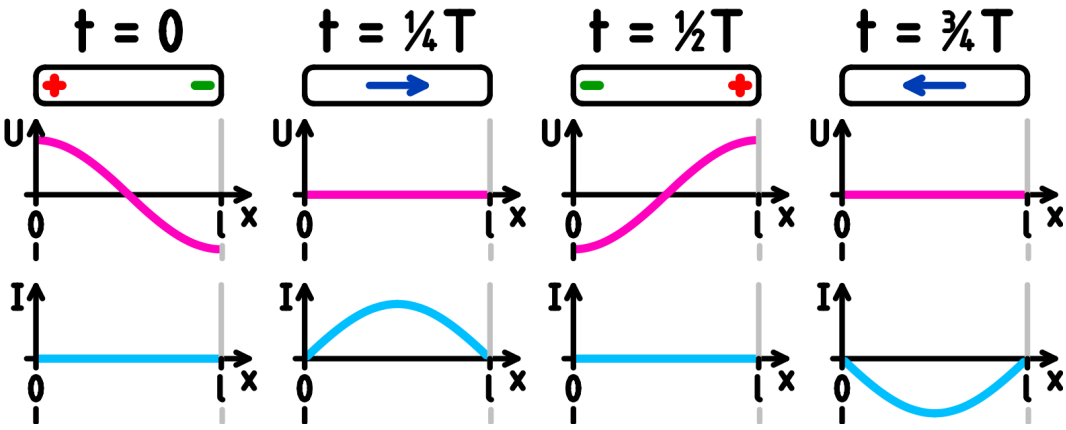
Das zusammenbrechende Magnetfeld induziert dann eine Spannung im Dipol, die nach der Regel von Lenz versucht den Strom aufrecht zu erhalten. Dadurch entsteht eine erneute Ladungstrennung und der Ausgangszustand ist spiegelverkehrt wieder hergestellt.

Auf diese Weise erzeugt der Dipol in seiner Nähe sich ständig verändernde E-und B-Felder, die anschließend zur Wellenausbreitung führen.

Wenn sich also Elektronen durch ein Stück Draht bewegen (elektrischer Stromfluss) entstehen keine EM-Wellen. Erst wenn sich die Elektronen hin und her bewegen, also ständig beschleunigt werden, entstehen EM-Wellen. Ganz allgemein gilt:

> Wenn eine elektrische Ladung beschleunigt wird,
> dann erzeugt sie elektromagnetische Wellen.

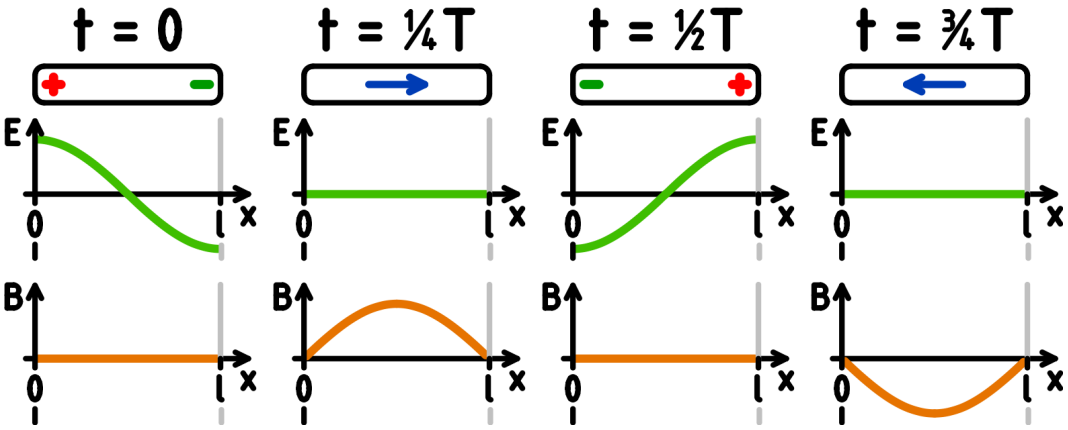
<u>Spannung, Stromstärke, Feldstärken und Ladungsdichte entlang des Dipols</u>



Die Überlegungen oben führen zu den im Bild gezeigten Diagrammen. Mit Spannung meint man eigentlich Potential, also die Spannung zwischen dem jeweiligen Punkt und dem Nullpotential. Spannung und Stromstärke bilden also eine stehende Welle im Dipol von einer halben

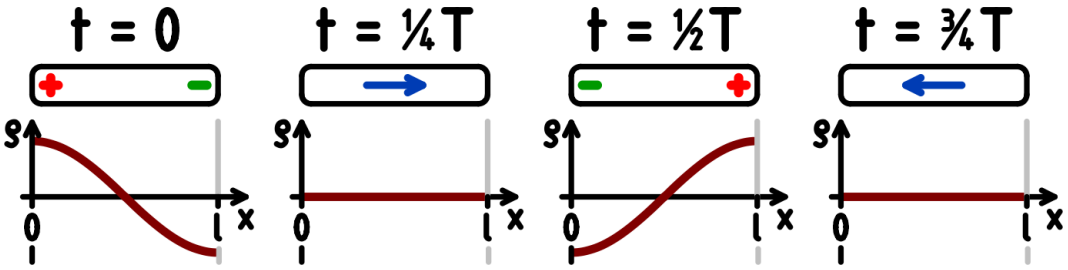
Wellenlänge. Die Spannung hat am Rand Schwingungsbäuche, die Stromstärke hat am Rand Schwingungsknoten.

Dasselbe kann man natürlich auch mit der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte machen (siehe Bild).

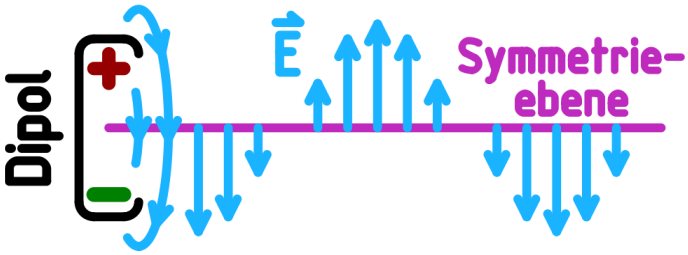


Die Diagramme sehen alle gleich aus. Man muss nur wissen, welche Größen am Rand maximal sind und welche Größen in der Mitte maximal sind. Damit wir für die Ladungsverteilung längs des Dipols ein Diagramm zeichnen können, brauchen wir ein neues Formelzeichen. Für die Ladungsdichte schreibt man ρ (kleines griechisches "rho"). An Punkten mit einem positiven Ladungsüberschuss ist die Ladungsdichte positiv, bei negativem Ladungsüberschuss negativ.

In der Mitte des Dipols gleichen sich positive (Atomrümpfe) und negative (Leitungselektronen) Ladungen zu jedem Zeitpunkt aus, deshalb ist hier die Ladungsdichte immer Null.



Polarisation

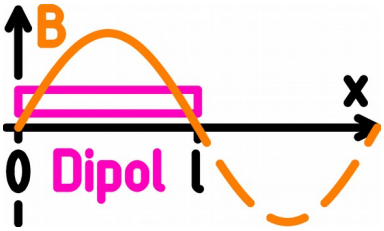


Wir betrachten die elektrischen Feldvektoren in der Symmetrieebene des Dipols. In dieser Ebene sind die E-Feld-Vektoren alle parallel zum Dipol, insbesondere sind alle parallel zueinander.

Ein Wellenfeld, bei dem alle E-Feld-Vektoren parallel zueinander sind nennt man polarisiert. Die B-Feld-Vektoren sind dann auch alle parallel zueinander, und zwar senkrecht zu den E-Feld-Vektoren.

Die meisten Strahlungsquellen liefern nicht polarisierte EM-Wellen. Um ein Wellenfeld zu polarisieren braucht man eine für die spezielle Wellenlänge geeignete Vorrichtung.

Frequenz der Dipolschwingung



Betrachtet man zum Beispiel die Amplitude des Magnetfeldes längs des Dipols, erkennt man einen Schwingungsbauch in der Mitte und Schwingungsknoten an den Enden des Dipols. Die Länge des Dipols ist also die Hälfte der Wellenlänge der EM-Welle. Die Frequenz des Wellenfeldes erhält man aus $c = \lambda \cdot f$.

Hertzscher Dipol: $l = \frac{\lambda}{2}$ -> Eigenfrequenz: $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2 \cdot l}$

Ein solcher Dipol heißt deshalb auch Lambda-Halbe-Dipol. Wie jedes schwingungsfähige System schwingt der Dipol mit der Frequenz, mit der er angeregt wird.

➔ Die Anregung funktioniert aber am besten (Resonanz), wenn der Dipol mit seiner Eigenfrequenz angeregt wird.

Wird der Dipol von einer EM-Welle angeregt, dann werden die Elektronen im Dipol durch die Kraft des elektrischen Feldes der Welle zum Schwingen gebracht. Die Schwingung kann jedoch nur in Richtung des Stabes erfolgen. Deshalb funktioniert

➔ die Anregung am besten, wenn der E-Feld-Vektor der anregenden Welle parallel zum Dipol ist, wenn also

➔ Sende- und Empfangsdipol parallel zueinander sind.

Bemerkung: Das alles war die Grundschwingung des Dipols. Der Hertzsche Dipol kann auch in einer Oberschwingung gut angeregt werden. Dafür muss man nur berücksichtigen, dass die stehende Welle im Dipol an der Rändern des Dipols Schwingungsknoten hat. Dadurch ergibt sich für die möglichen Wellenlängen:

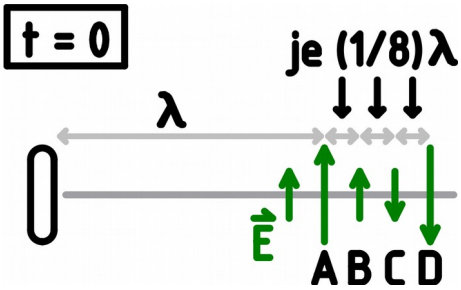
$$l = k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad ; \quad k \in \mathbb{N}$$

12.3 Feldlinien der Dipolwelle

In großem Abstand vom Dipol erzeugen sich E- und B-Felder gegenseitig und die Wirkung des Dipols selbst ist gar nicht mehr spürbar. In der Nähe des Dipols dagegen dominiert die Wirkung des Dipols und die gegenseitige Beeinflussung der Felder ist vernachlässigbar. Im Modell stellen wir uns eine positive und eine negative Punktladung vor, die innerhalb unseres Dipols schwingen.

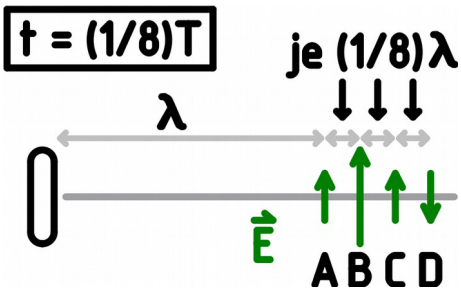
Um die Gestalt der Felder zu verstehen, muss man berücksichtigen, dass sich die EM-Felder mit Lichtgeschwindigkeit $c = \lambda \cdot f = \lambda / T$ ausbreiten. Das bedeutet, dass die momentane Gestalt der Felder an einem Punkt P1 in einer Entfernung von $1 \cdot \lambda$ vom Dipol nicht von der momentanen Ladungsverteilung und Stromstärke im Dipol erzeugt wird, sondern von derjenigen, die in der Zeit um $1 \cdot T$ zurückliegt. Je weiter weg ein Punkt vom Dipol ist, desto später spürt er also die Veränderungen von Ladungsverteilung und Stromstärke im Dipol. Um sich die Gestalt der EM-Felder in der Umgebung des Dipols zu überlegen, müsste man also für alle Punkte entsprechend ihrer Entfernung vom Dipol in der Zeit zurückdenken, wie damals die Ladungsverteilung und Stromstärke im Dipol war. Dafür reicht aber der Arbeitsspeicher der meisten Menschen nicht aus, deshalb werden wir zuerst mal einen Trick entwickeln, mit dem wir viel einfacher überlegen können.

Als Beispiel betrachten wir die vier Punkte A, B, C und D, die einen paarweisen Abstand von $\frac{1}{8} \cdot \lambda$ haben. Wir gehen davon aus, dass wir die Felder zum Zeitpunkt $t = 0$ kennen und wollen rausfinden, wie die Felder zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{8} \cdot T$ aussehen.



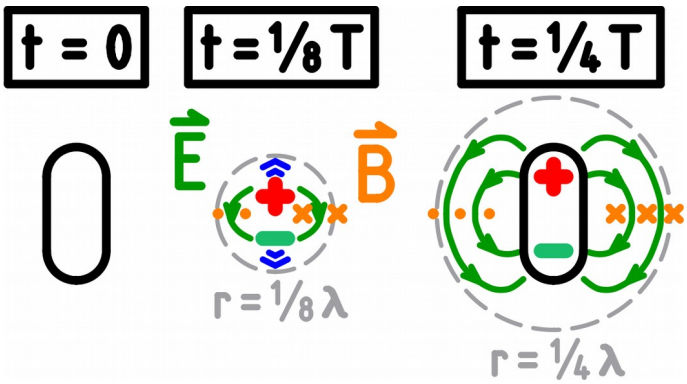
Das momentane Feld im Punkt A wird von der Ladungsverteilung zum Zeitpunkt $t = -1 \cdot T$ erzeugt, das im Punkt B von der Ladungsverteilung zum Zeitpunkt $t = -1\frac{1}{8} \cdot T$. Wenn wir in der Zeit um $\frac{1}{8} \cdot T$ voranschreiten, dann wird das Feld im Punkt B von der Ladungsverteilung zum Zeitpunkt $t = -1\frac{1}{8} \cdot T + \frac{1}{8} \cdot T = -1 \cdot T$ erzeugt, also von d e r Ladungsverteilung, die das momentane ($t = 0$) Feld im Punkt A erzeugt.

Deshalb ist das Feld im Punkt B zum späteren Zeitpunkt $t = \frac{1}{8} \cdot T$ ziemlich genau so, wie es im Moment ($t = 0$) gerade im Punkt A ist. Der Punkt B erbt also das Feld von A, C erbt von B und D erbt von C. Die Feldvektoren wandern in der Zeitspanne $\Delta t = \frac{1}{8} \cdot T$ um $\frac{1}{8} \cdot \lambda$ vom Dipol weg nach außen.



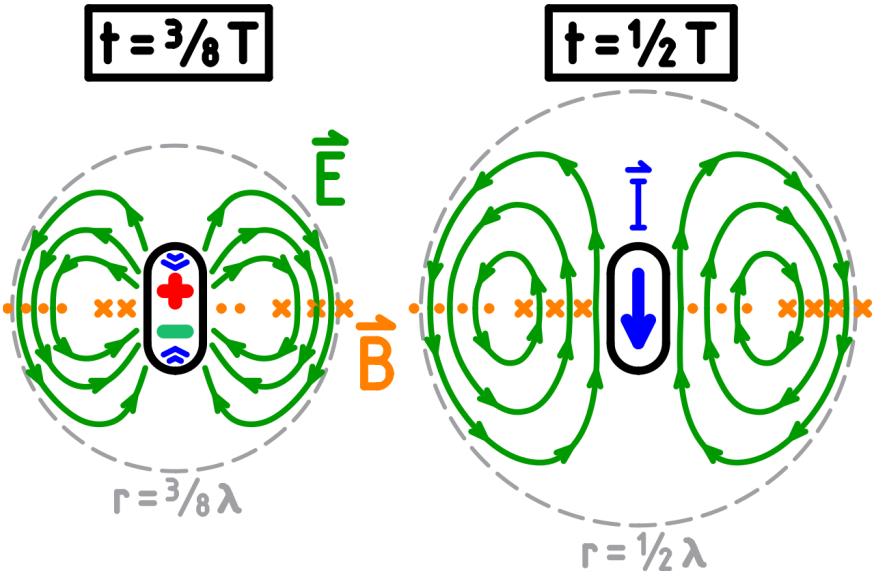
Das erleichtert das Nachdenken erheblich. Wir können im Verlauf der Zeit einfach alle Feldlinien vom Dipol weg nach außen schieben und müssen uns nur die Feldlinien, die direkt am Dipol entstehen, neu überlegen.

Wir betrachten einen Dipol, der zum Zeitpunkt $t = 0$ zu schwingen beginnt. Vorher gibt es keinen Strom und keine Ladungstrennung, also auch keine Felder.



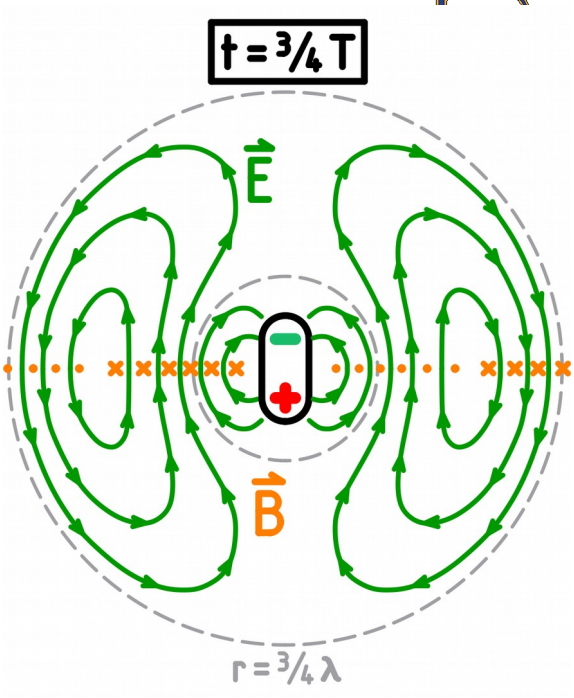
Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnen sich die positive und negative Ladung zu trennen. Zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{8}\cdot T$ haben wir einen nach oben gerichteten Strom und eine Ladungstrennung. Dadurch entstehen das eingezeichnete elektrische und magnetische Feld.

Zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{4}\cdot T$ erreichen die beiden Ladungen ihre maximale Auslenkung. Die Stromstärke ist gerade Null und es entstehen k e i n e magnetischen Feldlinien direkt am Dipol. Die magnetischen Feldlinien in geringer Entfernung vom Dipol werden von dem Strom erzeugt, der vorher geflossen ist.



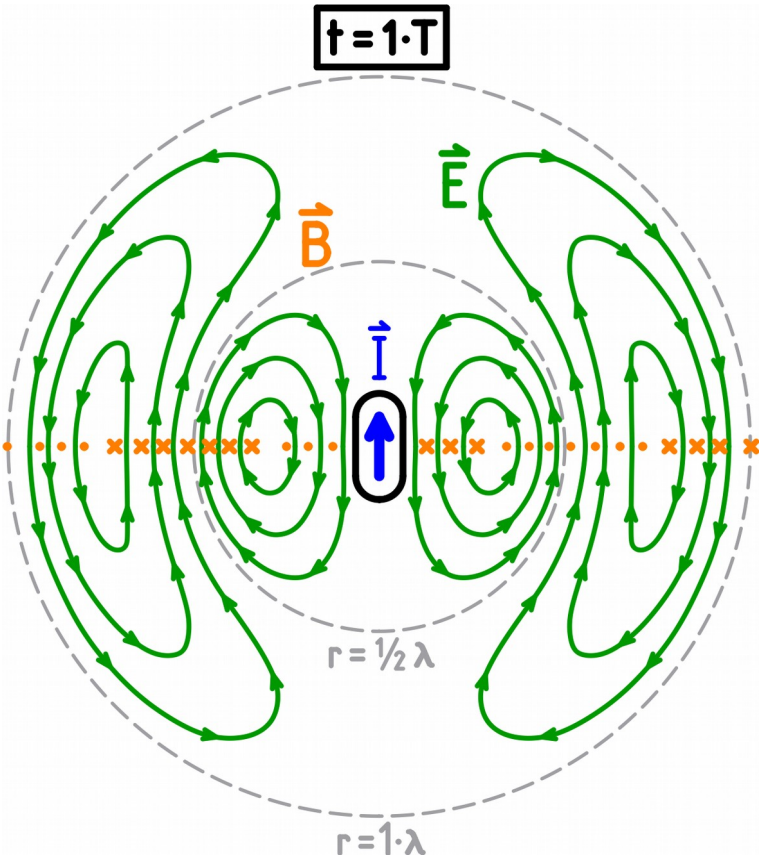
Im weiteren Verlauf wandern die bereits existierenden Feldlinien nach außen. Die beiden Ladungen wandern wieder in Richtung Ruhelage. Stromrichtung und deshalb auch die Richtung der magnetischen Feldlinien direkt am Dipol kehren die Richtung um. Zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{2}\cdot T$ kommt es zu vollständigem Ladungsausgleich. D.h. zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{2}\cdot T$ entstehen direkt am Dipol keine elektrischen Feldlinien. Im weiteren Verlauf der Zeit werden die entstandenen Schleifen im E-Feld vom Dipol weg nach außen wandern, genauso die magnetischen Feldlinien. Beachten Sie auch, dass im Raum außerhalb der Kugel mit Radius $r = \frac{1}{2}\cdot\lambda$ bis jetzt - wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Felder - noch gar kein Feld existiert.

Das war die erste Halbschwingung. Danach kommt Ladungstrennung in umgekehrter Richtung usw..



Merke:

- ➔ Die bereits bestehenden Feldlinien wandern im Verlauf der Zeit vom Dipol weg nach außen.
- ➔ Bei größter Ladungstrennung (t = $\frac{1}{4}$T, $\frac{3}{4}$T, ...) ist die Stromstärke im Dipol gleich Null und es entstehen keine neuen magnetischen Feldlinien.
- ➔ Die elektrischen Feldlinien schmiegen sich an Kugelschalen im Abstand einer halben Wellenlänge an.
- ➔ Bei maximaler Stromstärke (T = $\frac{1}{2}$T, 1T,...) herrscht völliger Ladungsausgleich und es bilden sich die Schleifen in den elektrischen Feldlinien, die anschließend nach außen wandern.
- ➔ Obwohl die Felder sich hier nicht gegenseitig erzeugen, sondern vom Dipol erzeugt werden, funktioniert die Drei-Finger-Regel für die Ausbreitungsrichtung (Daumen -> E-Feld, Zeigefinger -> B-Feld, Mittelfinger -> Ausbreitungsrichtung).



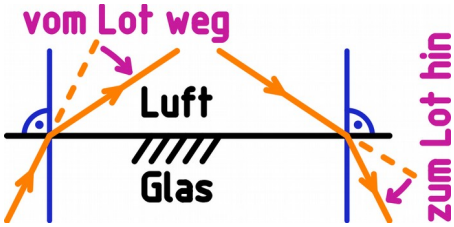
12.4 Wellenphänomene

Genauso wie bei Schallwellen oder anderen Wellen lassen sich bei EM-Wellen die bekannten Wellenphänomene beobachten. (siehe Buch S.163)

Polarisation:

Wie oben erwähnt auch ein Wellenphänomen, das allerdings nur bei Transversalwellen auftritt. Es kann auch zur Identifikation von Transversalwellen benutzt werden (Schallwellen lassen sich nicht polarisieren).

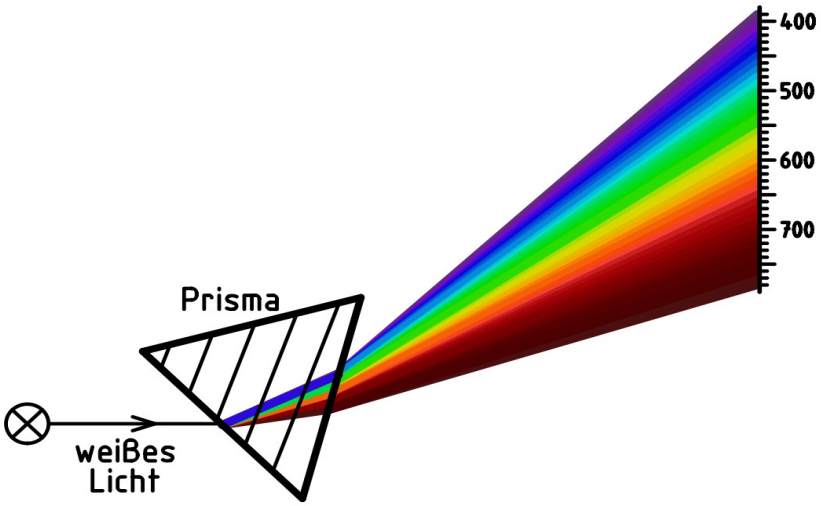
Brechung:



Die Welle ändert beim Übergang von einem Medium in ein anderes ihre Ausbreitungsrichtung. Darauf beruht die Funktionsweise von Linsen.

Beim Übergang ins optisch dünnere Medium wird "vom Lot weg" gebrochen, ins optisch dichtere Medium hinein wird "zum Lot hin" gebrochen. Bei einem Prisma wird immer "um das dicke Ende herum" gebrochen.

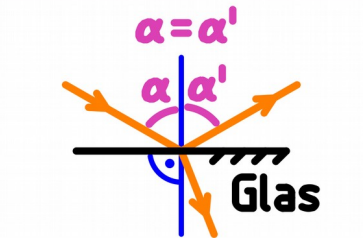
Unterschiedliche Wellenlängen werden unterschiedlich stark gebrochen (Dispersion). Normalerweise werden kleinere Wellenlängen stärker gebrochen. Auf diesem Effekt beruht die Entstehung eines Regenbogens oder die spektrale Zerlegung von Licht durch ein Prisma.



Reflexion:

Die Welle wird an der Grenzschicht beim Übergang von einem Medium in ein anderes teilweise zurückgeworfen (reflektiert). Die Reflexion ist so gut wie nie vollständig, ein Teil der Welle dringt in das andere Medium ein. Eventuell wird auch ein Teil der Welle absorbiert (Energieumwandlung).

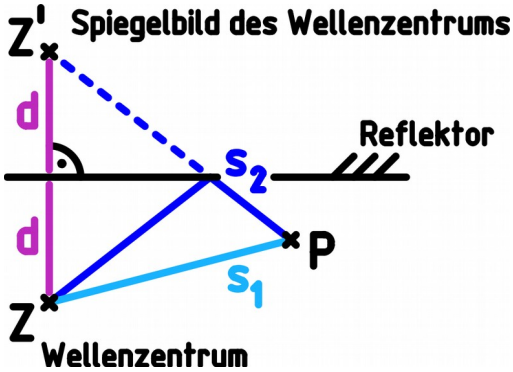
Reflexionsgesetz



Das Reflexionsgesetz sagt:

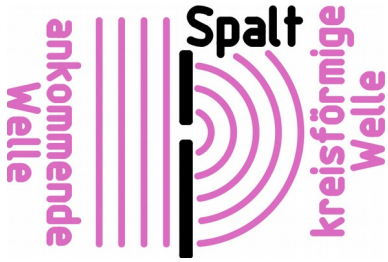
Einfallswinkel = Reflexionswinkel

Die beiden Winkel werden vom Lot aus gemessen. Für später interessant ist die Länge des Laufwegs, den die reflektierte Welle bis zu einem beliebigen Punkt P zurücklegt. Dieser ist genauso lang, wie der Weg vom Spiegelbild des Wellenzentrums bis zum Punkt P (plus eventuelle Laufwegkorrektur).



Huygenssches Prinzip:

Jeder Punkt der Wellenfront lässt sich als Ausgangspunkt einer kreisförmigen (bzw. kugelförmigen) Elementarwelle betrachten.

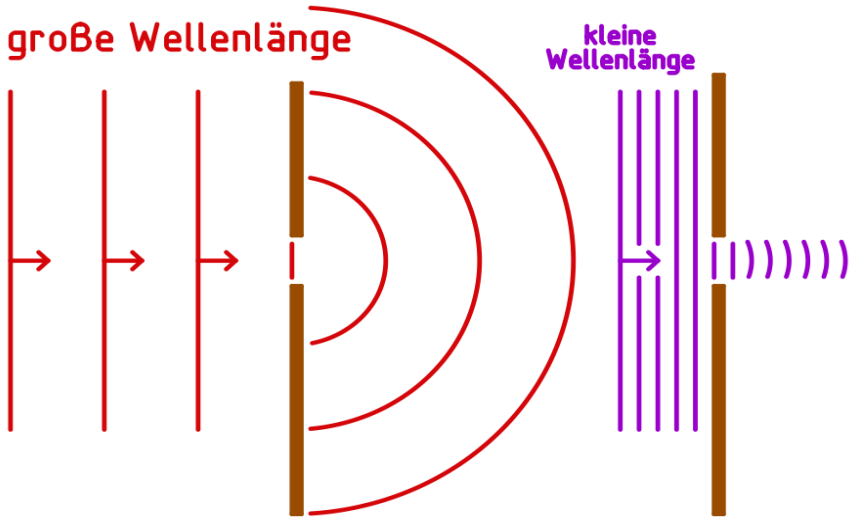


Für uns ist das insbesondere deshalb wichtig, weil wir später durch schmale Spalte solche "Elementarwellen" erzeugen werden, um diese zur Interferenz zu bringen.

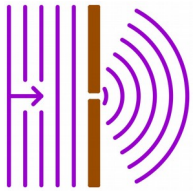
Beugung:

Die Welle erzeugt an einem Hindernis zusätzliche Ausbreitungsrichtungen und dringt in den Raum hinter dem Hindernis ein. Grundsätzlich gilt:

➔ Große Wellenlängen werden stärker gebeugt als kleine.



Deshalb dringen Schallwellen oder Radiowellen bei offener Tür besser ins Nachbarzimmer ein als Licht. Die Interferenz ist ein Spezialfall der Beugung, deshalb sagt man auch Beugungsgitter.



☠ Wenn aber die Spaltbreite nicht mehr viel größer als die Wellenlänge ist - oder sogar kleiner als die Wellenlänge - , dann werden auch kleine Wellenlängen gebeugt.

12.5 Schlussbemerkungen

Frage: Wann entstehen elektromagnetische Wellen?

Immer dann, wenn eine elektrische Ladung beschleunigt wird, dann strahlt sie elektromagnetische Wellen ab.

Nahfeld und Fernfeld bei Dipolwellen

In der Nähe des Dipols werden die Felder vom Dipol erzeugt, weit weg vom Dipol erzeugen sich die Felder gegenseitig. Deshalb haben die Felder und also auch die Wellen in der Nähe des Dipols eine völlig andere Gestalt als in großer Entfernung. Erst in großer Entfernung vom Dipol entstehen sinusförmige Wellen mit gleichphasig schwingenden E- und B-Feldern.

Das elektromagnetische Spektrum

λ		E
km bis m	Radiowellen	neV bis μeV
dm bis cm	Mikrowellen	μeV bis meV
	Infrarot (IR)	
780 nm bis 390nm	rot orange gelb grün blau violett	1,6 eV bis 3,2 eV
	Ultraviolett (UV)	
nm bis pm	Röntgenstrahlen Gammastrahlen	keV bis MeV

Die erste Spalte gibt die Wellenlänge λ von groß nach klein. In der dritten Spalte stehen die Photonenenergien. Der Teil des Spektrums, der für das menschliche Auge sichtbar ist, wird als sichtbares Licht oder einfach nur als Licht bezeichnet. Die Zahlenwerte sind abgesehen vom Licht nur als grobe Richtwerte (Größenordnung) zu verstehen, sollten aber auswendig gekonnt werden. Auch die Energien der Photonen, besonders für das sichtbare Licht, sind manchmal nützlich zu wissen.

13 Interferenz

Mit Interferenz meint man die Überlagerung zweier Wellen gleicher Wellenlänge, die dann automatisch auch dieselbe Frequenz haben (Wieso?). Worauf es dabei ankommt, ist ob sich die Wellen an einem bestimmten Punkt P im Raum verstärken (konstruktive Interferenz; Maximum) oder gegenseitig teilweise auslöschen (destruktive Interferenz; Minimum). Die Interferenz ist ein Spezialfall der Beugung, deshalb sagt man auch "Beugungsgitter".

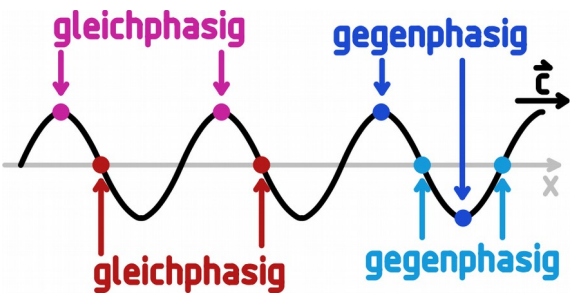
13.1 Kriterien

Aufgabe 13.249:

Das Bild zeigt die Momentaufnahme einer nach rechts laufenden Welle. Auf der Welle sind acht Punkte markiert.

a) Gib die Abstände zwischen aufeinander folgenden Punkten in Vielfachen der Wellenlänge an.

b) In welche Richtung (nach oben oder nach unten) schwingt (bewegt sich) jeder der eingezeichneten Punkte als nächstes?



Begriffe:

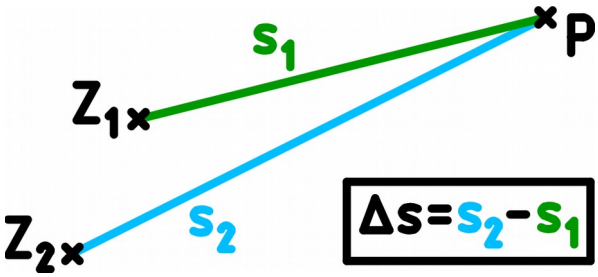
- ➔ Zwei Punkte schwingen gleichphasig, wenn sie zu jedem Zeitpunkt die gleiche Auslenkung haben.
- ➔ Zwei Punkte schwingen gegenphasig, wenn sie zu jedem Zeitpunkt entgegengesetzte Auslenkung haben.

Zwei Punkte einer Welle im Abstand λ (oder 2λ; 3λ; ...) schwingen gleichphasig.

Zwei Punkte im Abstand $\lambda/2$ (oder $\lambda/2 + \lambda$; $\lambda/2 + 2\lambda$; ...) schwingen gegenphasig.

Kriterium: Allgemeingültig

Wenn zwei Wellen am Punkt P gleichphasig schwingen, kommt es zu Verstärkung, wenn die beiden Wellen am Punkt P gegenphasig schwingen kommt es zu Auslöschung.



In der speziellen Situation zweier gleichphasig schwingender Wellenzentren vereinfacht sich das Kriterium zu einem rein geometrischen. Man kann sich dann auf die Betrachtung des Laufwegunterschieds Δs (Gangunterschieds) zurückziehen.

Kriterium: Für Gleichphasige Wellenzentren

Verstärkung für $\Delta s = 0\ ;\ 1\cdot\lambda\ ;\ 2\cdot\lambda\ ;\ 3\cdot\lambda\ ;\ \ldots \quad = k\cdot\lambda\ ;\quad k\in\mathbb{Z}$

Auslöschung für $\Delta s = \frac{1}{2}\cdot\lambda\ ;\ 1\frac{1}{2}\cdot\lambda\ ;\ 2\frac{1}{2}\cdot\lambda\ ;\ \ldots = (2\cdot k+1)\cdot\frac{\lambda}{2}\ ;\quad k\in\mathbb{Z}$

Die Voraussetzung gleichphasiger Wellenzentren ist nicht so abenteuerlich, wie sie auf den ersten Blick aussieht. Häufig hat man es nur mit einem einzigen Wellenzentrum zu tun, von dem aus die Welle auf verschiedenen Wegen zum Punkt P gelangen kann. Einen allgemeingültigen Trick zur Bestimmung des Laufwegunterschieds gibt es nicht.

Aufgabe 13.250:

Eine EM-Welle mit niedriger Frequenz (kHz-Bereich) läuft über den Punkt P.

a) Was lässt sich beobachten (messen) wenn man a u s s c h l i e ß l i c h den Punkt P - und kein bisschen links oder rechts davon - beobachtet (am Punkt P misst).

Nun erzeugen zwei verschiedene Wellenzentren EM-Wellen der gleichen Frequenz, die über den Punkt P laufen und am Punkt P e x a k t gegenphasig schwingen.

b) Begründe, dass die beiden Wellen dieselbe Wellenlänge besitzen.

c) Weshalb kommt es fast mit Sicherheit nicht zu v o l l s t ä n d i g e r Auslöschung der beiden Wellen am Punkt P?

Nun betrachten wir einen zweiten Punkt Q, an dem sich die beiden Wellen verstärken. Am Punkt P kommt es nach wie vor zu Auslöschung, jedoch nicht vollständig.

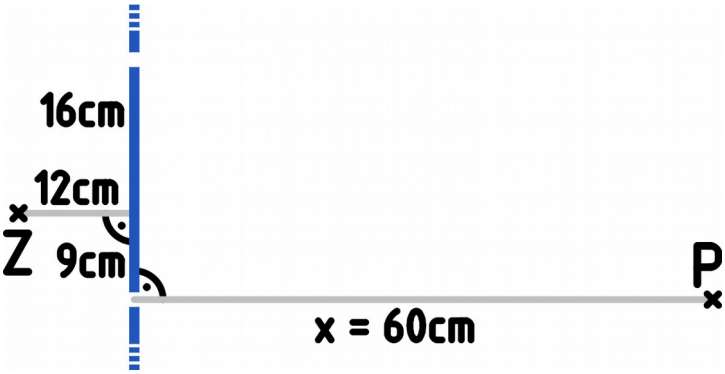
d) Da es am Punkt P nicht zu vollständiger Auslöschung kommt gibt es am Punkt P eine sich periodisch verändernde elektrische Feldstärke, genauso wie im Punkt Q. Was ist der wesentliche Unterschied im Verhalten der elektrischen Feldstärken an den Punkten P und Q?

Aufgabe 13.251:

Mikrowellen der Wellennlänge 5cm können vom Zentrum Z aus entweder durch den oberen oder den unteren Spalt zum Punkt P gelangen.

a) Bestimme die beiden Laufwege und den Laufwegunterschied im Punkt P. Welche Interferenzerscheinung liegt vor?

b) Wenn man den Punkt P nach links schiebt wird der Laufwegunterschied größer. Wie weit muss man nach links schieben, um das Maximum 3.Ordnung zu erreichen?



Lösung:

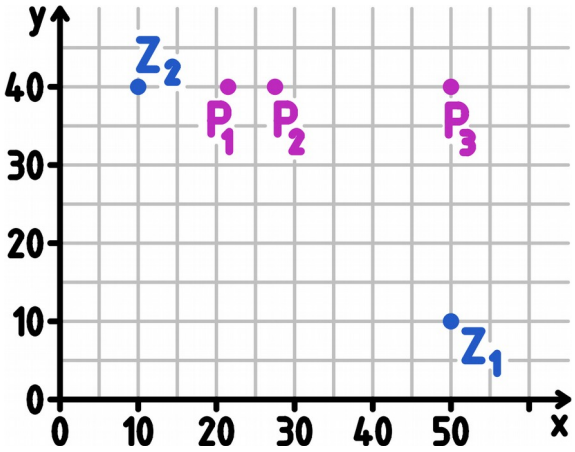
a) $s_u = 75\text{cm}$; $s_o = 85\text{cm}$; $\Delta s = 10\text{cm} = 2 \cdot \lambda$ $\Rightarrow$ Max. 2.Ord.

b)
$$20\text{cm} + \sqrt{25^2 cm^2 + x^2} - (15\text{cm} + x) = 15\text{cm}$$
$$\sqrt{25^2 cm^2 + x^2} = x + 10\text{cm}$$
$$x = 26{,}25\, cm \approx 26\text{cm}$$

Man muss um 34cm nach links schieben.

Aufgabe 13.252:

Das KOSY im Bild ist in Zentimetern skaliert. Z1 und Z2 sind gleichphasig schwingende Wellenzentren die EM-Wellen der Frequenz 1,50 GHz aussenden. Die y-Koordinate der Punkte P1, P2 und P3 ist bei allen 40. Die x-Koordinaten der drei Punkte sind 21,5 ; 27,5 und 50. Die Koordinaten von Z1 und Z2 können abgelesen werden.



a) Bestimme die Wellenlänge der von Z1 und Z2 ausgesandten EM-Wellen.

b) Untersuche rechnerisch ob in den Punkten P1 bis P3 Maxima oder Minima des Interferenzmusters vorliegen.

c) Am Punkt P3 befindet sich ein Minimum, bei P2 ein Maximum. Auf der Gerade durch P1, P2 nd P3 befindet sich zwischen den Punkten P2 und P3 noch ein Maximum 0. Ordnung und ein weiteres Minimum. Bestimme die x-Koordinaten dieser beiden Punkte.

d) Der Punkt P3 wird nun von seiner aktuellen Position aus vertikal nach unten verschoben, bis der Punkt Z1 erreicht ist. Begründe, wie viele Maxima auf diesem Weg passiert werden.

Lösung:

a) $c=\lambda\cdot f \rightarrow \lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{1{,}5\cdot 10^9\,Hz}=\underline{20\,cm}$

b) P1: $\Delta s=\sqrt{(30\,cm)^2+(28{,}5\,cm)^2}-11{,}5\,cm=\underline{29{,}9\,cm\approx 1{,}5\cdot\lambda}$ → Minimum

P2: $\Delta s=\sqrt{(30\,cm)^2+(22{,}5\,cm)^2}-17{,}5\,cm=\underline{20\,cm=1\cdot\lambda}$ → Maximum

P3: $\Delta s=40\,cm-30\,cm=\underline{10\,cm=0{,}5\cdot\lambda}$ → Minimum

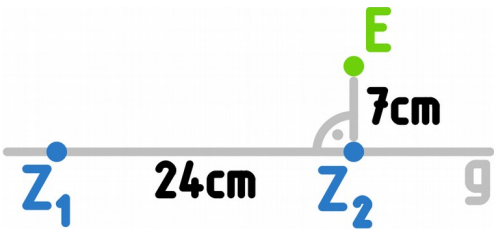
c) Max:
$$x-10\text{cm}=\sqrt{(50\,cm-x)^2+(30\,cm)^2}$$
$$x^2-20\,cm\cdot x+100\,cm^2=2500\,cm^2-100\text{cm}\cdot x+x^2+900\,cm^2$$
$$80\,cm\cdot x=3300\,cm^2 \rightarrow \underline{\underline{41{,}25\,cm}}$$

Min:
$$\sqrt{(30\,cm)^2+(50\,cm-x)^2}-(x-10\,cm)=10\,cm$$
$$900\,cm^2+2500\,cm^2-100\,cm\cdot x+x^2=x^2$$
$$100\,cm\cdot x=3400\,cm^2 \rightarrow \underline{\underline{x=34\,cm}}$$

d) Auf der ganzen Strecke ist s2 länger als s1. Zu Beginn ist $\Delta s = 0{,}5\lambda$ und am Ende ist $\Delta s = 2{,}5\lambda$. Der Laufwegunterschied ist also zunehmend und es werden zwei Maxima mit $\Delta s = 1\lambda$ und $\Delta s = 2\lambda$ passiert.

Aufgabe 13.253:

Z1 und Z2 sind zwei gleichphasig schwingende Sender, die EM-Wellen der Wellenlänge 9,0 cm aussenden. Ein Empfänger befindet sich in einem Abstand von 7,0 cm von Z2 in der Stellung im Bild.



a) Welche Interferenzerscheinung liegt am Ort des Empfängers vor?

b) Beschreibe und begründe die Entwicklung der Empfangsintensität bei E, wenn man den Sender Z2 langsam entlang der Gerade g bis ganz nahe an Z1 heran schiebt.

Alles wieder auf Startposition (siehe Bild).

c) Wie weit muss man den Sender Z2 von seiner Startposition aus nach rechts schieben, damit am Ort des Empfängers ein Maximum 0. Ordnung auftritt.

Nochmal alles auf Startposition (siehe Bild).

d) Der Empfänger E wird nun von seiner Startposition aus parallel zur Gerade g nach links verschoben, bis er exakt vertikal über Z1 ist. Wie viele Minima werden dabei registriert.

Lösung:

a) $\Delta s = \sqrt{(24\,cm)^2 + (7\,cm)^2} - 7\,cm = \underline{18\,cm = 2 \cdot \lambda}$ → Maximum

b) Der Laufwegunterschied durchläuft die Werte von 2λ bis Null. D.h. es wird zweimal ein Minimum erzeugt (bei $\Delta s = 1{,}5\lambda$ und $\Delta s = 0{,}5\lambda$) und zweimal ein Maximum (bei $\Delta s = 1\lambda$ und $\Delta s = 0$ ganz am Ende).

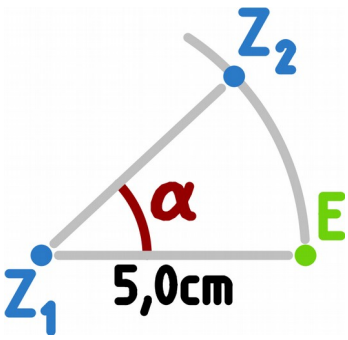
Die Empfangsintensität wird also zuerst abnehmen, dann wieder zunehmen und das ganze nochmal. Die Intensität der Maxima wird auf dem Weg kleiner werden, weil mit der Entfernung zwischen Z2 und E die Amplitude der EM-Welle abnimmt.

c) Dazu muss E von Z1 und Z2 gleich weit entfernt sein. Man muss also 24 cm weit schieben.

d) Laufwegunterschiede durchläuft die Werte von $\Delta s = +2\lambda$ bis $\Delta s = -2\lambda$. Dazwischen liegen 4 Minima, nämlich $\Delta s = 1{,}5\lambda$; $0{,}5\lambda$; $-0{,}5\lambda$ und $-1{,}5\lambda$.

Aufgabe 13.254:

Z1 und Z2 sind gleichphasig schwingende Sender, die EM-Wellen der Wellenlänge 2,0 cm aussenden. E ist ein Empfänger. Der Sender Z2 wird auf einem Kreis mit Radius 5,0 cm um den Sender Z1 bewegt. Der Winkel α durchläuft dabei Werte von 60° bis 180°.



a) Begründe, dass für α = 60° bei E ein Empfangsmaximum 0. Ordnung vorliegt.

b) Zeige rechnerisch, dass für α ≈ 90° ein Maximum 1. Ordnung vorliegt.

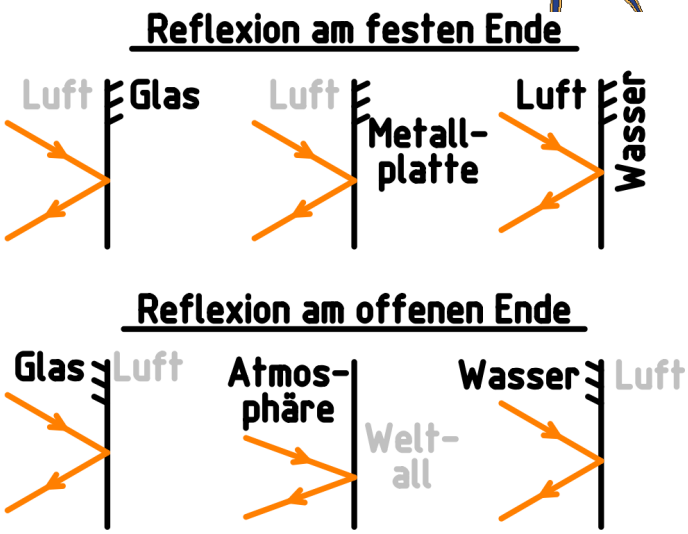
c) Wie viele weitere Maxima entstehen noch zwischen α = 90° und α = 180°?

Phasensprung

Bei Reflexion am festen Ende wird ein Wellenberg als -tal reflektiert. Deshalb muss bei Reflexion am festen Ende ein zusätzlicher Laufweg als Korrektur mit eingerechnet werden.

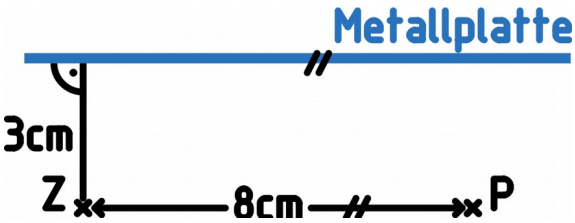
$$\boxed{s_{korr.} = \frac{\lambda}{2}}$$

Bei Reflexion am offenen Ende findet kein Phasensprung statt, und es muss keine Laufwegkorrektur vorgenommen werden.



Aufgabe 13.255:

Mikrowellen der Wellenlänge 4cm werden an einer Metallplatte reflektiert und überlagern sich im unteren Halbraum mit den direkt von Z ausgehenden.

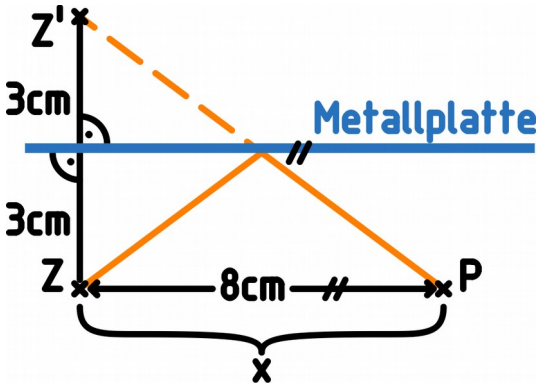


a) Bestimme den Laufwegunterschied inklusive Korrektur im Punkt P. Welche Interferenzerscheinung liegt im Punkt P vor?

b) Wenn man den Punkt P parallel zur Metallplatte nach links schiebt, dann wird der Laufwegunterschied größer. Wie weit muss man nach links schieben, um ein Minimum zu finden?

Lösung:

a) Spiegle das Wellenzentrum



$$s' = \sqrt{(6\text{cm})^2 + (8\text{cm})^2} + \frac{\lambda}{2} = 10\text{cm} + 2\text{cm} = 12\text{cm}$$

$$s = 8\text{cm}$$

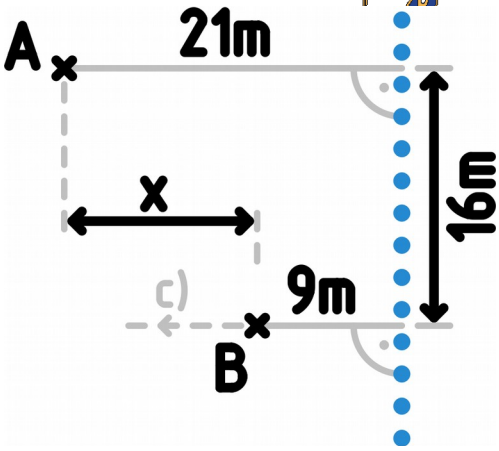
$$\Delta s = 4\text{cm} = 1 \cdot \lambda \;\Rightarrow\; \text{Maximum}$$

b) $\sqrt{(6\text{cm})^2 + x^2} + \frac{\lambda}{2} - x = 6\text{cm}$

$$\sqrt{(6\text{cm})^2 + x^2} = x + 4\text{cm} \;\rightarrow\; (6\text{cm})^2 + x^2 = (x + 4\text{cm})^2$$

$$(6\text{cm})^2 = 8\text{cm} \cdot x + 16\text{cm}^2 \;\rightarrow\; x = 2{,}5\,cm$$ Der Punkt P muss um 5,5cm nach links.

Aufgabe 13.256:



Anton und Bernhard haben Funkgeräte, die mit einer Frequenz von 150 Mhz arbeiten. Die beiden spielen damit in der Nähe eines Metallzauns (gepunktete Linie), der als ebener Reflektor angesehen werden kann, und befinden sich auf den im Bild gezeigten Positionen.

a) Bestimme die Wellenlänge, mit der die Funkgeräte arbeiten. (Kontrolle: 2,0m)

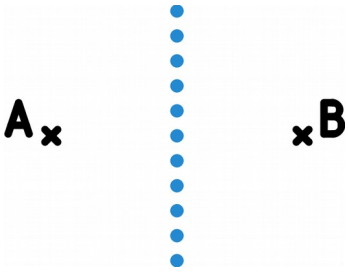
b) Zeige rechnerisch, dass an der momentanen Position von Bernhard ein Empfangsminimum vorliegt.

Nun bewegt sich Bernhard wie im Bild eingezeichnet lotrecht vom Zaun weg

c) Begründe anhand einer Zeichnung, dass der Laufwegunterschied zwischen direkt von Anton aus ankommender Welle und reflektierter Welle dabei größer wird.

Im Bild oben ist bereits eine Variable x eingeführt. Bernhard geht nun nach links.

d) Bestimme einen Term für den Gangunterschied der beiden relevanten Laufwege in Abhängigkeit von x und finde mit Hilfe der Tabellen-Funktion des Taschenrechners auf ±1cm genau wie weit Bernhard nach links gehen muss um das nächste Empfangsmaximum zu finden.



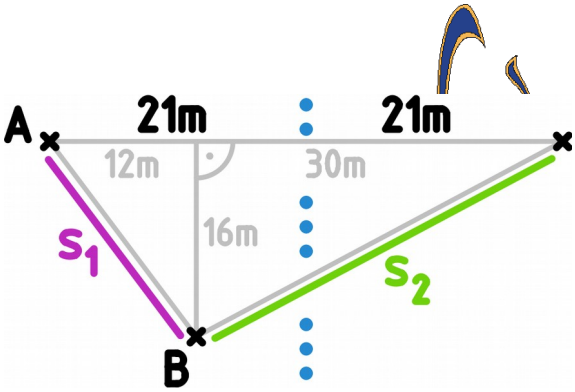
Der Zaun besteht aus dicken Metallstäben, die alle exakt vertikal ausgerichtet sind. Wenn Bernhard auf der anderen Seite des Zauns steht, hat er fast keinen Empfang.

e) Erkläre, wie und warum Anton und Bernhard durch die Ausrichtung ihrer beiden Antennen erreichen können, dass der Empfang von Bernhard fast so gut wird als ob gar kein Zaun da wäre.

Lösung:

a) $c = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{150 \cdot 10^6 Hz} = \underline{\underline{2{,}0\,m}}$

b) Wellenzentrum A spiegeln

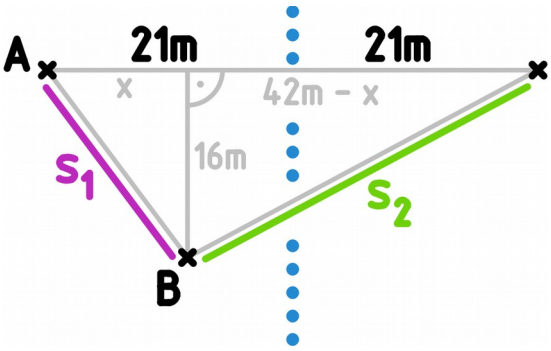


$$\Delta s = s_2 - s_1$$
$$= \sqrt{(30\,m)^2 + (16\,m)^2} + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{(12\,m)^2 + (16\,m)^2}$$
$$= 34\,m + 1{,}0\,m - 20\,m = \underline{15\,m = 7\frac{1}{2} \cdot \lambda}$$

$\Rightarrow$ Minimum

c) Die reflektierte Welle hat den längeren Laufweg. Wenn Bernhard nach links geht, dann wird s2 noch länger und s1 wird kürzer, also wird der Laufwegunterschied größer, wenn Bernhard nach links geht.

d)
$$\Delta s = s_2 - s_1$$
$$= \sqrt{(42\text{m} - x)^2 + (16\,m)^2} + \frac{\lambda}{2} - \sqrt{x^2 + (16\,m)^2}$$



Für das nächste Empfangsmaximum braucht man $\Delta s = 8\lambda = 16{,}0$m. TR liefert:

x = 11,31 m -> Δs = 16,02 m

x = 11,32 m -> Δs = 16,00 m

x = 11,33 m -> Δs = 15,99 m

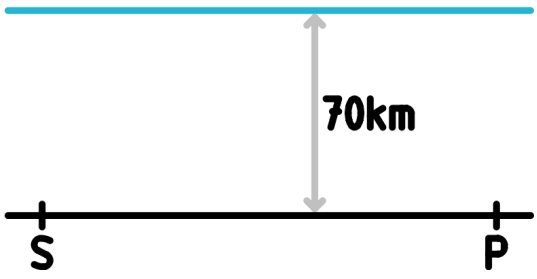
Bernhard muss also nur 68cm nach links gehen um ein Empfangsmaximum zu finden.

e) Die vertikalen Dipole des Zauns können nur von EM-Wellen mit vertikalem E-Feld angeregt werden. Wenn A und B ihre Antennen horizontal ausrichten werden die Dipole des Zauns so gut wie nicht angeregt und können deshalb auch nichts absorbieren. Die horizontale Ausrichtung der Antennen sorgt also für guten Empfang.

<u>Aufgabe 13.257:</u>

Der Sender Europe 1 ist der stärkste Radiosender in Deutschland (2 x 1000 kW) und arbeitet mit einer Frequenz von 183 kHz.

a) Bestimme die Wellenlänge mit welcher der Sende arbeitet und erkläre, weshalb sich eine Stabantenne in Form eines Hertzschen Dipols nicht als Empfänger eignet.



Die Radiowellen werden an einer Atmosphärenschicht (Ionosphäre) in einer Höhe von 70km

über dem Boden reflektiert. Bei dieser Reflexion findet auch ein Phasensprung statt, wie bei Reflexion am festen Ende.

b) Zeige rechnerisch, dass es am Punkt P in einer Entfernung von 848km vom Sender S durch die Reflexion zu einem Empfangsminimum kommt.

c) Zeige rechnerisch, dass ein Flugzeug, das sich in einer Höhe von 5,0km exakt über dem Punkt P befindet guten Empfang hat.

d) Wenn man den Punkt P in Richtung des Senders verschiebt, wird der Laufwegunterschied der beiden Wellen größer. Wie weit muss man den Punkt P verschieben, um ein Empfangsmaximum zu erreichen?

e) Langwellensender wie diesen installiert man, wenn man mit einem einzigen Sender große Flächen - mit Radien in der Größenordnung von 1000 km und mehr - abdecken will. Worin liegt dabei der Vorteil von Langwellen gegenüber Kurzwellen?

<u>Lösung:</u>

a) $c=\lambda\cdot f \rightarrow \lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{183\cdot 10^3\,Hz}=\underline{1639\,m}$

Ein Hertzscher Dipol bräuchte eine Länge von mindestens 820m (halbe Wellenlänge) und das ist für eine Antenne zu lang.

b) Wellenzentrum spiegeln

$$\Delta s=\sqrt{(140\,km)^2+(848\,km)^2}+\frac{1}{2}\cdot 1{,}639\,km-848\,km=\underline{12{,}2\,km=7\frac{1}{2}\cdot\lambda} \Rightarrow \text{Minimum}$$

c) Nochmal dasselbe

$$\Delta s=\sqrt{(135\,km)^2+(848\,km)^2}+\frac{1}{2}\cdot 1{,}639\,km-\sqrt{(848\,km)^2+(5\,km)^2}=\underline{11{,}48\,km=7{,}0\cdot\lambda} \Rightarrow \text{Max}$$

d) x: Entfernung zwischen S und P

$$\Delta s=\sqrt{(140\,km)^2+x^2}+\frac{\lambda}{2}-x=8\cdot\lambda$$
$$(140\,km)^2+x^2=(7{,}5\lambda+x)^2=(12{,}3\,km)^2+24{,}6\,km\cdot x+x^2$$
$$x=\underline{791\,km}$$

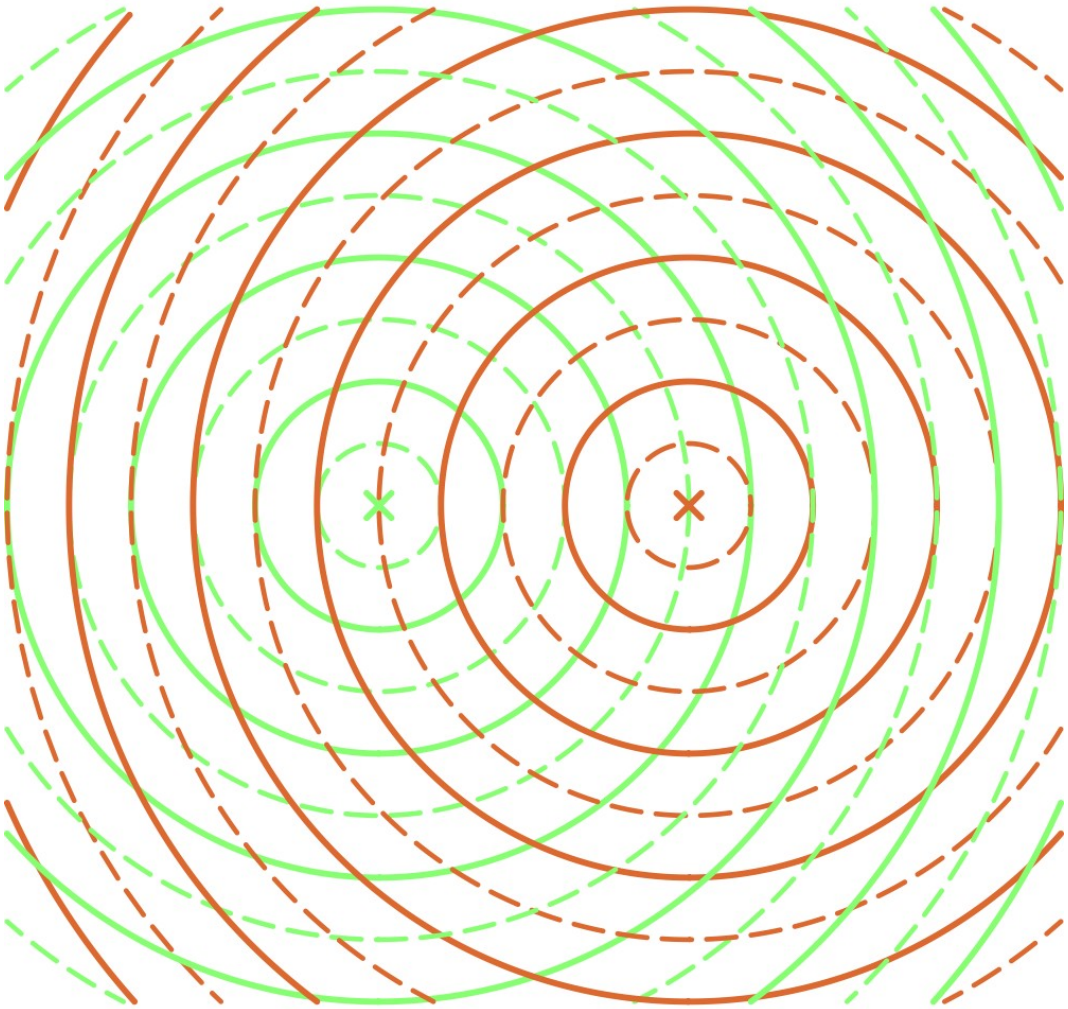
Der Punkt P muss also 57km weit in Richtung des Senders geschoben werden.

e) Langwellen werden stärker gebeugt und folgen deshalb auch der Erdkrümmung.

Aufgabe 13.258: Ortskurven der Maxima und Minima

Das Bild zeigt die Momentaufnahme zweier Wellen. Die beiden gleichphasig schwingenden Wellenzentren sind mit Kreuzen markiert. Die durchgezogenen Kreise zeigen jeweils momentane Wellenberge, die gestrichelten Kreise zeigen jeweils momentane Wellentäler. An den Schnittpunkten der verschiedenen Kreise erkennt man Maxima und Minima.

a) Markiere mit zwei verschiedenen Farben so viele Maxima und Minima wie möglich.



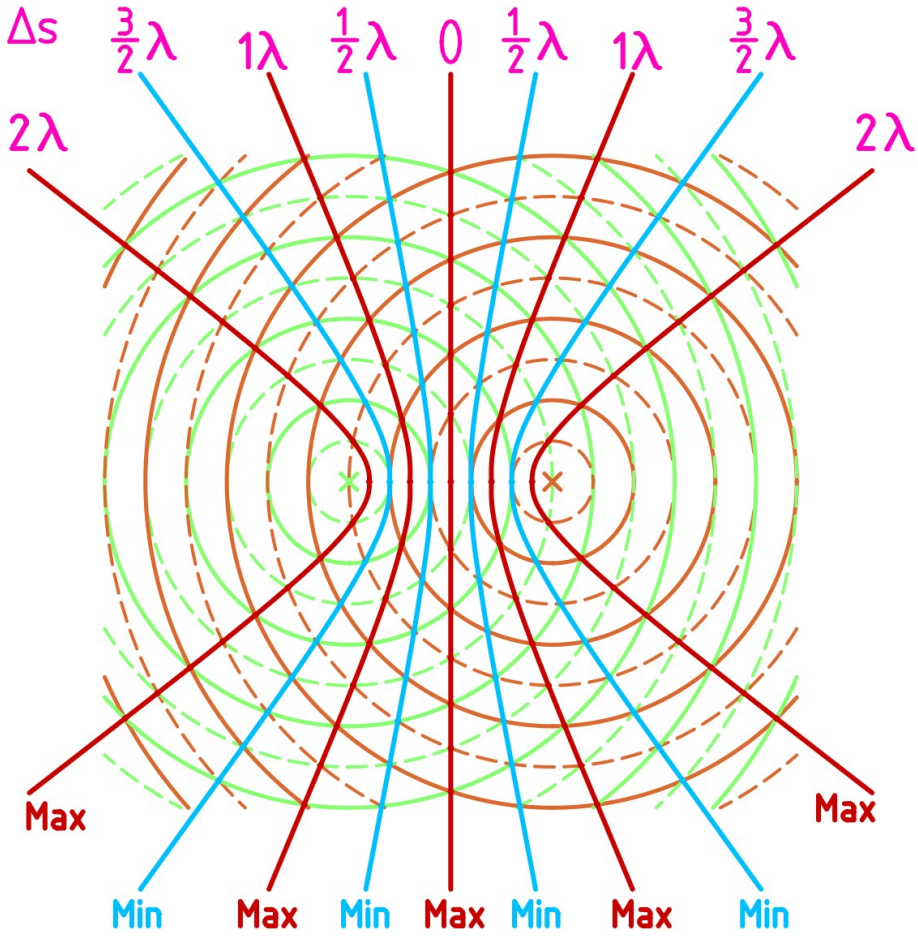
b) Zeichne die Ortskurven der Maxima und Minima ein. Beschrifte die Ortskurven der Maxima mit ihrer Ordnung.

Lösung:

Schnittpunkte von zwei durchgezogenen Kreisen zeigen Maxima, Schnittpunkte von zwei gestrichelten Kreisen ebenso. Schnittpunkte von jeweils einem durchgezogenen und einem gestrichelten Kreis zeigen Minima an.

Es ergibt sich das nebenstehende Bild. Maxima und Minima liegen jeweils auf zusammenhängenden Kurven. Entlang einer solchen Kurve ist der Laufwegunterschied konstant. Die Kurven sind sogenannte Hyperbeln.

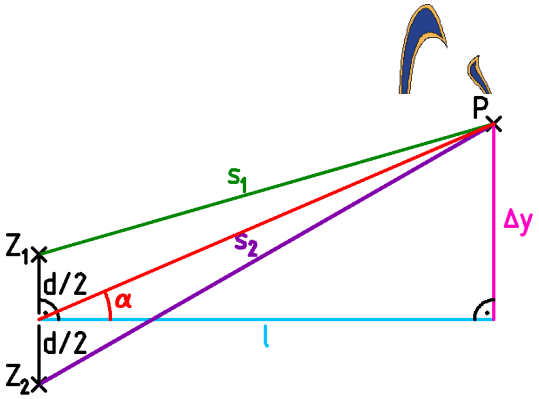
In größerer Entfernung von den beiden Wellenzentren verlaufen die Kurven näherungsweise gerade. Das ist der geometrische Hintergrund für die Näherungsformel im nächsten Abschnitt.



Merke:

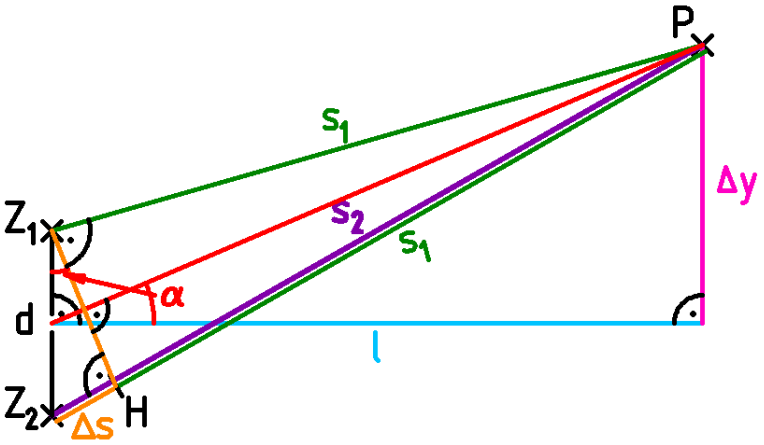
- ➔ Die Minima mit gleichem Laufwegunterschied und die Maxima gleicher Ordnung liegen jeweils auf Hyperbeln.
- ➔ Das Maximum 0. Ordnung liegt auf der Mittelsenkrechten der beiden Wellenzentren (bei gleichphasigen Wellenzentren).
- ➔ Von der Mittelsenkrechten nach außen hin wird der Laufwegunterschied permanent größer. Er wird jedoch niemals größer als der Abstand der beiden Wellenzentren.

13.2 Näherungsformeln



Näherungsformeln gibt es nur für die rechts dargestellte spezielle Situation. Zwei Wellenzentren im Abstand d und ein Schirm parallel zu d im Abstand l. Als Parameter zur Angabe des Punktes P benutzt man entweder den Winkel α oder das eingezeichnete Δy.

<u>Näherung 1: P weit weg von den Wellenzentren</u>



Wir übertragen die Strecke s_1 nach unten und erhalten das gleichschenklige Dreieck HPZ_1 mit gleich großen Basiswinkeln. Wegen des großen Abstands von P zu den Wellenzentren sind die Basiswinkel ungefähr 90°.

Deshalb ist das Dreieck HZ_1Z_2 auch rechtwinklig. In diesem Dreieck taucht auch der Winkel α auf. In diesem Dreieck gilt dann:

$$\sin\alpha = \frac{\Delta s}{d}$$ also ist:

$$\Delta s = d \cdot \sin\alpha$$

Wenn P weit weg von den Wellenzentren ist

<u>Näherung 2: KLeinwinkelnäherung; zusätzlich kleine Winkel α</u>

Wenn der Winkel α kleiner als 10° ist, dann ist der Sinus ungefähr gleich dem Tangens, und damit gilt:

$$\Delta s = d \cdot \sin\alpha = d \cdot \tan\alpha = d \cdot \frac{\Delta y}{l}$$

$$\Delta s = d \cdot \tan\alpha = d \cdot \frac{\Delta y}{l}$$

Wenn P weit weg von den Wellenzentren und α sehr klein

Obwohl die Näherungsformel $\Delta s = d \cdot \sin a$ nur weit weg von den Wellenzentren gilt lässt sie sich doch benutzen, um ganz grundsätzliche Aussagen abzuleiten. Man kann ja in Gedanken immer weit von den Zentren weg gehen.

Wann gibt es überhaupt Maxima?

Damit es überhaupt ein Maximum gibt, muss der Laufwegunterschied mindestens so groß wie die Wellenlänge sein. Also muss gelten:

$$\Delta s \geqslant \lambda$$
$$d \cdot \sin\alpha \geqslant \lambda$$

Weil der Sinus höchstens 1 sein kann muss gelten:

$$d \geqslant \lambda$$

Der Abstand der Wellenzentren muss also mindestens so groß wie die Wellenlänge sein, damit es außer dem Hauptmaximum überhaupt noch Maxima geben kann. Wenn jedoch der Abstand der Wellenzentren zu groß ist, dann wird wegen

$$k \cdot \lambda = \Delta s = d \cdot \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{k \cdot \lambda}{d}$$

der Sinus von a und damit der Winkel selbst so klein, dass man nicht mehr vernünftig messen kann. Manchmal wird als Faustregel benutzt, dass der Abstand der Wellenzentren noch in der Größenordnung (Zehnerpotenz) der Wellenlänge liegen sollt.

➔ Der Abstand der Wellenzentren muss für Interferenzversuche größer als die Wellenlänge sein, er darf aber nicht zu groß sein, weil sonst die Maxima zu eng beieinander liegen.

Wie viele Maxima gibt es?

$$\Delta s = k \cdot \lambda$$
$$d \cdot \sin\alpha = k \cdot \lambda$$

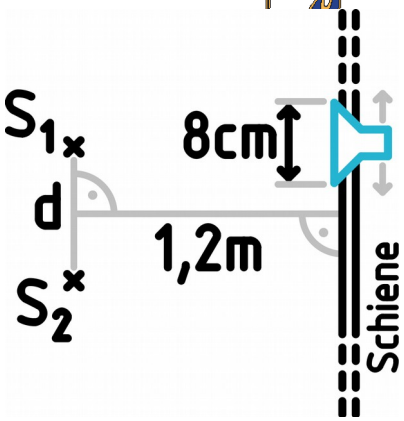
$$k = \frac{d \cdot \sin\alpha}{\lambda}$$

Der Sinus ist kleiner gleich 1, also ist

$$k \leqslant \frac{d}{\lambda}$$

Auf diese Weise findet man die maximal auftretende Ordnung. Für die Anzahl der Maxima auf einer Seite der Wellenzentren nimmt man das mal zwei (links und rechts) und noch plus eins (Nullter Ordnung).

Aufgabe 13.259: Abstand der Wellenzentren



Mit zwei gleichphasig schwingenden Mikrowellensendern, deren Strahlung eine Wellenlänge von 0,5 cm hat, soll ein Interferenzmuster erzeugt werden. Der Empfänger steht auf einer geraden Schiene 1,2 m hinter den Sendern und hat einen relativ großen Trichterförmigen Einlass mit einem Durchmesser von 8,0 cm.

a) Wie groß muss der Abstand der beiden Sender mindestens sein, damit man überhaupt ein Interferenzmuster erzeugt?

b) Damit man im Experiment das Maximum 1. Ordnung vom Hauptmaximum trennen kann, müssen die beiden mindestens einen Abstand von 8,0 cm haben. Wie groß darf der Abstand der beiden Sender höchstens sein, damit man sinnvoll messen kann?

c) Wie viele voneinander getrennte Maxima kann man mit dem in b) ermittelten Abstand der Sender dann auf der Seite des Empfängers feststellen?

Lösung:

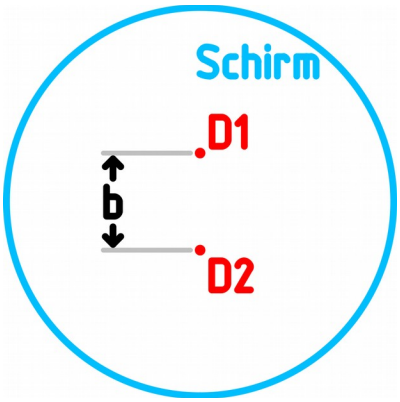
a) Mindestens so groß wie die Wellenlänge, also mindestens 0,5 cm.

b) $1\cdot\lambda=\Delta s=d\cdot\frac{\Delta y}{l}$ → $d=\frac{\lambda\cdot l}{\Delta y}=\frac{0{,}5\,cm\cdot 1{,}2\,m}{8{,}0\,cm}=\underline{\underline{0{,}075\,m}}$ Max. Senderabstand: 7,5 cm

c) $k\cdot\lambda=d\cdot\sin\alpha$ → $k=\frac{d}{\lambda}\cdot\sin\alpha\leqslant\frac{d}{\lambda}=\frac{7{,}5\,cm}{0{,}5\,cm}=\underline{15}$

Es gibt also Maxima bis zur 15. Ordnung, die Maxima mit k = 15 liegen jedoch bei einem Winkel von α = 90° und sind deshalb mit der Schiene nicht erreichbar, d.h. es lassen sich 2 mal 14 plus das Hauptmaximum registrieren, also 29 Stück.

Aufgabe 13.260:



Zwei gleichphasig schwingende Dipole befinden sich im Abstand b = 8,0 cm und emittieren elektromagnetische Wellen mit λ = 2,0 cm.

Um die beiden Dipole herum befindet sich ein kreisförmiger Schirm auf dem Interferenzminima und -maxima festgestellt werden können.

a) Wie viele Minima lassen sich auf dem kreisförmigen Schirm registrieren?

b) Wie viele Maxima lassen sich auf dem kreisförmigen Schirm registrieren?

Lösung:

a)
$$(2\cdot k+1)\cdot\frac{\lambda}{2}=b\cdot\sin\alpha \;\rightarrow\; 2\cdot k+1=\frac{2\cdot b}{\lambda}\cdot\sin\alpha\leqslant\frac{2\cdot b}{\lambda}$$
$$k\leqslant\left(\frac{2\cdot b}{\lambda}-1\right):2=\left(\frac{2\cdot 8\,cm}{2\,cm}-1\right):2=\underline{3{,}5}$$

Das größte k ist also 3. Das macht auf der rechten Seite 4 oben und 4 unten (k läuft ab Null), also 8 Stück. Auf der linken Seite nochmal genauso viel. Also insgesamt 16.

b) $k\cdot\lambda=b\cdot\sin\alpha \;\rightarrow\; k=\frac{b}{\lambda}\cdot\sin\alpha\leqslant\frac{b}{\lambda}=\frac{8\,cm}{2\,cm}=\underline{4}$

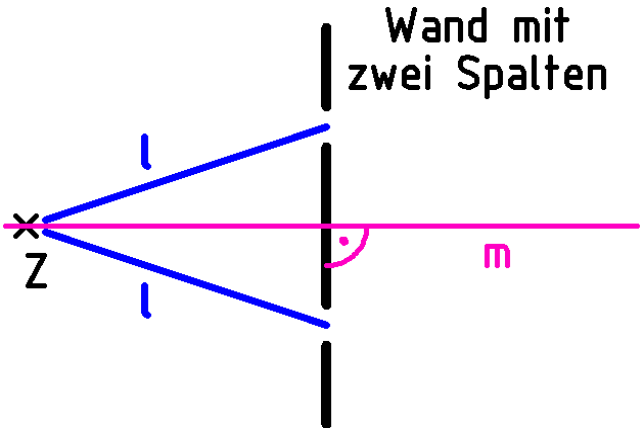
Die maximal auftretende Ordnung ist also 4. Weil $b/\lambda = 4$ ist, liegen die Maxima 4. Ordnung bei $\alpha = 90°$.

Auf der rechten Seite macht das 4 oben, 4 unten und das Maximum 0. Ordnung in der Mitte also insgesamt 9 Stück.

Auf der linken Seite kommen nur noch 7 neue dazu, weil die Maxima 4. Ordnung bei dem Winkel $\alpha = 90°$, liegen also schon bei den rechten dabei sind.

Das macht dann insgesamt 9 + 7 = 16 registrierbare Maxima.

Erzeugung gleichphasiger Wellenzentren



Platziert man ein Wellenzentrum auf der Mittelsenkrechten zweier Spalte, dann ist das Zentrum von beiden Spalten gleich weit entfernt und die beiden Spalte schwingen gleichphasig. Im Raum rechts hinter den Spalten kann man dann die beiden entstandenen Wellen zur Interferenz bringen. Bei Verwendung eines Gitters mit vielen Spalten gilt unsere Formel mit dem Abstand zweier benachbarter Spalte, der Gitterkonstante.

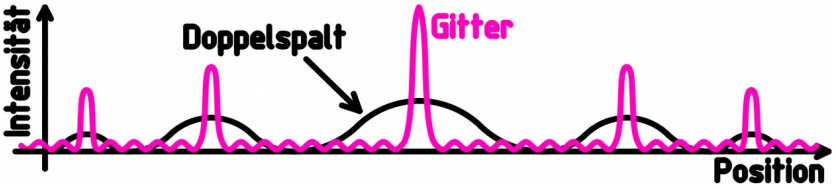
Die Verwendung eines Gitters mit vielen Spalten hat den Vorteil, dass sich die hohe Intensität auf einen viel engeren Bereich um die Maxima konzentriert. Wegen der Energieerhaltung muss in diesem engen Bereich dann die Intensität im Vergleich zum Doppelspalt auch viel größer sein.

Gittervorteile:

1) Die Maxima sind enger; also schärfer - nicht so verschmiert

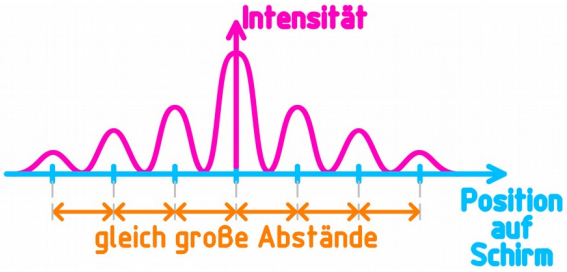
2) Die Maxima haben in ihrem engen Bereich eine höhere Intensität

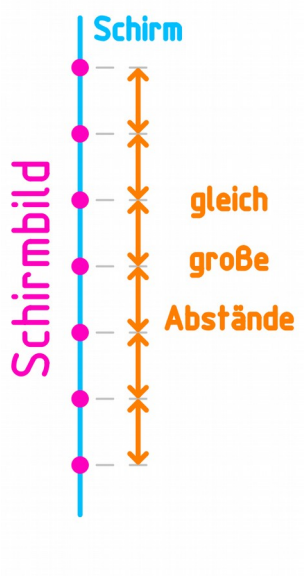
Zwischen den großen Maxima treten beim Gitter kleine Nebenmaxima auf, die aber wenigstens uns beim Messen gar nicht auffallen.



Äquidistante Maxima

In der Kleinwinkelnäherung ergibt sich für die Lage der Maxima:





$$k \cdot \lambda = \Delta s = d \cdot \frac{\Delta y}{l}$$

$$\Delta y = \frac{k \cdot \lambda \cdot l}{d} = \frac{\lambda \cdot l}{d} \cdot k$$

Also ist Δy direkt proportional zur Ordnung des Maximums k, mit Proportionalitätskonstante $(\lambda \cdot l)/d$.

Deshalb ist zwischen zwei benachbarten Maxima immer derselbe Abstand. Das gilt allerdings nur, solange die Winkel der Maxima klein sind.

☠ Solange die Kleinwinkelnäherung gilt

➔ sind die Maxima äquidistant.

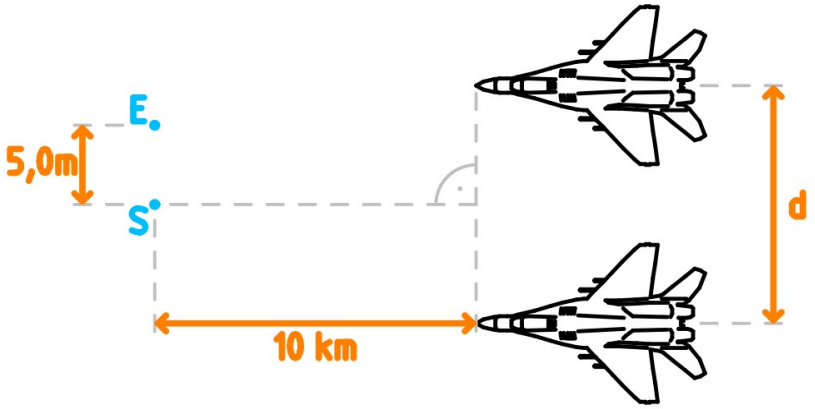
Aufgabe 13.261: Zu den Näherungsformeln, oder?

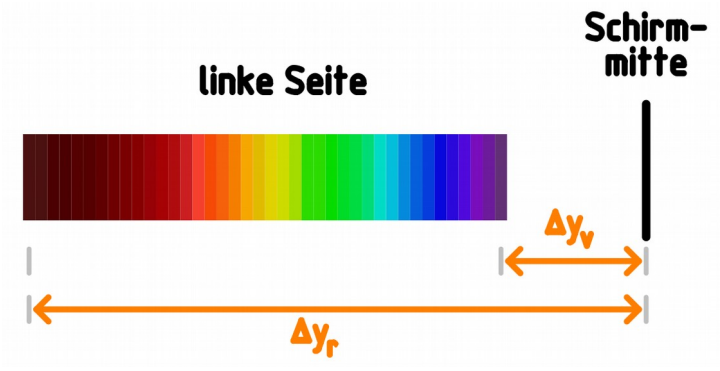
a) Laserlicht unbekannter Wellenlänge wird an einem Gitter mit 20 Strichen pro mm gebeugt. Die beiden Maxima 3. Ordnung haben auf dem Schirm, der sich 2,0 m hinter dem Gitter befindet einen Abstand von 9,6 cm. Berechne die Wellenlänge des Laserlichts. Welche Farbe hat das Licht?

b) Mit Hilfe eines Gitters soll die Wellennatur von Röntgenstrahlung nachgewiesen werden. Der Schirm steht 50 cm hinter dem Gitter und die Wellenlänge der Röntgenstrahlung schätzen wir auf 10 pm. Das Schirmbild wird mit einem Mikroskop betrachtet. Damit man zwei Maxima getrennt voneinander wahrnehmen kann, müssen sie einen Abstand von mindestens 1,0 μm haben. Welche Größe muss die Gitterkonstante dazu haben?

c) Rotes Laserlicht der Wellenlänge 680 nm wird an einem Gitter mit 250 Strichen pro mm gebeugt. Wie nahe muss man den Schirm der Breite 60 cm an das Gitter stellen, wenn man die Maxima bis zur 4. Ordnung auf dem Schirm beobachten will?

d) Sender und Empfänger einer Radarstation, die mit Mikrowellen der Wellenlänge λ = 3,0 cm arbeitet, befinden sich in einem Abstand von 5,0 m voneinander. Bestimme den kleinsten Abstand d der beiden Jets in einer Entfernung von 10 km von der Radarstation, damit am Ort des Empfängers ein Minimum ist, die Jets also unsichtbar sind?





e) sichtbares Licht hat eine Wellenlänge im Bereich von 390 nm (violett) bis 780 nm (rot). Das weiße Licht einer Glühbirne wird an einem Gitter mit 50 Strichen pro mm gebeugt. Der Schirm steht 2,5 m hinter dem Gitter. Auf beiden Seiten der Schirmmitte erscheinen Spektren verschiedener Ordnung. Im Bild sichtbar ist das Spektrum 1. Ordnung auf der linken Seite des Schirms.

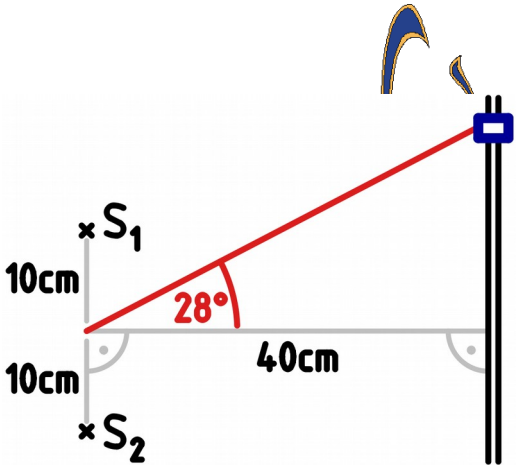
i) Weshalb ist das Maximum in der Schirmmitte weiß?

ii) Weshalb wird das rote Licht stärker gebeugt als das violette?

iii) Zeige, dass sich die Spektren 1. und 2. Ordnung nicht überlagern.

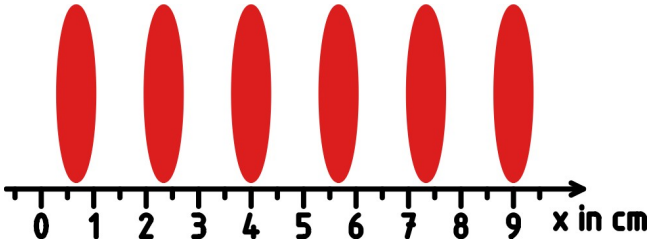
iv) Zeige, dass sich die Spektren 2. und 3. Ordnung schon überlagern.

f) Zwei gleichphasig schwingende Sender befinden sich in einem Abstand von 20cm. 40cm hinter den Sendern befindet sich ein auf einer Schiene verschiebbarer Detektor, der unter einem Winkel von 28° das Maximum erster Ordnung registriert.



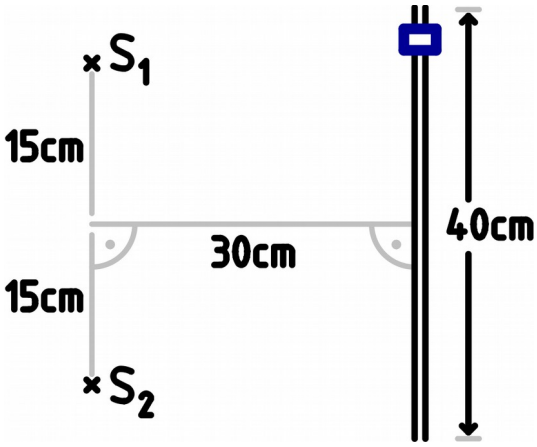
Bestimme die Wellenlänge mit der die beiden Sender arbeiten.

g) Ein Doppelspalt mit einem Abstand der Spaltmitten von 0,2 mm wird mit dem Licht eines roten Lasers beleuchtet. 5,0 m hinter dem Doppelspalt steht ein Schirm, auf dem das im Bild gezeigte Interferenzmuster entsteht.



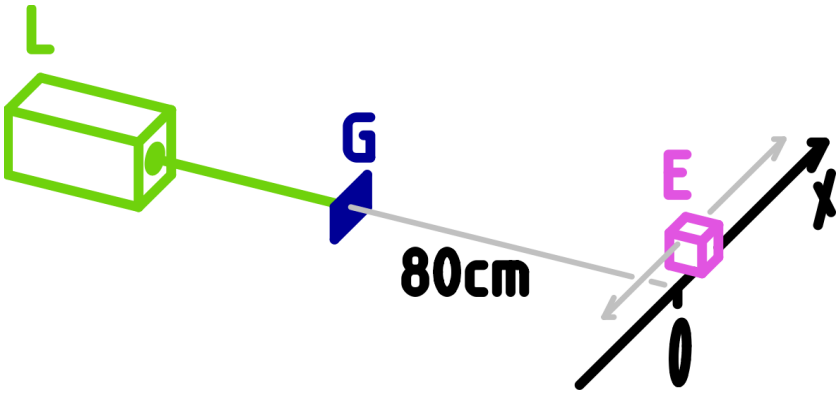
Bestimme die Wellenlänge des Lasers.

h) Zwei gleichphasig schwingende Mikrowellensender S1 und S2 befinden sich in einem Abstand von 30cm und strahlen Mikrowellen der Wellenänge 7,5cm ab. Auf einer 40cm langen Schiene in einem Abstand von 30cm von den Sendern (siehe Planfigur) befindet sich ein auf der Schiene verschiebbarer Empfänger. Dabei ist die Mitte der Schiene an der Mittelsenkrechten der beiden Sender ausgerichtet.



Berechne, wie viele Maxima bei dieser Anordnung mit dem Empfänger festgestellt werden können.

i) Mit einem Laser L der Wellenlänge 500 nm wird ein Gitter G mit 50 Strichen pro mm beleuchtet. Ein Empfänger E ist auf der x-Achse 80 cm hinter dem Gitter verschiebbar und registriert die Intensität des auftreffenden Lichts.



Die Anordnung wird so ausgerichtet, dass das Hauptmaximum bei x = 0 erscheint und die x-Achse parallel zur Gitterebene ist.

Bestimme die x-Koordinaten der Maxima 1. Ordnung.

Skizziere für -5cm ≤ x ≤ 5 cm den Verlauf der vom Empfänger gemessenen Intensität in Abhängigkeit von x in einem x-I-Diagramm. Dabei soll die x-Achse skaliert werden, die Intensitäts-Achse jedoch nicht.

k) Das Licht eines Lasers wird mit einem Gitter mit 100 Strichen pro mm gebeugt. Auf einem Schirm 0,20 m hinter dem Gitter sind eine Reihe von Maxima sichtbar. Benachbarte Maxima haben dabei einen Abstand von 0,8 cm. Bestimme die Wellenlänge des Laserlichts.

<u>Lösung:</u>

a) Gitterkonstante: $d=\frac{0{,}001\,m}{20}=\underline{5\cdot 10^{-5}m}$

$k\cdot\lambda=d\cdot\frac{\Delta y}{l}$ → $\lambda=\frac{d\cdot\Delta y}{k\cdot l}=\frac{5\cdot 10^{-5}m\cdot 4{,}8\cdot 10^{-2}m}{3\cdot 2{,}0\,m}=\underline{400\,nm}$; violettes Licht

b) $1\cdot\lambda=\Delta s=d\cdot\frac{\Delta y}{l}$ → $d=\frac{\lambda\cdot l}{\Delta y}=\frac{10\cdot 10^{-12}m\cdot 0{,}5\,m}{1{,}0\cdot 10^{-6}m}=\underline{5{,}0\,\mu m}$

Die Gitterkonstante darf also höchstens 5,0 µm groß sein, weil sonst die Maxima noch enger zusammenrücken.

c) Gitterkonstante: $d=\frac{0{,}001\,m}{250}=\underline{4{,}0\cdot 10^{-6}m}$

$k\cdot\lambda=\Delta s=d\cdot\sin\alpha$ $\sin\alpha=\frac{k\cdot\lambda}{d}=\frac{4\cdot 680\cdot 10^{-9}m}{4{,}0\cdot 10^{-6}m}=\underline{0{,}68}$ → $\underline{\alpha=42{,}8°}$

$\tan\alpha=\frac{\Delta y}{l}$ → $l=\frac{\Delta y}{\tan\alpha}=\frac{0{,}3\,m}{\tan 42{,}8°}=\underline{0{,}32\,m}$

Der Schirm darf also höchstens 32 cm vom Gitter entfernt sein.

d) $\frac{1}{2}\cdot\lambda=d\cdot\frac{\Delta y}{l}$ → $d=\frac{\lambda\cdot l}{2\cdot\Delta y}=\frac{0{,}03\,m\cdot 10\,000\,m}{2\cdot 5{,}0\,m}=\underline{30\,m}$

e) in Teilen

i) Das Hauptmaximum ist für alle Wellenlängen gleich bei α = 0°. Deshalb mischen sich hier alle Wellenlängen und das Licht erscheint weiß.

ii) $k \cdot \lambda = d \cdot \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{k \cdot \lambda}{d} = \frac{k}{d} \cdot \lambda$

Je größer die Wellenlänge ist, desto größer ist also der sina und desto größer ist der Winkel a selbst. Deshalb liegen Maxima umso weiter außen, je größer die Wellenlänge ist. Das rote Licht hat eine größere Wellenlänge als das violette, deshalb liegt sein Maximum weiter außen, es wird also stärker gebeugt.

iii) Gitterkonstante: $d = \frac{0{,}001\,m}{50} = \underline{2 \cdot 10^{-5}\,m}$

1. Ordnung außen -> rot: $\sin\alpha = \frac{1}{2 \cdot 10^{-5}\,m} \cdot 780 \cdot 10^{-9}\,m \rightarrow \alpha = 2{,}24°$

2. Ordnung innen -> violett: $\sin\alpha = \frac{2}{2 \cdot 10^{-5}\,m} \cdot 390 \cdot 10^{-9}\,m \rightarrow \alpha = 2{,}24°$

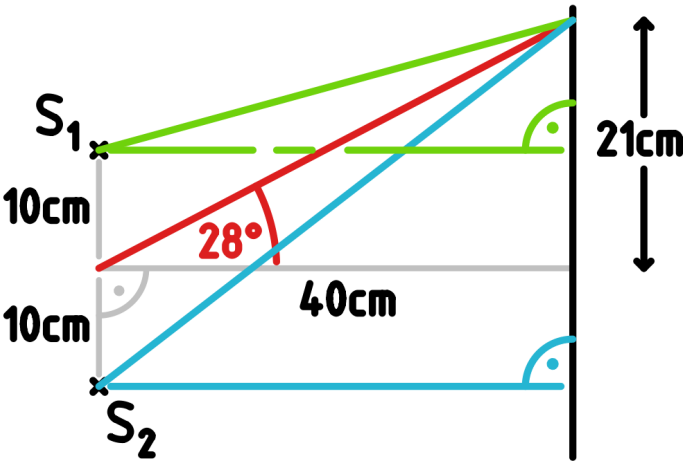
Die beiden Spektren stoßen also aneinander, aber sie überlappen nicht.

iv) 2. Ordnung außen -> rot : $\sin\alpha = \frac{2}{2 \cdot 10^{-5}\,m} \cdot 780 \cdot 10^{-9}\,m \rightarrow \alpha = 4{,}47°$

3. Ordnung innen -> violett: $\sin\alpha = \frac{3}{2 \cdot 10^{-5}\,m} \cdot 390 \cdot 10^{-9}\,m \rightarrow \alpha = 3{,}35°$

Das violette Maximum 3. Ordnung erscheint also unter einem kleineren Winkel als das rote in 2. Ordnung. Deshalb überlappen die beiden Spektren 2. und 3. Ordnung.

f) Bei diesen Abständen ganz sicher keine Näherungsformel!



$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{l}$$
$$\Delta y = l \cdot \tan\alpha = 40\,cm \cdot \tan 28°$$
$$\underline{\Delta y = 21{,}3\,cm}$$

Danach die beiden Laufwege mit Pythagoras:

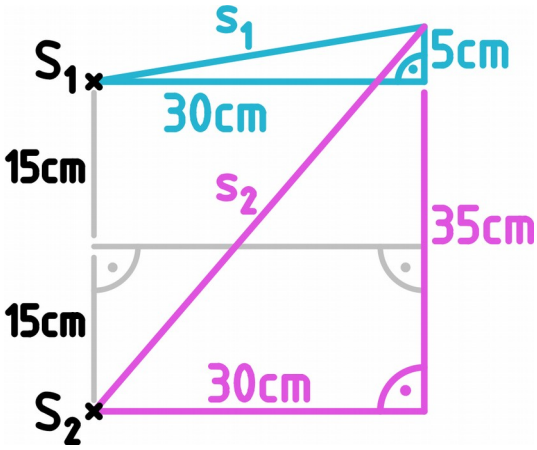
$$s_1 = \sqrt{(40\,cm)^2 + (11{,}3\,cm)^2} = \underline{41{,}6\,cm}$$
$$s_2 = \sqrt{(40\,cm)^2 + (31{,}3\,cm)^2} = \underline{50{,}8\,cm}$$
$$\lambda = \Delta s = 50{,}8\,cm - 41{,}6\,cm = \underline{9{,}2\,cm}$$

Die Näherungsformel liefert mit 9,4cm ein Ergebnis, was recht nahe dran ist. Ist aber trotzdem Unfug.

g) Äquidistante Maxima; Abstand zweier Maxima: $\Delta y = 5{,}0\,cm : 3 = \underline{1{,}7\,cm}$

$$1 \cdot \lambda = \Delta s = d \cdot \frac{\Delta y}{l} = 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,m \cdot \frac{0{,}017\,m}{5{,}0\,m} = \underline{\underline{680\,nm}}$$

h) Keine Näherungsformel !!!



Maximaler Laufwegunterschied am Rand der Schiene.

$$s_2 = \sqrt{(30\,cm)^2 + (35\,cm)^2} = \underline{46{,}1\,cm}$$

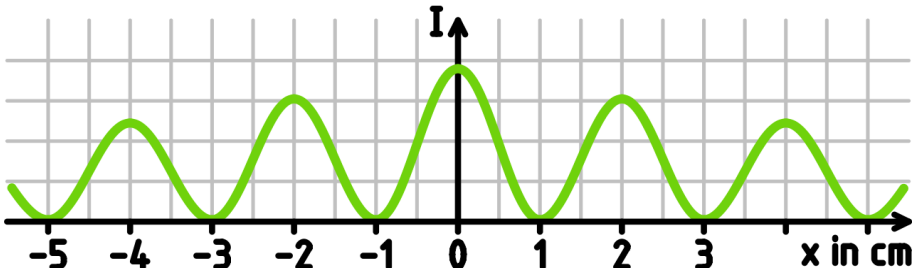
$$s_1 = \sqrt{(30\,cm)^2 + (5\,cm)^2} = \underline{30{,}4\,cm}$$

$$\Delta s = 46{,}1\,cm - 30{,}4\,cm = 15{,}7\,cm = 2{,}1 \cdot \lambda$$

Es können Maxima bis 2. Ordnung festgestellt werden, das sind insgesamt 5 Stück.

i) $1 \cdot \lambda = \Delta s = d \cdot \frac{\Delta y}{l}$ → $\Delta y = \frac{l \cdot \lambda}{d} = \frac{0{,}8\,m \cdot 500 \cdot 10^{-9}\,m}{0{,}001\,m : 50} = \underline{\underline{2{,}0\,cm}}$

Die x-Koordinaten der Maxima 1. Ordnung sind also x = -2,0cm und x = +2,0cm.



Für den Intensitätsverlauf muss nichts weiter ausgerechnet werden, weil die Maxima für so kleine Winkel noch äquidistant sind. Die Minima liegen genau in der Mitte zwischen zwei Maxima. Mit zunehmender Ordnung nimmt die Intensität der Maxima ab.

k) Wir testen mal auf Kleinwinkelnäherung

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{l} = \frac{0{,}008\,m}{0{,}20\,m} \rightarrow \underline{\alpha = 2{,}3\,°} \leftarrow \underline{\text{KLeinwinkelnäherung}}$$

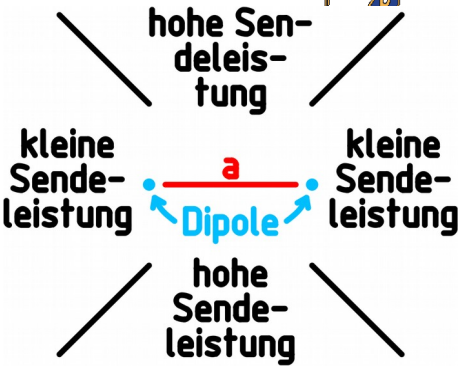
Die inneren Maxima sind also äquidistant und der Abstand der Maxima ist gleichzeitig das Δy für das Maximum erster Ordnung.

$$1 \cdot \lambda = \Delta s = d \cdot \frac{\Delta y}{l} = \frac{0{,}001\,m}{100} \cdot \frac{0{,}008\,m}{0{,}20\,m} = \underline{\underline{400\,nm}}$$

Aufgabe 13.262: Richtwirkung von Dipol-Paaren

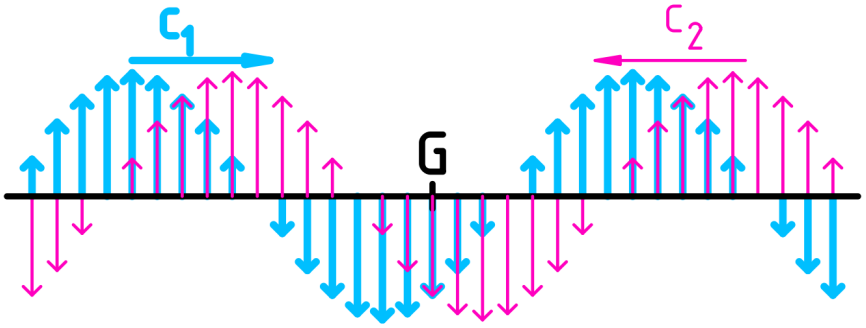
Zwei Sendeantennen können in eine bestimmte Richtung bei richtiger Anordnung weit mehr als die doppelte Sendeleistung einer einzelnen bringen.

In welchem Abstand a muss man die beiden Dipole aufstellen, um die im Bild dargestellte Forderung zu erfüllen? (Energieerhaltung beachten, weniger links und rechts heißt automatisch mehr oben und unten)



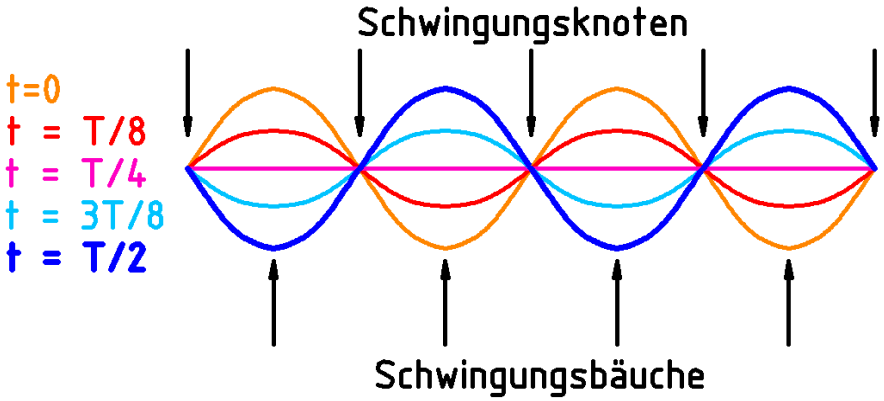
13.3 Stehende Wellen

Eine stehende Welle entsteht immer dann, wenn zwei Wellen gleicher Wellenlänge entlang einer Gerade gegeneinander laufen. Da sich die Phasenlage (Laufweg) der beiden Wellen entlang der Gerade kontinuierlich ändert gibt es irgendwo auf der Gerade einen Punkt G, in dem die beiden Wellen gleichphasig schwingen also ein Maximum.



Geht man von diesem Punkt aus um $\lambda/4$ nach rechts wird der eine Laufweg um $\lambda/4$ länger und der andere um $\lambda/4$ kürzer, der Laufwegunterschied ändert sich also um $\lambda/2$, was zu einem Minimum führt. Eine Bewegung nach links oder rechts um $\lambda/4$ erzeugt also eine Veränderung des Laufwegunterschieds um $\lambda/2$.

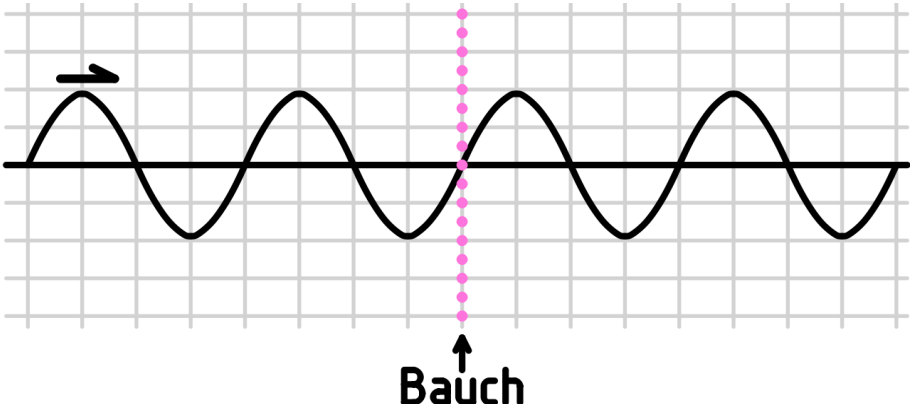
Man erhält deshalb auf der Gerade abwechselnd Maxima und Minima jeweils im Abstand $\lambda/4$. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Maxima beträgt $\lambda/2$. Die Minima befinden sich genau in der Mitte zwischen zwei Maxima. Die Minima nennt man Schwingungsknoten, die Maxima nennt man Schwingungsbäuche.



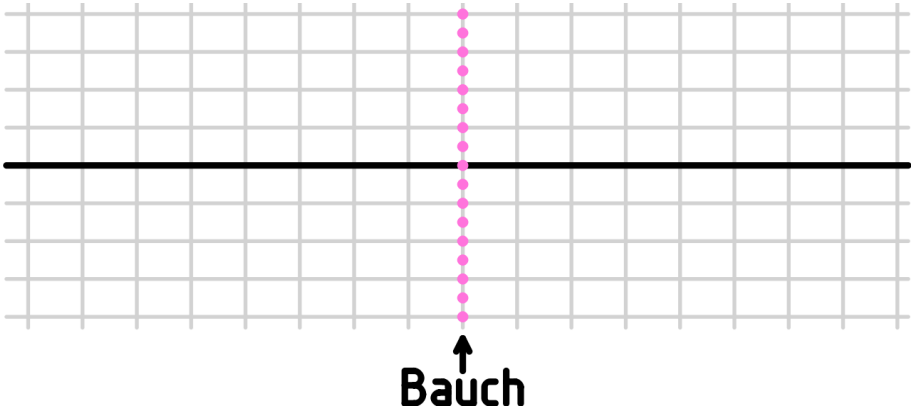
Aufgabe 13.263:

Das Bild zeigt die Momentaufnahme einer nach rechts laufenden Welle zum Zeitpunkt t = 0. Diese interferiert mit einer nach links laufenden Welle so, dass an der markierten Stelle ein Schwingungsbauch entsteht. Beachte, dass die beiden Wellen am Punkt eines Schwingungsbauches gleichphasig schwingen müssen.

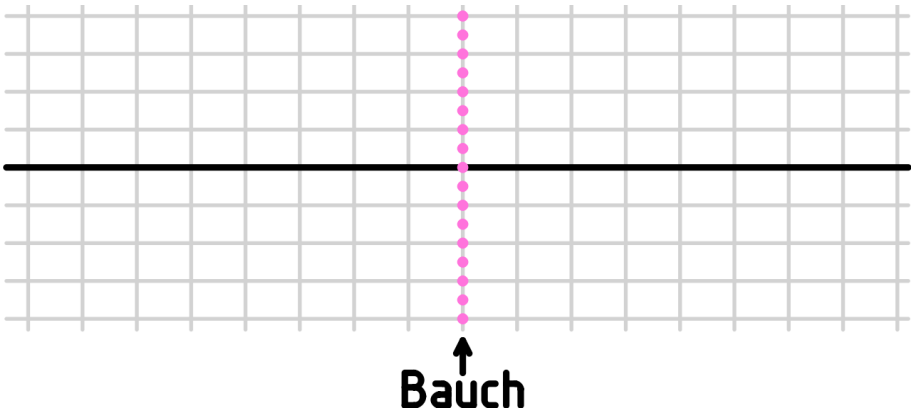
a) Zeichne in dasselbe Bild die Momentaufnahme der nach links laufenden Welle zum selben Zeitpunkt. Zeichne auch das Erscheinungsbild der resultierenden Welle ein.



b) Zeichne in das Bild rechts die beiden interferierenden Wellen und die resultierende Welle zum späteren Zeitpunkt t = T/4.



c) Wie b) für den Zeitpunkt t = 3/4 T.

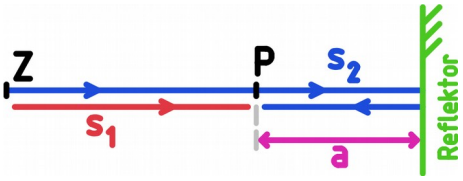


13.4 Stehende Welle durch Reflexion

Berechnung mit Laufwegunterschied:

Die eine Welle läuft direkt von Z zum Punkt P. Die reflektierte Welle muss weiter laufen. Die Länge der Strecke, die sie weiter läuft ist der Laufwegunterschied.

Die reflektierte Welle läuft die Strecke a über den Punkt P hinaus und anschließend wieder die Strecke a zurück. Zusätzlich muss man noch die Laufwegkorrektur bei Reflexion am festen Ende berücksichtigen. Damit erhält man für den Laufwegunterschied:



$$\Delta s = 2 \cdot a + \frac{\lambda}{2}$$

Schwingungsbäuche (Maxima):

$$\Delta s = k \cdot \lambda$$

$$2 \cdot a + \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda \;\rightarrow\; \underline{\underline{a = k \cdot \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4}}} \qquad \leftarrow \text{ Schwingungsbäuche}$$

Der Punkt für k = 0 befindet sich hinter den Reflektor, macht also hier keinen Sinn, weshalb man bei k = 1 beginnt. Schwingungsknoten (Minima) erhält man für:

$$2 \cdot a + \frac{\lambda}{2} = \frac{(2k+1) \cdot \lambda}{2} \;\rightarrow\; \underline{\underline{a = k \cdot \frac{\lambda}{2}}} \qquad \leftarrow \text{ Schwingungsknoten}$$

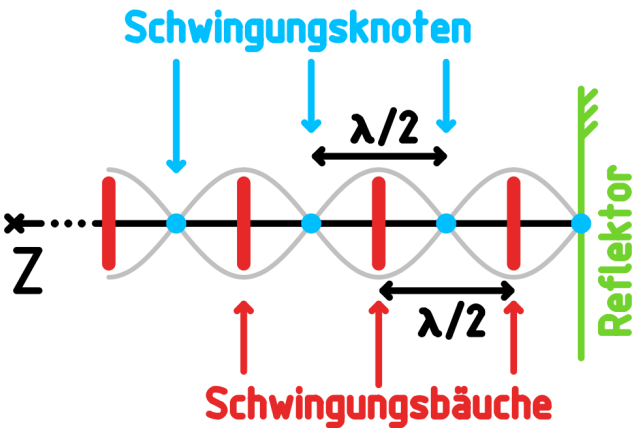
Der Punkt für k = 0 befindet sich direkt am Reflektor. Wir setzen die ersten Paar Werte für k ein und erhalten

Knoten bei k = 0; 1; 2; 3; 4; ... also bei

$$a = 0 \;;\; \frac{\lambda}{2} \;;\; \lambda \;;\; \frac{3}{2} \cdot \lambda \;;\; 2 \cdot \lambda \;;\ldots$$

Bäuche bei k = 1; 2; 3; ... also bei

$$a = \frac{\lambda}{4} \;;\; \frac{3}{4} \cdot \lambda \;;\; \frac{5}{4} \cdot \lambda \;;\ldots$$

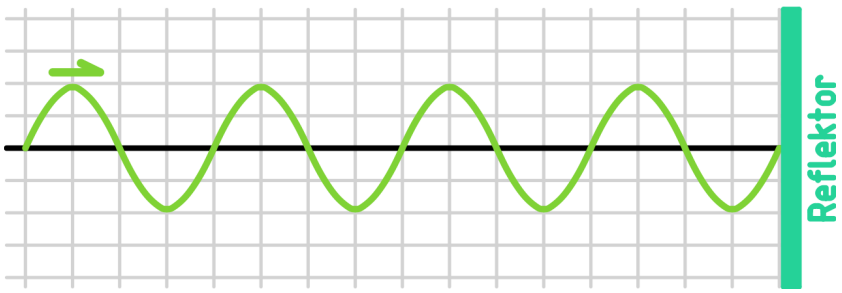


Es entsteht also ein Schwingungsknoten direkt am Reflektor und anschießend jeweils im Abstand λ/4 abwechselnd Bäuche und Knoten.

Aufgabe 13.264:

Das Bild zeigt die zum Reflektor hin laufende Welle zum Zeitpunkt t = 0 .
Beachte dass am festen Ende ein Wellenberg als Tal reflektiert wird.

a) Zeichne die reflektierte Welle und das Erscheinungsbild der resultierenden Welle zum selben Zeitpunkt in das selbe Bild.



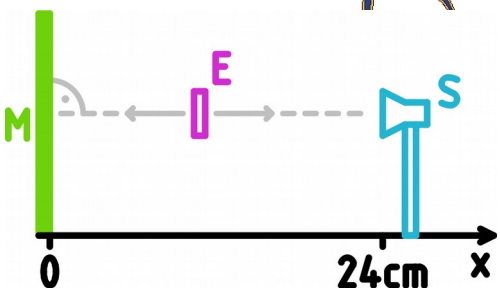
b) Zeichne die drei Wellen zum Zeitpunkt t = T/4.

c) Zeichne die drei Wellen zum Zeitpunkt t = T/2.

d) Zeichne die drei Wellen zum Zeitpunkt t = 3/4 T und markiere in dem entstandenen Bild Schwingungsknoten und -bäuche.

e) Angenommen ein Beobachter steht irgendwo auf der Gerade und weiß nichts von unserem Experiment, kann aber elektromagnetische Wellen mit einem Messgerät nachweisen. Welche der drei Wellen kann dieser Beobachter messen?

Aufgabe 13.265:



Ein Mikrowellensender S steht 24 cm weit entfernt von einer Metallplatte M und sendet Strahlung mit einer Wellenlänge von 8,0 cm aus. Auf der Lotstrecke zwischen Sender und Metallplatte wird ein Empfänger E bewegt, der die Intensität I der Mikrowellenstrahlung messen kann.

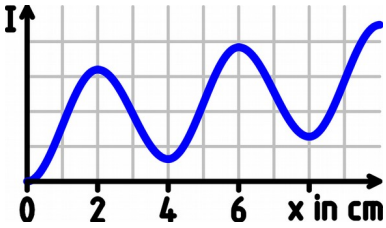
a) Skizziere ein x-I-Diagramm für $0 \leq x \leq 8$cm mit skalierter x-Achse, das die vom Empfänger gemessene Intensität I in Abhängigkeit von x zeigt. Die I-Achse soll nicht skaliert werden.

b) Erkläre, weshalb die Minima mit zunehmendem Abstand von der Metallplatte immer schlechter ausgeprägt sind, die Intensität bei den Minima mit zunehmendem Abstand von der Metallplatte also immer größer wird.

Nun stellen wir den Empfänger E auf die x-Koordinate eines Schwingungsknotens und lassen ihn da stehen.

c) Wie ändert sich die Empfangsintensität, wenn man den Sender um 2,0 cm nach rechts verschiebt? Wie ändert sich die Empfangsintensität, wenn man die Metallplatte um 2,0 cm nach links verschiebt?

Lösung:



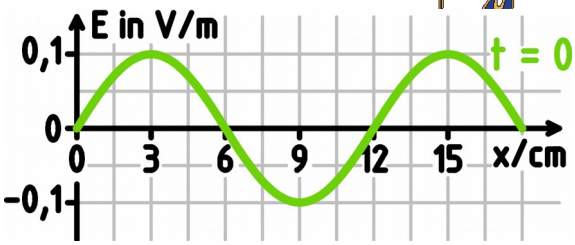
a) Schwingungsknoten bei x = 0 (am Reflektor); weitere Schwingungsknoten im Abstand $\frac{1}{2}\lambda$ = 4cm; in der Mitte zwischen zwei Knoten jeweils Schwingungsbäuche

b) Nimmt der Abstand von der Metallplatte zu, dann nimmt der Laufweg der reflektierten Welle zu und deshalb wird die Amplitude der reflektierten Welle kleiner. Umgekehrt wird die Amplitude der direkt von S ankommenden Welle größer. Der Unterschied der beiden Amplituden wird also immer größer und die Auslöschung wird immer weniger vollständig.

c) Die Lage von Minima und Maxima ist nur abhängig vom Abstand vom Reflektor. Deshalb ändert eine Verschiebung des Senders nicht viel, lediglich alle Intensitäten werden ein wenig kleiner, weil die Laufwege länger werden und dadurch die Amplituden kleiner. Ein Verschieben der Metallplatte um $\frac{1}{4}\lambda$ ändert den Abstand zur Metallplatte um $\frac{1}{4}\lambda$ und macht damit aus dem vorherigen Schwingungsknoten einen Schwingungsbauch -> die Empfangsintensität wird also sehr viel größer.

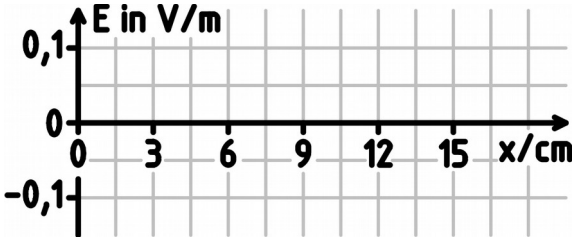
Aufgabe 13.266:

Entlang der x-Achse laufen zwei Wellen in entgegengesetzte Richtung und erzeugen eine stehende Welle. Das Bild zeigt den momentanen Zustand der elektrischen Feldstärke dieser stehenden Welle entlang der x-Achse zum Zeitpunkt t = 0, wenn die Schwingungsbäuche maximale Auslenkung besitzen.



a) Zeichne in dasselbe Bild den Zustand der elektrischen Feldstärke der stehenden Welle für die Zeitpunkte $t = \frac{1}{8}T$ (<- ungefähr) und $t = \frac{1}{4}T$ (<- genau).

b) Zeichne in das nächste Bild den Zustand der elektrischen Feldstärke der stehenden Welle für die Zeitpunkte $t = \frac{3}{8}T$ (<- ungefähr) und $t = \frac{1}{2}T$ (<- genau).



c) Bei x = 3,0 cm befindet sich ein Schwingungsbauch. Gib die x-Koordinaten aller Punkte mit $0 \leq x \leq 18{,}0$ cm an, bei denen der elektrische Feldvektor der stehenden Welle gleichphasig mit diesem Schwingungsbauch schwingt.

d) Obwohl die elektrischen Feldvektoren an den Punkten aus c) gleichphasig schwingen, sind die Punkte nicht alle gleichwertig. Worin unterscheiden sich die meisten?

e) Zeichne in einem skalierten t-E-Diagramm den zeitlichen Verlauf der elektrischen Feldstärke dieser Welle bei x = 3,0 cm.

Lösung:

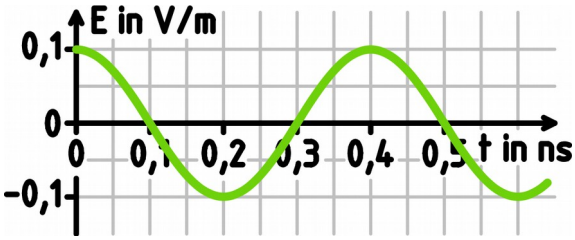
c) Die Feldvektoren an den Punkten mit $0 \leq x \leq 6{,}0$ cm schwingen alle gleichphasig. Die Feldvektoren an den Punkten mit $12{,}0 \text{ cm} \leq x \leq 18{,}0$ cm schwingen ebenfalls gleichphasig mit den ersteren.

d) Die Amplitude der elektrischen Feldstärke ist unterschiedlich.

e) Schwingungsdauer berechnen gibt:

T = 0,40 ns

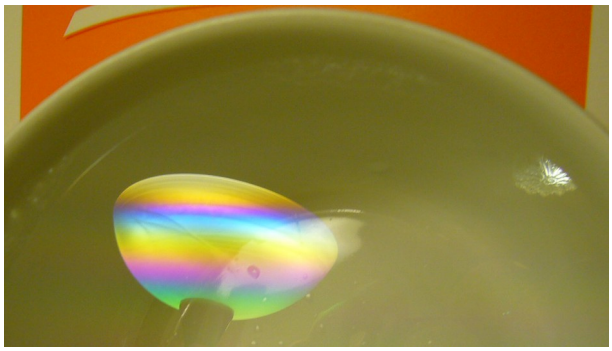
Bei t = 0 Amplitude maximal



13.5 Interferenz an dünnen Schichten

Typische Beispiele für dünne Schichten sind die Seifenhaut (Seifenblase) oder der Luftspalt zwischen aufeinander liegenden Gläsern. Das Licht wird an beiden Grenzschichten der dünnen Schicht reflektiert wodurch zwei unterschiedlich lange Laufwege entstehen. Den Laufwegunterschied Δs können wir in unsere Bedingungen für Verstärkung oder Auslöschung einsetzen.

Das Bild zeigt die Reflexion einer Lampe an einer - auf eine kleine Schüssel gezogenen - Seifenhaut. Durch die Schwerkraft dünnt die Seifenhaut oben aus und wird nach unten dicker. Die Farben - von oben nach unten gelb, orange, rot, violett, blau, grün - entstehen subtraktiv durch Auslöschung von violett, blau, grün, gelb, orange, rot in dieser Reihenfolge.



Obwohl es viele Effekte gibt, in denen der Betrachtungswinkel eine entscheidende Rolle spielt beschränken wir uns der Einfachheit halber bei rechnerischen Untersuchungen auf senkrecht auf die Grenzflächen einfallende Lichtstrahlen.

<u>Beispiel 1: Sehr dünne Schicht</u>

Sehr dünn soll hier bedeuten, dass die Dicke der Platte klein ist im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts, ein typisches Beispiel ist der Luftspalt zwischen zwei aufeinander liegenden Gläsern.

Die Welle, die an der Rückseite der Luftschicht reflektiert wird (Weg2) hat einen zusätzlichen Laufweg von $\lambda/2$ (Reflexion am festen Ende). Der zusätzliche Laufweg von 2d ist vernachlässigbar, weil die Dicke d im Vergleich zur Wellenlänge klein ist.

Der Laufwegunterschied der beiden reflektierten Wellen ist also unabhängig von der Wellenlänge immer ungefähr $\lambda/2$ (<- das stimmt auch bei einer sehr dünnen Seifenhaut; überlege). Das bedeutet, dass sich die beiden reflektierten Wellen gegenseitig auslöschen, daß also kein Licht reflektiert wird. Die dünne Schicht erscheint in Reflexion schwarz. Da gar kein Licht reflektiert wird, geht das ganze Licht durch die dünne Schicht durch (<- Energieerhaltung).

Optische Dichte

In einem Medium bewegt sich das Licht nicht mit der bekannten Vakuumlichtgeschwindigkeit c sondern langsamer.

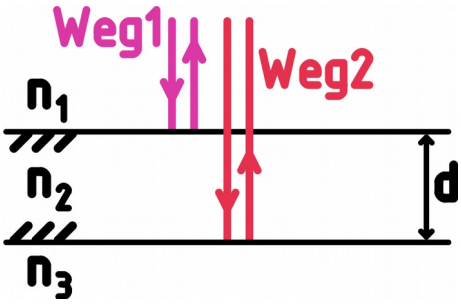
$$\boxed{c' = \frac{c}{n}}$$

Mit der Brechzahl n (Zahlenwerte siehe Formelsammlung). Eine Reflexion am optisch dichteren Medium (größeres n) entspricht einer Reflexion am festen Ende, eine Reflexion am optisch dünneren Medium entspricht einer Reflexion am offenen Ende.

Laufweg im Medium

Wenn Licht in ein Medium eindringt, verringert sich seine Ausbreitungsgeschwindigkeit. Da die Frequenz sich nicht ändert, muss die Wellenlänge im Medium kleiner werden, was sich auf die Phasenlage der Welle in Abhängigkeit vom Laufweg auswirkt. Der Laufweg im Medium muss deshalb mit dem Faktor n korrigiert werden.

Beispiel 2: Nicht ganz so dünne Schicht



a) $\underline{n_1 < n_2 < n_3} \Rightarrow \Delta s = 2 \cdot n_2 \cdot d$

b) $\underline{n_1 < n_3 < n_2} \Rightarrow \Delta s = 2 \cdot n_2 \cdot d - \frac{\lambda}{2}$

Damit erhält man Verstärkung oder Auslöschung nur für ganz bestimmte Wellenlängen.

Aufgabe 13.267: Seifenhaut

Eine vertikal hängende Seifenhaut, die von unten nach oben hin immer dünner wird (Schwerkraft), wird mit weißem Licht (kontinuierliches Spektrum, alle Wellenlängen) bestrahlt. Die Brechzahl der Seifenhaut ist n = 1,25. Wir gehen von senkrechtem Lichteinfall aus. Auf der Seifenhaut erscheint ein Spektrum. Von unten nach oben die Farben grün, blau, violett, rot, orange, gelb, weiß. Der oberste Teil der Seifenhaut erscheint schwarz. Die Farben entstehen subtraktiv durch Auslöschung der Komplementärfarben rot (700 nm), orange (600 nm), gelb (580 nm), grün (540 nm), blau (450 nm) und violett (400 nm).

a) Erkläre, weshalb der oberste Teil der Seifenhaut kein Licht reflektiert.

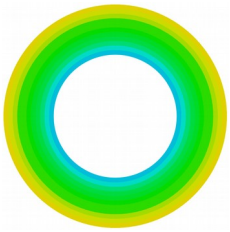
b) Begründe das die dünnste Seifenhautschicht zur selektiven Auslöschung einer bestimmten Wellenlänge λ eine Dicke von $d = 0{,}4 \cdot \lambda$ hat.

c) Erkläre, weshalb die Farben genau in dieser Reihenfolge von oben nach unten auftreten.

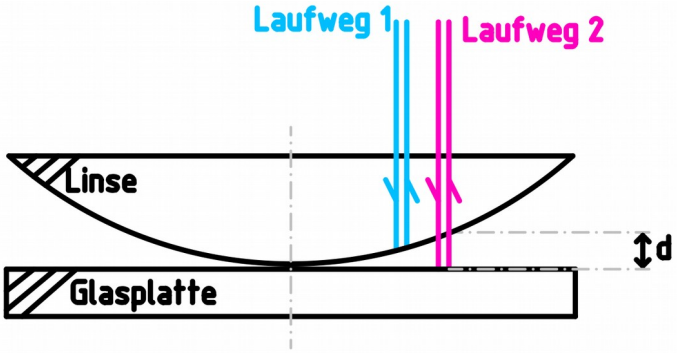
d) Gib die Dicke der Seifenhaut am oberen (gelb) und am unteren Ende (grün) des erscheinenden Farbspektrums an.

e) Erkläre das Zustandekommen der weißen Schicht zwischen der gelben und der schwarzen.

<u>Aufgabe 13.268: Newtonsche Ringe</u>



Blickt man von oben auf eine Linse, die auf einer Glasplatte liegt, und von oben mit weißem Licht beleuchtet wird, erscheinen Farbige Ringe auf der Linse. Die Farben entstehen hauptsächlich subtraktiv durch Auslöschung der Komplementärfarbe.



Der relevante Laufwegunterschied kommt durch den Luftspalt zwischen Linse und Glasplatte zustande, der an verschiedenen Stellen eine unterschiedliche Dicke d hat. Die beiden Laufwege im Bild sollten an derselben Stelle, also übereinander liegen, das kann ich aber nicht zeichnen. Die Brechung an der unteren Grenzschicht der Linse ist bei diesem Effekt vernachlässigbar. Die Lichtstrahlen verlaufen an jeder Stelle so gut wie vertikal. Das klingt nur deshalb unglaubwürdig, weil die Krümmung der Linse im Bild extrem übertrieben gezeichnet ist.

a) Begründe, dass für den effektiven Laufwegunterschied gilt: $\Delta s = 2 \cdot d + \frac{\lambda}{2}$

b) Erkläre, weshalb der Bereich um den Mittelpunkt der Linse dunkel (schwarz) erscheint.

c) Für welchen kleinsten Wert von $d > 0$ kommt es für das violette Licht ($\lambda = 400$ nm) zum ersten mal zu Auslöschung? Welche Farbe hat dieser Ring?

d) Für welchen kleinsten Wert von $d > 0$ kommt es für das rote Licht ($\lambda = 700$ nm) zum ersten mal zu Auslöschung? Welche Farbe hat dieser Ring?

e) Berechne die Radien der beiden Ringe aus c) und d) wenn die Linse einen Krümmungsradius von 4,0 m hat.

Lösung:

a) Laufweg 2 ist geometrisch um 2·d länger. Laufweg 1 wird am optisch dünneren Medium reflektiert, erhält also keinen Phasensprung, Laufweg 2 dagegen wird am optisch dichteren Medium (Glasplatte) reflektiert, erhält also einen Phasensprung und damit eine zusätzliche Laufwegkorrektur von $\frac{1}{2}\cdot\lambda$.

b) In der Mitte ist d = 0 und deshalb $\Delta s = \frac{1}{2}\cdot\lambda$ für alle Wellenlängen. Deshalb kommt es für alle Wellenlängen zur Auslöschung und der Punkt in der Mitte ist Dunkel.

c) $(2\cdot 1+1)\cdot\frac{\lambda}{2}=\Delta s=2\cdot d+\frac{\lambda}{2}$ → $d=\frac{\lambda}{2}=\frac{400\,nm}{2}=\underline{200\,nm}$

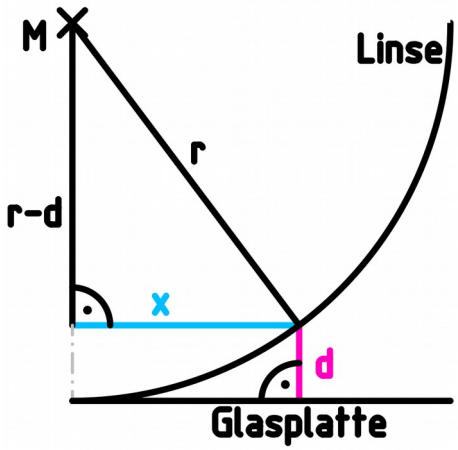
Diesem Ring fehlt das violette Licht, der Ring ist also gelb oder orange.

d) $(2\cdot 1+1)\cdot\frac{\lambda}{2}=\Delta s=2\cdot d+\frac{\lambda}{2}$ → $d=\frac{\lambda}{2}=\frac{700\,nm}{2}=\underline{350\,nm}$

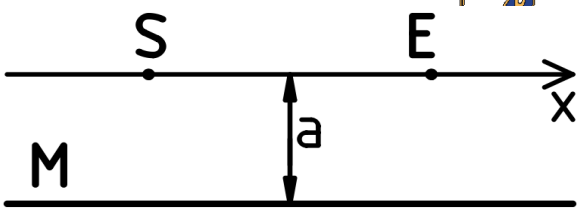
Diesem Ring fehlt das rote Licht, der Ring ist also bis türkis bis grün.

e) Planfigur siehe rechts.

$$r^2=(r-d)^2+x^2=r^2-2\cdot r\cdot d+x^2 \rightarrow x^2=2\cdot r\cdot d$$
$$x_c=\sqrt{2\cdot r\cdot d}=\sqrt{2\cdot 4{,}0\,m\cdot 200\cdot 10^{-9}\,m}$$
$$x_c=\underline{1{,}3\,mm}$$
$$x_{viol}=\underline{1{,}7\,mm}$$

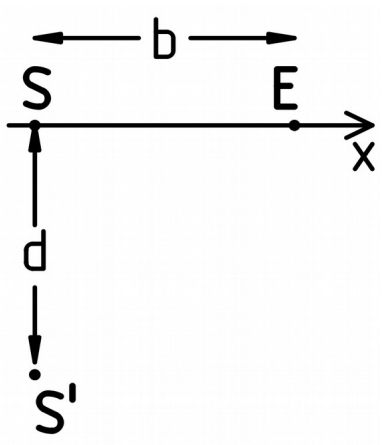


Aufgabe 13.269: Link-Ebene Lehrplan; Interferenz Dipolstrahlung



Auf der x-Achse liegen die Mittelpunkte eines Sendedipols S und eines darauf abgestimmten Empfangsdipols E. Sender und Empfänger sind parallel zueinander und stehen senkrecht auf der Zeichenebene. Die ausgesandte elektromagnetische Strahlung hat die Wellenlänge λ = 2,75 cm. Eine Metallplatte M wird parallel zu Sender und Empfänger im Abstand a von der x-Achse angeordnet (vgl. Abb.).

a) Wird der Empfänger E in x-Richtung verschoben, beobachtet man, dass die von E nachgewiesene Intensität zwischen minimalen und maximalen Werten variiert. Erklären Sie an Hand einer beschrifteten Skizze (ohne Rechnung!) das Zustandekommen dieser Erscheinung.

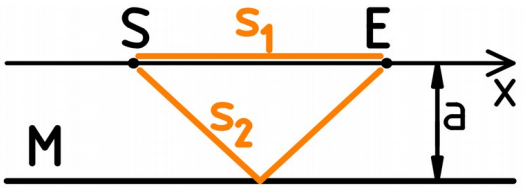


Die unter a) beschriebene Erscheinung würde ähnlich beobachtet werden, wenn anstelle der Platte M ein zweiter zu S paralleler und gleichphasig erregter Sendedipol S' im Abstand d vorhanden wäre.

b) Befindet sich der Empfänger E in der Entfernung b=145cm vom Sender S und besitzt der Abstand von S zu S' den Wert d=20cm, so registriert E ein Minimum. Begründen Sie dies rechnerisch.

c) Berechnen Sie die Sendefrequenz f.

Lösung:



a) In E Überlagern sich die Welle, die direkt von S nach E gelangt, und die an M reflektierte Welle. Der Unterschied der beiden Laufwege ändert sich mit der Position von E. Bei ganzzahligen Vielfachen der Wellenlänge kommt es zu Verstärkung, bei ungeradzahligen Vielfachen der halben Wellenlänge kommt es zu Auslöschung.

b) $\Delta s=\sqrt{b^2+d^2}-b=1{,}37\,cm\approx\frac{\lambda}{2}$, also liegt ein Minimum vor

c) $f=\frac{\lambda}{c}=\underline{10{,}9\,GHz}$

13.6 Abi mit Lösung

Aufgabe 13.270: Abi 1999

Mit einer Quecksilberdampflampe soll ein Gitterspektrum erzeugt werden. Die Lampe erzeugt intensive, sichtbare Spetrallinien im Wellenlängenberich von 405nm bis 579nm. Der Abstand des Schirms vom Gitter beträgt 2,00m. Das Gitter hat 100 Spalte pro Millimeter.

a) Wie breit muss der Schirm mindestens sein, damit er die beiden sichtbaren Spektren 1. Ordnung vollständig erfasst?

b) Zeigen Sie, dass es zu einer Überlappung der sichtbaren Gitterspektren der 3. und 4. Ordnung kommt.

c) Begründe, dass sich die Überlappung auch durch die Verwendung eines feineren Gitters nicht beseitigen lässt.

Lösung:

a) Am weitesten draußen sind die Maxima der größten Wellenlängen.

$$\lambda = d \cdot \frac{\Delta y}{L} \rightarrow \Delta y = \frac{L \cdot \lambda}{d} = \frac{2{,}0\,m \cdot 579 \cdot 10^{-9}\,m}{0{,}01 \cdot 10^{-3}\,m} = \underline{12\text{cm}}$$

Der Schirm muss also mind. 24cm breit sein.

b) 579nm in 3. Ordnung: $\Delta y = \frac{L \cdot 3 \cdot \lambda}{d} = \frac{2{,}0\,m \cdot 3 \cdot 579 \cdot 10^{-9}\,m}{0{,}01 \cdot 10^{-3}\,m} = \underline{35\text{cm}}$

405nm in 4. Ordnung: $\Delta y = \frac{L \cdot 4 \cdot \lambda}{d} = \frac{2{,}0\,m \cdot 3 \cdot 405 \cdot 10^{-9}\,m}{0{,}01 \cdot 10^{-3}\,m} = \underline{\underline{32\text{cm}}}$

Also sind die Maxima der kleinen Wellenlängen in 4. Ordnung weiter innen als die Maxima der großen Wellenlängen in 3. Ordnung -> Überlappung

c) Die relative Position der Maxima hat nur mit den dazugehörigen Laufwegunterschieden zu tun und kann nicht beeinflusst werden.

$$k \cdot \lambda = d \cdot \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{k \cdot \lambda}{d}$$

579nm in 3. Ordnung: $\sin\alpha_3 = \frac{3 \cdot 579\text{nm}}{d} = \frac{1737\text{nm}}{d}$

405nm in 4. Ordnung: $\sin\alpha_4 = \frac{4\cdot 405\text{nm}}{d} = \frac{1620\text{nm}}{d}$

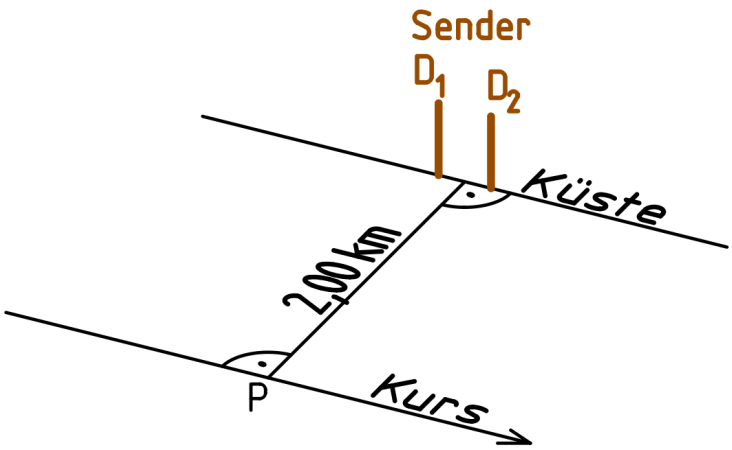
$\frac{1737\text{nm}}{d} > \frac{1620\text{nm}}{d} \Rightarrow \alpha_3 > \alpha_4$, deshalb liegt das Maximum 3. Ordnung für 579 nm immer weiter außen als das Maximum 4. Ordnung für 405 nm.

Aufgabe 13.271: Abi 2000

Die Antennenanlage eines UKW-Senders besteht aus zwei gleich langen, vertikalen Dipolen D1 und D2; die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte verläuft horizontal. Die Dipole schwingen gleichphasig mit der Frequenz 100 MHz, ihr Abstand beträgt 3,75m.

a) Wie lang muss jeder Sendedipol sein, damit er mit maximaler Amplitude schwingt? Geben Sie zwei möglichst kurze Dipollängen an.

Das Sendesignal soll von einem Schiff empfangen werden, das einen Kurs parallel zur Verbindungsgeraden im Abstand 2,00km hält. Vom Empfangsmaximum nullter Ordnung P aus fährt das Schiff in der eingezeichneten Richtung weiter.



b) In welcher Entfernung von P tritt erstmals minimaler Empfang auf?

c) Begründen Sie, warum die Empfangsleistung gegen Null geht, wenn sich das Schiff weit genug von P entfernt.

Lösung:

a) $\lambda\cdot f = c \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\cdot 10^8\, m/s}{100\cdot 10^6\, Hz} = \underline{3{,}0\, m}$

Ein Lambda-Halbe-Dipol müsste 1,5m lang sein. Die nächsten passenden Längen wären 3,0m und 4,5m.

b) $\frac{1}{2}\cdot\lambda = d\cdot\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = \frac{\lambda}{2\cdot d} = \frac{3{,}0\, m}{2\cdot 3{,}75\, m} = 0{,}4 \rightarrow \alpha = \underline{23{,}6°}$

$$\tan 23{,}6° = \frac{\Delta x}{2{,}00\,km} \rightarrow \Delta x = \underline{0{,}87\,km}$$

Am Ergebnis des Winkels sieht man, dass die Kleinwinkelnäherung hier nicht geht.

c) Die Empfangsleistung nimmt mit der Entfernung von jedem Sender ab ($1/r^2$-Gesetz) und geht schließlich gegen Null. Das hat nichts mit Interferenz zu tun und gilt auch hier.

Aufgabe 13.272: Abi 2000

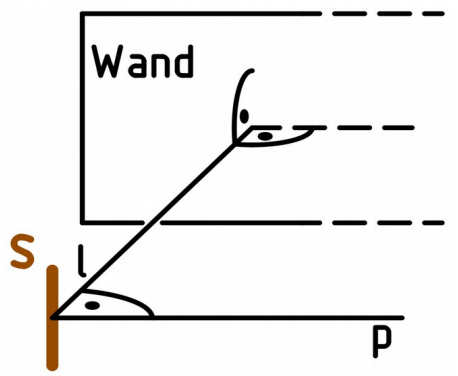
Mit einem Beugungsgitter wird das sichtbare Licht einer Bogenlampe untersucht. Das sichtbare Spektrum (380nm bis 750nm) hat auf dem 4,60m vom Gitter entfernten Schirm eine Breite von 25,5cm. Berechnen Sie die Anzahl der Gitterstriche pro Millimeter. Verwenden Sie dabei die Kleinwinkelnäherung.

Lösung:

$$\lambda = d \cdot \frac{y}{l} \rightarrow y = \frac{\lambda \cdot l}{d} \rightarrow \Delta y = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot l}{d} \overset{¿}{\rightarrow} d = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot l}{\Delta y} = \frac{370 \cdot 10^{-9} \cdot 4{,}6\,m}{0{,}255\,m} = \underline{6{,}67\,\mu m}$$

Das macht 150 Striche pro Millimeter.

Aufgabe 13.273: Abi 2001, Dezimeterwellen



Ein vertikaler Sendedipol S ist 50cm entfernt vor einer ebenfalls vertikalen Metallwand W aufgestellt. Die Frequenz der abgestrahlten Welle beträgt 2,0GHz. Beachten Sie den Phasensprung bei der Reflexion an der Wand.

a) Welche Wellenlänge hat die vom Sendedipol abgestrahlte Welle und was ist die kürzeste Länge für einen optimal abgestimmten Empfangsdipol?

Zunächst wird ein vertikaler Empfangsdipol auf der Lotstrecke l bewegt.

b) Erklären Sie, weshalb der Empfangsdipol eine von Ort zu Ort veränderliche Intensität registriert. Skizzieren Sie den Verlauf der Intensität beim Empfangsdipol in Abhängigkeit vom Wandabstand x im Bereich 0 < x < 20cm.

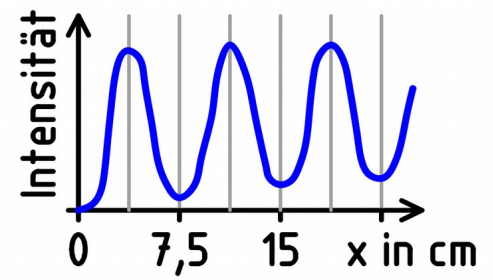
c) Nun wird der Empfangsdipol auf der Halbgeraden p aus sehr großer Entfernung auf den Sender zu bewegt. In welcher Entfernung vom Sendedipol ist das erste Maximum zu erwarten?

Lösung:

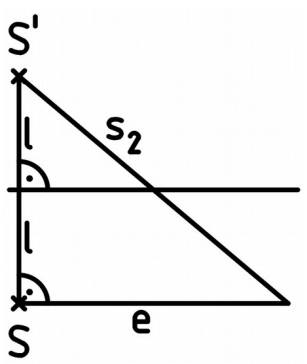
a) $\lambda \cdot f = c \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{2 \cdot 10^9 Hz} = \underline{15cm}$

Ein optimaler Sendedipol ist eine halbe Wellenlänge lang, also 7,5cm.

b) Auf der Lotstrecke überlagern sich die direkt vom Sender ankommende Welle und die von der Metallwand reflektierte Welle. Bewegt man den Empfänger, dann verändern sich beide Laufwege und damit der Laufwegunterschied. Für unterschiedliche Laufwege kommt es dann entweder zu Verstärkung oder zu Auslöschung.



Beim Zeichnen achten Sie darauf, dass die Minima mit zunehmendem Abstand von der Wand immer weniger stark ausgeprägt sind, weil sich der Laufwegunterschied vergrößert und damit auch der Intensitätsunterschied der beiden Wellen.



c) Geschickter Weise spiegelt man den Sender, um an den Laufweg der reflektierten Welle zu gelangen. Phasensprung nicht vergessen (λ/2).

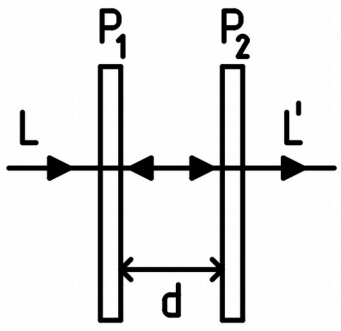
$$s_2 = \sqrt{4 \cdot l^2 + e^2}$$

$$\lambda = \Delta s = s_2 - s_1 = \sqrt{4 \cdot l^2 + e^2} + \frac{\lambda}{2} - e \rightarrow \frac{\lambda}{2} + e = \sqrt{4 \cdot l^2 + e^2}$$

$$\frac{\lambda^2}{4} + \lambda \cdot e + e^2 = 4 \cdot l^2 + e^2 \rightarrow \lambda \cdot e = 4 \cdot l^2 - \frac{\lambda^2}{4} \rightarrow e = \frac{4 \cdot l^2 - 0{,}25 \cdot \lambda^2}{\lambda}$$

$$e = \frac{4 \cdot 0{,}5^2 m^2 - 0{,}25 \cdot 0{,}15^2 m^2}{0{,}15 m} = \underline{6{,}63 m}$$

Aufgabe 13.274: Abi 2004; Vielfachreflexion



Von zwei ebenen Glasplatten P1 und P2 wird eine planparallele Luftschicht eingeschlossen. Die Breite d des Luftspalts lässt sich mechanisch präzise einstellen. Die den Luftspalt begrenzenden Oberflächen sind teildurchlässig verspiegelt, so dass ein senkrecht zu den Glasplatten eintreffender Lichtstrahl L im Luftspalt sehr oft hin und her reflektiert wird. Der resultierende Lichtstrahl L' ergibt sich durch Interferenz aller austretenden Strahlenteile.

a) Begründen Sie, dass Licht mit den Wellenlängen $\lambda_k = 2 \cdot \frac{d}{k}$; $k \in \mathbb{N}$ optimal durchgelassen wird. Warum haben die Phasensprünge bei der Reflexion keinen Einfluss auf des Ergebnis?

b) Geben Sie die zwei kleinsten Werte von d (d ≠ 0) an, bei denen die Anordnung für die Wellenlänge $\lambda_\circ$ = 589 nm optimal durchlässig ist, und untersuchen Sie für diese beiden d-Werte, ob es neben $\lambda_\circ$ noch weitere Wellenlängen im sichtbaren Bereich (380nm bis 750nm) mit optimaler Durchlässigkeit gibt.

Lösung:

a) Bei einer hin und her Reflexion wird ein zusätzlicher Laufweg von Δs = 2·d zurückgelegt. Falls dieser Laufwegunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist kommt es immer zu Verstärkung, egal wie oft reflektiert wird.

$$\Delta s = 2 \cdot d = k \cdot \lambda \quad ; \quad k \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 2 \cdot \frac{d}{k} \quad ; \quad k \in \mathbb{N}$$

Die Phasensprünge haben keinen Einfluss, weil es zweimal zu einem Phasensprung von einer halben Wellenlänge kommt. Das mach insgesamt eine ganze Wellenlänge, führt also zur selben Phasenlage wie ohne Phasensprünge.

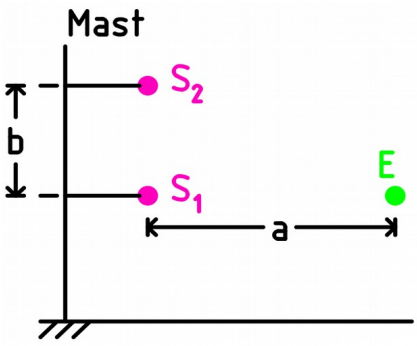
b) $\lambda_0 = 2 \cdot \frac{d}{k}$ → $d = \frac{\lambda_0 \cdot k}{2}$ Für k = 1 bzw. k = 2 gibt das $\underline{\underline{d_1 = 0{,}29\,\mu m;\ d_2 = 0{,}59\,\mu m}}$

$\lambda = 2 \cdot \frac{d_1}{k}$ gibt für k = 1; 2;... : $589\text{nm};\ 295\text{nm};\ \ldots$ schon zu klein.

$\lambda = 2 \cdot \frac{d_2}{k}$ gibt für k = 1; 2;... : $1178\text{nmnm};\ 589\text{nmnm};\ 393\text{nm};\ 295\text{nm};\ \ldots$

Die einzige sichtbare mit optimaler Durchlässigkeit ist also 393nm.

Aufgabe 13.275: Abi 2005; UKW-Sender



Die Sendeanlage eines UKW-Senders besteht aus einem vertikal stehenden Mast, an dem zwei zueinander parallele, horizontal liegende Dipole S1 und S2 übereinander angeordnet sind. Beide schwingen gleichphasig mit derselben Amplitude und einer Frequenz von 100 MHz. Der Einfluss des Mastes und die Reflexion an der Erdoberfläche sollen im Folgenden vernachlässigt werden.

a) Berechnen Sie die Länge der Dipole, die auf die Sendefrequenz agbestimmt sind und in der Grundschwingung angeregt werden.

b) Der Sendedipol S2 befindet sich in einem veränderlichen Abstand b über S1 (vergleiche Skizze). Ein Empfangsdipol E ist parallel zu den Sendedipolen in gleicher Höhe wie der untere Sendedipol S1 im Abstand a = 10,0 m angeordnet. Bestimmen Sie den kleinsten Abstand b, für den sich der Empfangsdipol in einem Interferenzminimum befindet.

c) Wie bei vielen Sendeanlagen üblich, sollen nun die beiden Sendedipole im Abstand b = 0,5λ übereinander angeordnet sein. Begründen Sie, weshalb diese Anordnung als Richtstrahler wirkt. Ermitteln Sie auch, in welchen Richtungen in der Zeichenebene man in großer Entfernung der Sendeanlage maximale bzw. minimale Intensität der Abstrahlung beobachtet.

Lösung:

a) $\lambda \cdot f = c \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{100 \cdot 10^6 Hz} = \underline{3{,}0\,m}$

Die Lambda-Halbe-Dipole müssen also 1,50m lang sein.

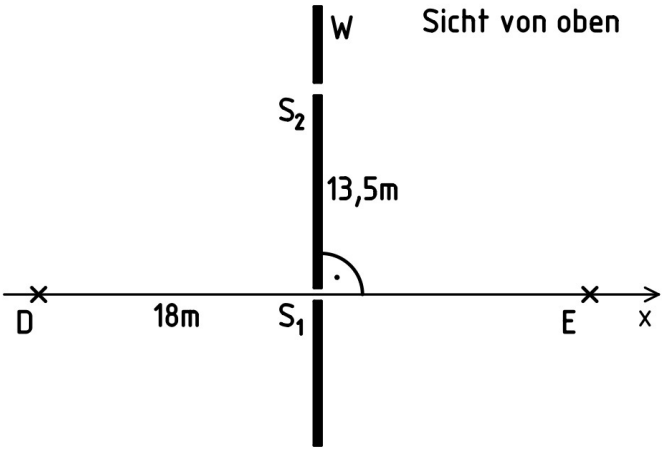
b) $\frac{\lambda}{2} = \Delta s = \sqrt{b^2 + a^2} - a \rightarrow \sqrt{b^2 + a^2} = \frac{\lambda}{2} + a \rightarrow b^2 + a^2 = 0{,}25 \cdot \lambda^2 + a \cdot \lambda + a^2$

$b = \sqrt{0{,}25 \cdot \lambda^2 + a \cdot \lambda} = \sqrt{0{,}25 \cdot 9\,m^2 + 10\text{m} \cdot 3\text{m}} = \underline{\underline{5{,}7\,m}}$

c) Wegen $\Delta s = d \cdot \sin\alpha = \frac{\lambda}{2} \cdot \sin\alpha \leqslant \frac{\lambda}{2}$ ist Δs immer kleiner als ½λ. Es gibt also nur das Hauptmaximum auf der Mittelsenkrechten der beiden Sendedipole und ein Minimum auf der Gerade durch die beiden Sendedipole (außerhalb der beiden Sender). Die Sendeanlage strahlt also fast nichts nach oben und unten ab sondern alles nach rechts und links, also in horizontaler Richtung -> Richtstrahler.

Aufgabe 13.276: Abi 2006; Dipolstrahlung

Ein UKW-Sender hat die Frequenz 100MHz und gibt seine Strahlung über einen vertikalen Dipol D ab. D steht 18,0m vor einer ebenfalls vertikalen Metallwand W, die zwei spaltförmige Öffnungen S1 und S2 hat, welche parallel zum Dipol im gegenseitigen Abstand 13,5m verlaufen. Entlang der eingezeichneten x-Achse lässt sich ein vertikaler Empfangsdipol E verschieben.



a) Welche Wellenlänge hat die vom Sendedipol abgestrahlte Welle und was ist die kürzeste Länge für einen optimal abgestimmten Empfangsdipol?

Der Empfangsdipol E wird zunächst in einer Entfernung von 18,0m hinter der Wand aufgestellt.

b) Ermitteln Sie, ob ein Empfangsmaximum oder -minimum vorliegt.

c) Nun wird E langsam auf die Wand zu bewegt. Bestimmen Sie, wie viele Empfangsminima während dieser Bewegung theoretisch auftreten und wo sie liegen.

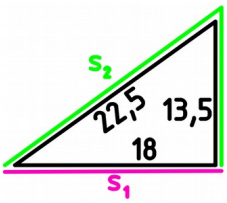
Lösung:

a) $c=\lambda\cdot f \rightarrow \lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{100\cdot 10^6\,Hz}=\underline{3{,}0\,m}$

Der Empfangsdipol muss eine halbe Wellenlänge lang sein, also 1,50m.

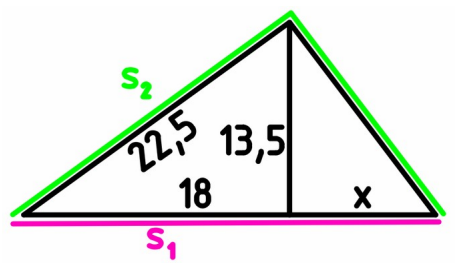
b) $\Delta s=s_2-s_1=2\cdot\sqrt{18^2\,m^2+13{,}5^2\,m^2}-36\text{m}=45\text{m}-36\text{m}=\underline{9\text{m}=3\cdot\lambda}$ Ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge, also liegt ein Maximum vor.

c) Am Punkt E beträgt der Laufwegunterschied 9,0m. Direkt hinter dem Spalt beträgt der Laufwegunterschied 18,0m (siehe Planfigur).



$\Delta s=s_2-s_1=(22{,}5\,m+13{,}5\,m)-18\,m=\underline{18{,}0\,m}$

Auf dem Weg von E nach S1 werden alle Werte dazwischen angenommen. Minima entstehen dabei für die Werte: Δs = 10,5m; 13,5m und 16,5m (ungeradzahlige Vielfache von $\frac{1}{2}\lambda$ also von 1,5m). Es treten also 3 Minima auf.

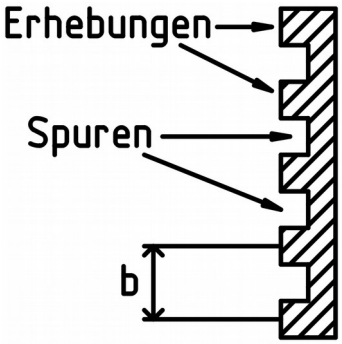


Die x-Werte findet man mit Pythagoras.

$$10{,}5\,m = \Delta s = s_2 - s_1$$
$$10{,}5\,m = 22{,}5\,m + \sqrt{13{,}5^2\,m^2 + x^2} - 18\,m - x$$
$$10{,}5\,m = \sqrt{13{,}5^2\,m^2 + x^2} + 4{,}5\,m - x$$
$$6{,}0\,m + x = \sqrt{13{,}5^2\,m^2 + x^2}$$
$$36\,m^2 + 12\,m \cdot x + x^2 = 13{,}5^2\,m^2 + x^2$$
$$x = \frac{13{,}5^2\,m^2 - 36\,m^2}{12\,m} = \underline{\underline{12{,}2\,m}}$$

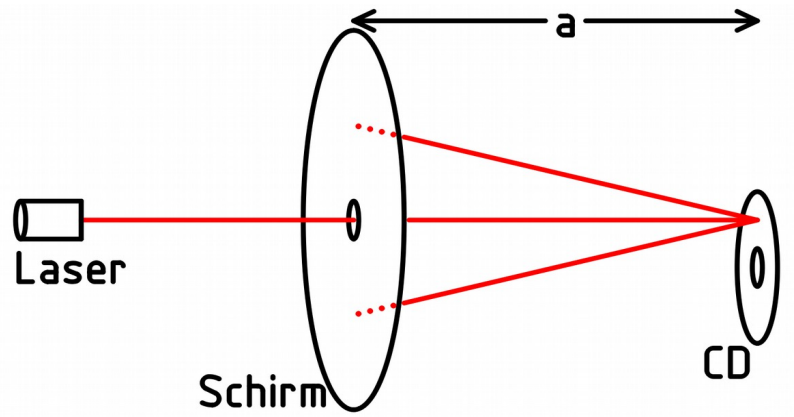
Für die anderen beiden Laufwegunterschiede 13,5m und 16,5m findet man x = 5,63m bzw. x = 1,59m.

<u>Aufgabe 13.277: Abi 2007; Interferenz bei einer CD</u>



Auf einer CD ist die Information auf einer spiralförmigen Spur gespeichert. Das Bild zeigt schematisch den stark vergrößerten Teil einer CD-Oberfläche im Querschnitt.Die Erhebungen zwischen benachbarten Spuren reflektieren Licht und können damit als Erregerzentren von Elementarwellen, die miteinander interferieren, aufgefasst werden. Die Oberfläche der CD ist demnach ein Reflexionsgitter mit der Gitterkonstante b.

Wird eine CD, wie im Bild dargestellt, senkrecht mit Laserlicht der Wellenlänge λ=633nm bestrahlt, so beobachtet man auf einem im Abstand a = 30,0cm parallel stehenden Schirm (Radius 50cm) helle, zum Strahl symmetrisch liegende Punkte.

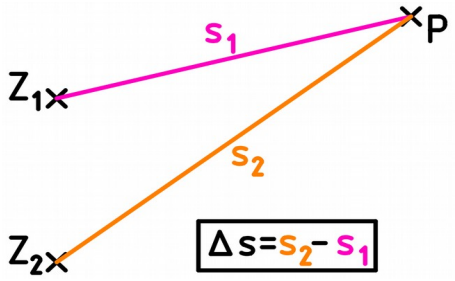


a) Erklären Sie unter Zuhilfenahme einer aussagekräftigen Skizze das Zustandekommen dieser Punkte.

b) Der Abstand der beiden innersten Punkte auf dem Schirm beträgt 25,8cm. Berechnen Sie daraus den Abstand b benachbarter CD-Rillen.

c) Ermitteln Sie, wie viele Punkte man auf dem Schirm beobachten kann.

Lösung:



a) Die von den gleichphasig schwingenden Wellenzentren auf der CD ausgehenden Wellen überlagern sich auf jedem Punkt P auf dem Schirm. Je nach der Größe des Laufwegunterschiedes Δs - der von der Position des Punktes P abhängt - schwingen die Wellen am Punkt P gleichphasig oder gegenphasig. Wenn die Wellen am Punkt P gleichphasig schwingen kommt es zu Verstärkung und es ist ein heller Punkt sichtbar.

Wenn die Wellen nicht gleichphasig schwingen verstärken sie sich nicht und der Punkt ist dunkler. Bei gegenphasiger Schwingung kommt es zu weitgehender Auslöschung und der Punkt ist völlig dunkel.

b) Keine Kleinwinkelnäherung!

$$\tan\alpha = \frac{12{,}9\,cm}{30\text{cm}} \rightarrow \alpha = 23{,}27\,°$$

$$\lambda = b\cdot\sin\alpha \rightarrow b = \frac{\lambda}{\sin\alpha} = \frac{633\cdot 10^{-9}\,m}{\sin 23{,}27\,°} = \underline{\underline{1{,}60\,\mu m}}$$

c)
$$\tan\alpha_{max} = \frac{50\text{cm}}{30\text{cm}} \rightarrow \underline{\alpha_{max} = 59{,}04\,°}$$

$$\Delta s_{max} = b\cdot\sin\alpha_{max} = 1{,}6\cdot 10^{-6}\,m\cdot\sin 59{,}04\,° = \underline{1372\text{nm} = 2{,}17\lambda}$$

Das bedeutet, dass die Maxima zweiter Ordnung nicht mehr sichtbar sind. Falls die Anordnung exakt ausgerichtet ist, sind also nur zwei Punkte (1. Ordnung) sichtbar. Bei ungenauer Ausrichtung wird noch das Hauptmaximum 0. Ordnung in der Mitte als dritter Punkt sichtbar.

Aufgabe 13.278: Abi 1998

Ein Schwingkreis regt einen Dipol der Länge l in der Grundschwingung mit der Periodendauer T an. Die auftretende Dipolstrahlung hat die Wellenlänge λ = 70 cm.

a) Bestimmen Sie die Dipollänge l und berechnen Sie die Frequenz des anregenden Schwingkreises sowie dessen Induktivität L, wenn seine Kapazität C = 1,0 pF beträgt.

b) Veranschaulichen Sie jeweils in einem Bild die Stromstärke- bzw. die Ladungsverteilung längs des Dipols zu den Zeiten t = 0, $\frac{1}{4}$T, $\frac{1}{2}$T und $\frac{3}{4}$T, wobei zur Zeit t = 0 kein Strom fließt.

Nun wird ein Punkt A in der Fernzone des Dipolstrahlungsfeldes betrachtet, der sich in einer Ebene befindet, die senkrecht zum Dipol durch seinen Mittelpunkt verläuft (Äquatorebene).

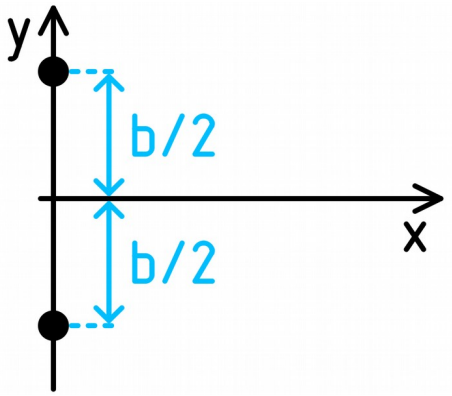
c) Was lässt sich über die Richtung der elektrischen und magnetischen Feldlinien im Punkt A aussagen?

d) Wie ist ein Empfangsdipol in A auszurichten, damit der Empfang optimal ist? Begründen Sie ihre Antwort.

Die Abstimmung des Empfangsdipols auf die Strahlung erfolgt über die Länge l' des Empfangsdipols.

e) Skizzieren Sie qualitativ in einem beschrifteten Diagramm die bei optimal ausgerichtetem Empfangsdipol gemessene Schwingungsamplitude in Abhängigkeit von l'. Beschränken Sie sich auf das Verhalten in der näheren Umgebung von l' = l.

Parallel zum vorhandenen Sendedipol wird ein zweiter Sendedipol gleicher Länge l und gleicher Äquatorebene im Abstand b angebracht. Beide werden zu gleichphasigen Schwingungen mit gleicher Amplitude angeregt. In die Äquatorebene wird ein kartesisches Koordinatensystem gelegt (vgl. Skizze).



f) Beschreiben Sie die Lage aller Punkte der Äquatorebene, die zum Interferenzmaximum 0. Ordnung gehören. Geben Sie eine kurze Begründung.

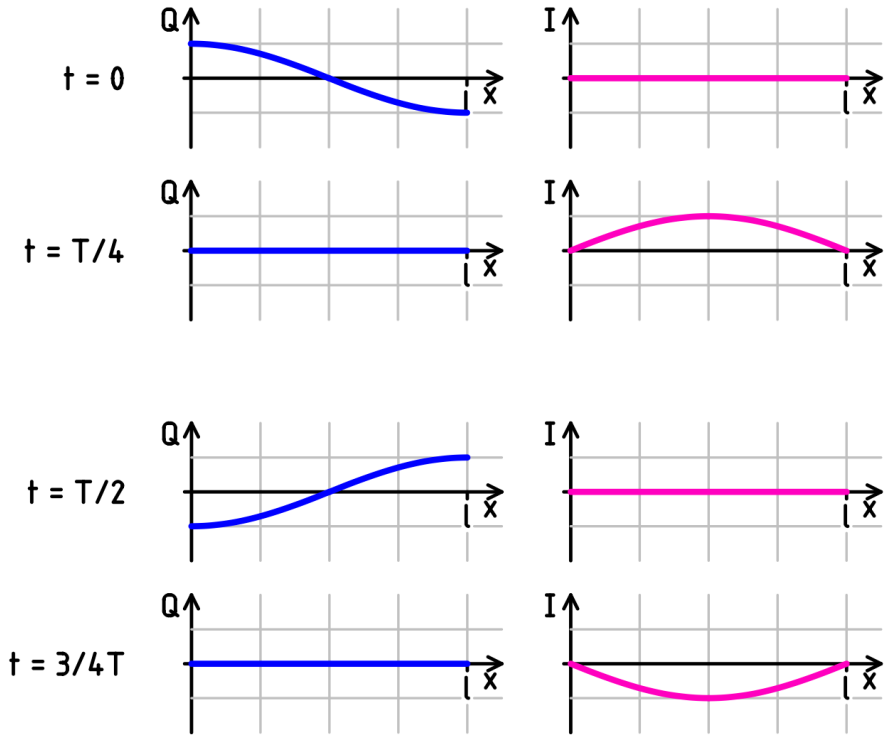
g) Wie ist der Abstand b der Dipole zu wählen, damit in großer Entfernung die Punkte der Äquatorebene mit y = x zum Interferenzmaximum 1. Ordnung gehören.

Lösung:

a) $l=\frac{\lambda}{2}=\underline{35\,cm}$

$$c=\lambda\cdot f \;\rightarrow\; f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{0{,}70\,m}=\underline{\underline{429\,MHz}}$$

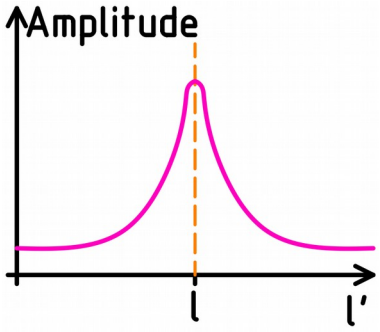
$$f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} \;\rightarrow\; L=\frac{1}{(2\cdot\pi\cdot f)^2\cdot C}=\frac{1}{(2\cdot\pi\cdot 429\cdot 10^6\,Hz)^2\cdot 1\cdot 10^{-12}\,F}=\underline{0{,}138\,\mu H}$$



b) siehe Bild

c) Die elektrischen Feldlinien verlaufen parallel zum Dipol, die magnetischen Feldlinien verlaufen senkrecht zu den elektrischen und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung an diesem Punkt.

d) Der Empfangsdipol muss für optimalen Empfang parallel zum Sendedipol sein, weil dann die E-Feldlinien des Wellenfeldes parallel zur Achse des Empfangsdipols verlaufen und die Ladungen im Empfangsdipol optimal verschieben können.



e) siehe Bild; für l' = l kommt es zu Resonanz -> maximale Amplitude

f) Max 0. Ordnung heiß Laufwegunterschied gleich Null; d.h. diese Punkte müssen von beiden Sendedipolen gleich weit entfernt sein; das sind genau die Punkte auf der Mittelsenkrechten der beiden Sendedipole also alle Punkte auf der x-Achse des KOSY.

g) Max. 1. Ordnung bei α = 45°

$$b \cdot \sin 45° = 1 \cdot \lambda \;\rightarrow\; b = \frac{\lambda}{\sin 45°} = \frac{0{,}70\,m}{\sin 45°} = \underline{\underline{0{,}99\,m}}$$

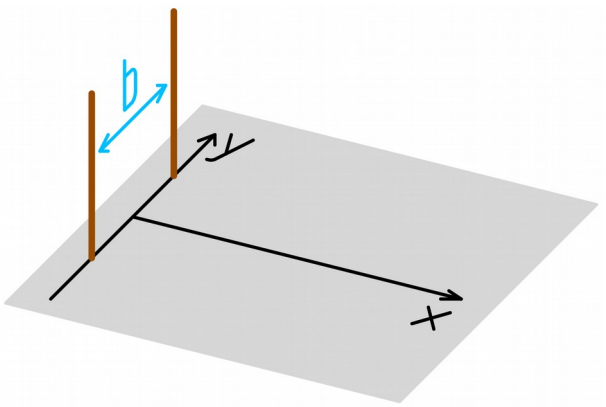
Aufgabe 13.279: Abi 2001

Ein UKW-Sender wird mit einem Schwingkreis betrieben, dessen Drehkondensator im Bereich 4,0 pF bis 6,0 pF eingestellt werden kann und dessen Induktivität L = 0,55 µH beträgt. Die Abstrahlung der elektromagnetischen Wellen erfolgt über eine Stabantenne, die senkrecht zur Erdoberfläche steht.

a) Berechnen Sie den Frequenz- und Wellenlängenbereich, in dem die Antenne sendet.

b) Die Stabantenne hat eine Länge von 1,55 m. Bei welcher Frequenz fo ist die Energieübertragung vom Sendeschwingkreis auf die Antenne optimal? Auf welchen Wert muss die Kapazität des verstellbaren Kondensators dafür eingestellt werden? (Kontrolle: fo = 97 MHz)

Der den Sender speisende Schwingkreis wird nun auf die Frequenz fo = 97 MHz fest eingestellt. Parallel zur vorhandenen Stabantenne wird im Abstand b = λo eine zweite Sendeantenne mit gleicher Länge aufgestellt (siehe Abbildung; die Stabantennen stehen senkrecht auf der Erde). Beide Sender schwingen mit gleicher Phase und Amplitude.



c) Erläutern Sie, warum die Anordnung beider Sender eine Richtwirkung besitzt.

d) Bestimmen Sie alle Richtungen, in denen das Signal im Fernfeld besonders gut bzw. besonders schlecht zu empfangen ist. Zeichnen Sie diese in ein x-y-Koordinatensystem ein, das auch die Orte der Sendeantennen enthält.

Lösung:

a) $$f_1=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{4{,}0\cdot10^{-12}\,F\cdot0{,}55\cdot10^{-6}\,H}}=\underline{107\,MHz}\quad;\quad \lambda_1=\frac{3\cdot10^8\,m/s}{107\cdot10^6\,Hz}=\underline{2{,}8\,m}$$

$$f_2=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{6{,}0\cdot10^{-12}\,F\cdot0{,}55\cdot10^{-6}\,H}}=\underline{87{,}6\,MHz}\quad;\quad \lambda_1=\frac{3\cdot10^8\,m/s}{87{,}6\cdot10^6\,Hz}=\underline{3{,}4\,m}$$

Der gesuchte Bereich liegt zwischen den beiden Frequenzen bzw. Wellenlängen.

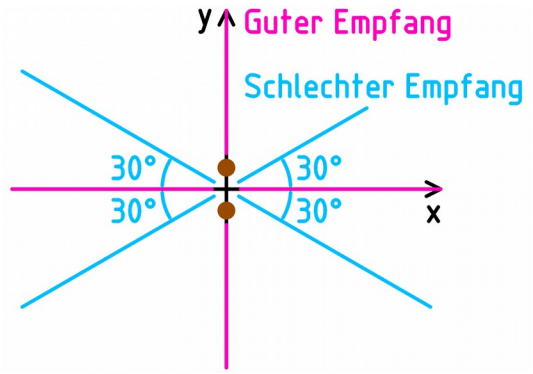
b) $$f_0=\frac{c}{\lambda}=\frac{c}{2\cdot l}=\frac{3\cdot10^8\,m/s}{2\cdot1{,}55\,m}=\underline{96{,}8\,MHz}$$

$$f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} \rightarrow C=\frac{1}{(2\cdot\pi\cdot f)^2\cdot L}=\frac{1}{(2\cdot\pi\cdot 97\cdot 10^6 Hz)^2\cdot 0{,}55\cdot 10^{-6} H}=\underline{4{,}89\,pF}$$

c) Durch die Überlagerung der beiden Wellen kommt es in bestimmten Richtungen zu Verstärkung - in diese Richtungen wird die meiste Energie abgestrahlt - und in bestimmten Richtungen zu teilweiser Auslöschung - in diese Richtungen wird am wenigsten Energie abgestrahlt - der beiden Wellen.

d) Minima: $\lambda\cdot\sin\alpha=b\cdot\sin\alpha=(2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2} \rightarrow \sin\alpha=k+0{,}5$

Gibt nur eine Lösung für k = -1 ist α = 30°.



Maxima:

$$\lambda\cdot\sin\alpha=b\cdot\sin\alpha=k\cdot\lambda \rightarrow \sin\alpha=k$$

Gibt zwei Lösungen für k = 0 bzw. k = 1 ist der Winkel α = 0° bzw 90°.

<u>Aufgabe 13.280:Abi ????</u>

Das Spektrum einer Leuchtstoffröhre, die hauptsächlich Licht im Bereich zwischen 400 nm und 620nm emittiert, soll nun mit einem optischen Gitter betrachtet werden. Der Schirm steht dabei 2,50m hinter dem Gitter. Wie viele Spalte (Striche) pro mm muss ein optisches Gitter mindestens haben, damit das Interferenzspektrum 1. Ordnung auf dem Schirm mindestens eine Breite von 20cm hat? Kleinwinkelnäherung !

<u>Lösung:</u>

$$\lambda_1=d\cdot\frac{\Delta y_1}{l} \rightarrow \Delta y_1=\frac{l\cdot\lambda_1}{d}=\frac{l}{d}\cdot\lambda_1 \rightarrow \Delta y_2-\Delta y_1=\frac{l}{d}\cdot(\lambda_2-\lambda_1)$$

$$d=\frac{l\cdot(\lambda_2-\lambda_1)}{\Delta y_2-\Delta y_1}=\frac{2{,}5\,m\cdot(620-400)\cdot 10^{-9}\,m}{0{,}2\,m}=\underline{2{,}75\,\mu m}$$

$$\frac{1\,mm}{2{,}75\,\mu m}=\underline{\underline{364}}$$

Das Gitter muss also mindestens 364 Spalte pro mm haben.

Aufgabe 13.281: Abi 2003; Spektralanalyse

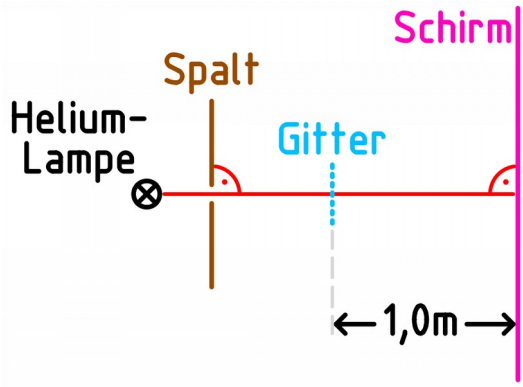
Das Spektrum einer Helium-Spektrallampe soll mit Hilfe eines Beugungsgitters (100 Spalte pro mm) erzeugt werden. Zur Beobachtung des Spektrums befindet sich in einer Entfernung von 1,0 m ein Schirm.

a) Erstellen Sie eine beschriftete Skizze des Versuchsaufbaus.

b) Auf dem Schirm ist in 1. Ordnung unter anderem eine gelbe Linie zu sehen, die vom zentralen Maximum 5,9 cm entfernt ist. Berechnen Sie die Wellenlänge dieser Linie.

c) Auf dem Schirm treten auf derselben Seite bezüglich des zentralen Maximums die Spektrallinien zweiter Ordnung des roten Lichts (λ = 667,8 nm) und des violetten Lichts (λ = 402,6 nm) auf. Berechnen Sie den gegenseitigen Abstand dieser Linien.

Lösung:



a) siehe Bild

Bemerkung: Die G9-Schüler konnten den Versuchsaufbau noch etwas detaillierter zeichnen. Man braucht noch ein paar Linsen. Ein G8-Schüler kann das meiner Meinung nach nicht.

b) $1\cdot\lambda=\Delta s=b\cdot\frac{\Delta y}{l}=0{,}01\cdot10^{-3}\,m\cdot\frac{0{,}059\,m}{1{,}0\,m}=\underline{\underline{590\,nm}}$

c) Kleinwinkelnäherung ist hier ein bisschen knapp, aber es geht noch.

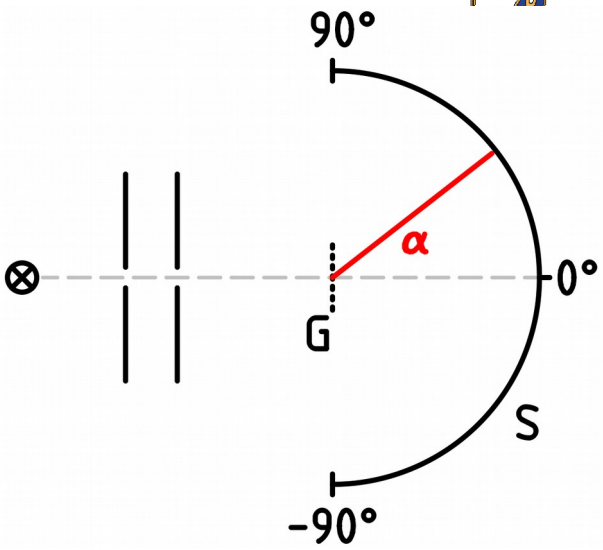
$2\cdot\lambda_{rot}=b\cdot\frac{\Delta y_{rot}}{l}$ → $\Delta y_{rot}=\frac{2\cdot l\cdot\lambda_{rot}}{b}$ genauso $\Delta y_{lila}=\frac{2\cdot l\cdot\lambda_{lila}}{b}$

$$\Delta y_{rot}-\Delta y_{lila}=\frac{2\cdot l}{b}\cdot(\lambda_{rot}-\lambda_{lila})$$

$$=\frac{2\cdot1{,}0\,m}{0{,}01\cdot10^{-3}\,m}\cdot(667{,}8\cdot10^{-9}\,m-402{,}6\cdot10^{-9}\,m)=\underline{\underline{5{,}3\,cm}}$$

Aufgabe 13.282: Abi 2004; Spektralanalyse, gekürzt

Mit dem skizzierten Versuchsaufbau soll das Spektrum einer Glühlampe untersucht werden. Der von der Lampe hell ausgeleuchtete Spalt dient als schmale, linienförmige Lichtquelle. Um das Spektrum der Lampe zu untersuchen, wird ein optisches Gitter G mit 570 Strichen pro mm in den Strahlengang gebracht. Die Lampe emittiert ein Kontinuum im Wellenlängenbereich von 400 nm bis 700 nm.



a) Beschreiben Sie - nach geeigneten Berechnungen - in Abhängigkeit vom Winkel α die Beobachtungen auf dem Schirm.

b) Zwischen Spalt und Gitter wird eine durchsichtige Kammer mit Natriumdampf gebracht. Beschreiben und erklären Sie qualitativ die Beobachtung auf dem Schirm bei idealen Vorraussetzungen.

c) Beschreiben Sie qualitativ drei Änderungen des Schirmbilds von Teilaufgabe a), wenn sowohl die Glühlampe durch eine Gasentladungsröhre als auch das Gitter durch ein Glasprisma ersetzt werden. <- G9-Frage!? Geht wohl nicht mehr?

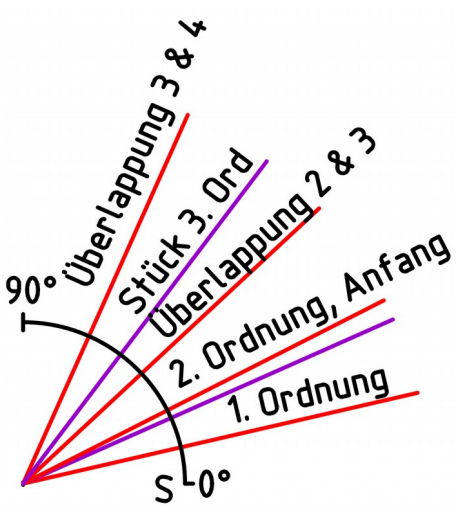
Lösung:

a) Sehen kann man nur die Maxima; das Maximum Nullter Ordnung ist für alle Wellenlängen gleich bei α = 0°; die anderen ...

400 nm: $k \cdot \lambda = d \cdot \sin\alpha$ → $\sin\alpha = \frac{k \cdot \lambda}{d}$

gibt $\alpha_1 = 13°;\ \alpha_2 = 27°;\ \alpha_3 = 43°;\ \alpha_4 = 66°$

700 nm: genauso wie oben gibt $\alpha_1 = 24°;\ \alpha_2 = 53°$



Beobachtung:

- ➔ weißes Maximum 0. Ord bei α = 0°
- ➔ Spektrum 1. Ord zwischen α = 13° und 24°
- ➔ Anfang Spektrum 2. Ord von α = 27° bis 43°
- ➔ Überlappung von 2. und 3. Ord von α = 43° bis 53°; anschließend noch ein Stück vom Spektrum 3. Ordnung bis 66° und dann nochmal Überlappung von 3. und 4. Ordnung bis 90°. Das Ganze nochmal nach unten gespiegelt.

b) Die Natriumatome absorbieren ausschließlich Photonen die genau ihre Anregungsenergie besitzen. Beim Zurückfallen in den Grundzustand werden zwar wieder genauso viel Photonen emittiert, aber in alle Richtungen, weshalb nur noch die wenigsten am Gitter ankommen. Diese Farbe(n) fehlt dann im Spektrum, weshalb an den jeweiligen Stellen der Spektren dunkle Linien erscheinen -> Absorbtions-Linienspektrum.

c) Gasentladungsröhre -> es erscheinen keine kontinuierlichen Spektren mehr sonder Linienspektren

Prisma -> die längeren Wellenlängen werden stärker gebrochen als die kurzen, umgekehrt wie beim Gitter; die Farben kehren also ihre Reihenfolge um

-> es gibt keine Spektren höherer Ordnung mehr sondern nur noch ein einziges und dieses auch nur auf einer Seite entweder oben (exklusiv-)oder unten

-> keine Linie bei α = 0°

Aufgabe 13.283: Abi 2005

Ein Mittelwellenempfänger soll Radiosignale in dem Frequenzbereich zwischen 530 kHz und 1600 kHz empfangen.

a) Begründen Sie durch eine Rechnung, dass selbst bei der kürzesten in Frage kommenden Wellenlänge die benötigten Empfangsdipole auf Grund ihrer Länge in der Praxis nicht geeignet sind, sofern sie in Resonanz angeregt werden.

Statt eines Empfangsdipols verwendet man im Mittelwellenbereich so genannte Ferritantennen. Das sind im Wesentlichen Spulen mit Ferritkern, welche mit einem Kondensator einen Schwingkreis bilden. Der Schwingkreis wird in Resonanz mit der zu empfangenden elektromagnetischen Welle abgestimmt. Die im Empfänger benutzte Ferritantenne hat eine Induktivität von 0,22 mH. Die Kapazität in Form eines Drehkondensators ist variabel.

b) Über welche Kapazitätswerte muss der Drehkondensator variiert werden können, so dass über den gesamten oben genannten Frequenzbereich Resonanz möglich ist?

Im Gegensatz zum Empfang werden bei der Erzeugung von Mittelwellen durchaus Dipole eingesetzt.

c) Begründen Sie, warum die Dipolschwingungen stets gedämpft sind.

Lösung:

a) kleinste Wellenlänge für größte Frequenz

$$c=\lambda\cdot f \;\rightarrow\; \lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{1600\cdot 10^3\,Hz}=\underline{187{,}5\,m}$$

D.h. der Lambda-Halbe-Empfangsdipol müsste 93,8 m lang sein; also zu lang.

b) $f=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{C\cdot L}} \;\rightarrow\; C=\frac{1}{(2\pi\cdot f)^2\cdot L}$ gibt für 1600 kHz und 530 kHz die beiden Kapazitäten $C1$ = 45 pF und $C2$ = 410 pF. Zwischen diesen beiden Kapazitäten muss der Kondensator einstellbar sein.

c) Erstens hat der Dipol einen ohmschen Widerstand indem Schwingungsenergie als Wärme abgebeben wird und zweitens emittiert der Dipol Energie in Form von EM-Wellen und verliert dadurch Energie.

Aufgabe 13.284: Abi 2005

Bei einem Doppelspalt für optische Versuche ist die Beschriftung nicht mehr erkennbar. Der Spaltabstand b soll nun experimentell mit Hilfe eines Lasers (Herstellerangabe: λ = 633 nm ± 0,5 nm) durch einen Schüler ermittelt werden. Der Abstand l zwischen Schirm und Doppelspalt kann auf einer optischen Bank sehr genau eingestellt werden und ist 1700 mm ± 0,5 mm. Der Schüler kann am Schirm auf beiden Seiten des 0. Maximums jeweils 4 weitere Maxima beobachten. Den Abstand d der beiden äußersten Maxima zueinander misst er zu 26 mm ± 0,5 mm.

a) Skizzieren Sie denVersuchsaufbau mit den relevanten geometrischen Größen und stellen Sie unter Verwendung der Kleinwinkelnäherung die Beziehung

$$b=\frac{8\cdot\lambda\cdot l}{d}$$

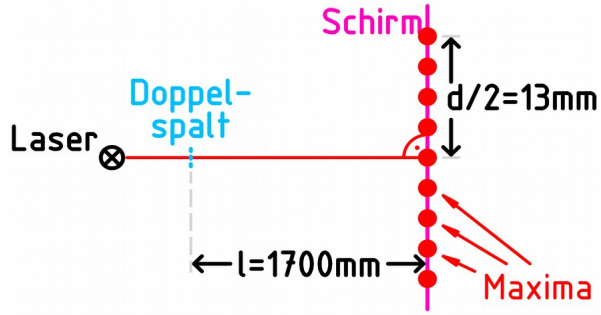
zur Berechnung des Spaltabstandes auf.

b) Berechnen Sie den kleinstmöglichen Wert sowie den größtmöglichen Wert für den Spaltabstand.

Der Schüler bildet aus den Werten von Teilaufgabe b) den Mittelwert für den Spaltabstand und will den Doppelspalt mit dem Wert 331,5 µm beschriften.

c) Begründen Sie, warum diese Aufschrift eine falsche Genauigkeit vortäuschen würde.

Lösung:



a)

$$4\cdot\lambda=\Delta s=b\cdot\frac{\frac{d}{2}}{l}=\frac{b\cdot d}{2\cdot l}$$

$$\Rightarrow b=\frac{8\cdot l\cdot\lambda}{d}$$

b) Kleinster Wert für kleines l und λ und großes d:

$$b_{klein}=\frac{8\cdot 1{,}6995\,m\cdot 632{,}5\cdot 10^{-9}\,m}{0{,}0265\,m}=\underline{324{,}5\,\mu m}$$

Größter Wert für großes l und λ und kleines d:

$$b_{groß}=\frac{8\cdot 1{,}7005\,m\cdot 633{,}5\cdot 10^{-9}\,m}{0{,}0255\,m}=\underline{338\,\mu m}$$

c) Die Beschriftung 331,5 µm suggeriert einen Spaltabstand zwischen 331,45 µm und 331,55 µm also eine mögliche Abweichung von einem zwanzigstel Mikrometer. In Wirklichkeit beträgt die Unsicherheit aber mehr als sechs Mikrometer.

Aufgabe 13.285: Abi 2007; Interferenz

Ein optisches Gitter mit einer Gitterkonstante von b = 3,0 µm wird mit dem Licht einer Quecksilberdampflampe beleuchtet. Auf einem Schirm in einer Entfernung von a = 60,0 cm vom Gitter erscheint ein Spektrum in 1. Ordnung, welches zwischen der gelben (λ_g = 579,1 nm) und der violetten (λ_v = 404,7 nm) Linie liegt.

Gitter und Schirm sind senkrecht zum einfallenden Licht orientiert. Auf dem Schirm soll eine Skala angebracht werden, die das direkte Ablesen der Wellenlänge von beliebigen Spektrallinien ermöglicht. Der Nullpunkt der Skala soll in der Mitte des Schirms liegen.

a) Welche Breite muss der Schirm mindestens haben, damit die Positionen der Maxima 1. Ordnung der beiden Farben auf der Skala eingezeichnet werden können?

b) In welcher Entfernung vom Nullpunkt müssen die Markierungen für 50 nm bzw. für 500 nm angebracht werden? Beurteilen Sie, ob die Skala über diesen Bereich des Schirms äquidistant unterteilt werden kann. Begründen Sie ihre Antwort.

c) Prüfen Sie durch Rechnung, ob auf einem Schirm der Breite 24 cm auch Linien ds Spektrums 2. Ordnung der Quecksilberdampflampe sichtbar sind.

Lösung:

a) Man muss nur die größere Wellenlänge betrachten, weil größere Wellenlängen stärker gebeugt werden.

$$1\cdot\lambda=\Delta s=b\cdot\sin\alpha \;\rightarrow\; \sin\alpha=\frac{\lambda}{b}=\frac{579{,}1\cdot10^{-9}\,m}{3{,}0\cdot10^{-6}\,m} \;\rightarrow\; \underline{\alpha=11{,}1°}$$

$$\tan\alpha=\frac{\Delta y}{a} \;\rightarrow\; \Delta y=a\cdot\tan\alpha=0{,}60\,m\cdot\tan 11{,}1°=\underline{0{,}118\,m}$$

Das Maximum 0. Ordnung soll in der Mitte des Schirms sein, deshalb muss der Schirm mindestens eine Breite von 23,6 cm haben.

b)

$$50\,nm=b\cdot\sin\alpha_{50} \;\rightarrow\; \sin\alpha_{50}=\frac{50\cdot10^{-9}\,nm}{3{,}0\cdot10^{-6}\,m} \;\rightarrow\; \underline{\alpha_{50}=0{,}955°}$$

$$\tan\alpha_{50}=\frac{\Delta y}{a} \;\rightarrow\; \Delta y_{50}=a\cdot\tan\alpha_{50}=0{,}6\,m\cdot\tan 0{,}955°=\underline{\underline{1{,}00\,cm}}$$

Genauso für 500 nm gibt: $\alpha_{500}=9{,}59° \;\rightarrow\; \underline{\underline{\Delta y_{500}=10{,}1\,cm}}$

Wenn die Kleinwinkelnäherung anwendbar ist, dann ist wegen

$\lambda = \Delta s = b \cdot \Delta y/a = (b/a) \cdot \Delta y$

der Abstand des Maximums erster Ordnung zur Schirmmitte proportional zur Wellenlänge und die Skala kann äquidistant unterteilt werden. Der Winkel für die größere Wellenlänge 500 nm ist hart an der Grenze. Meine Schüler dürfen bis zu 10° die Kleinwinkelnäherung benutzen. Weil der größte Winkel also kleiner als 10° ist, kann die Skala in diesem Bereich äquidistant unterteilt werden.

c) Am weitesten Innen erscheint die kleinste Wellenlänge, die prüfen wir.

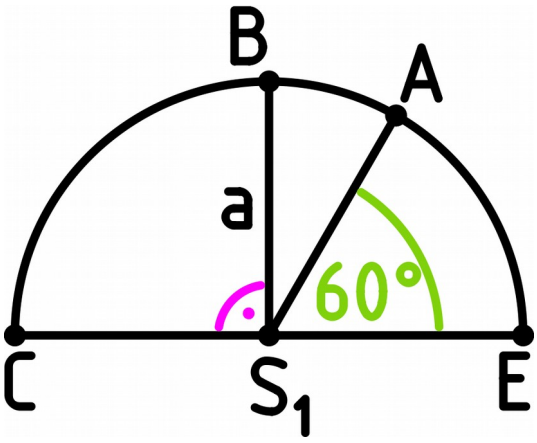
$$2 \cdot \lambda = \Delta s = b \cdot \sin\alpha \;\rightarrow\; \sin\alpha = \frac{2 \cdot \lambda}{b} = \frac{2 \cdot 404{,}7 \cdot 10^{-9}\,m}{3{,}0 \cdot 10^{-6}\,m} = \underline{15{,}65°}$$

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{a} \;\rightarrow\; \Delta y = a \cdot \tan\alpha = 0{,}60\,m \cdot \tan 15{,}65° = \underline{16{,}8\,cm}$$

Damit die kleinste Wellenlänge in 2. Ordnung sichtbar ist, müsste der Schirm also 33,6 cm breit sein. D.h. es ist keine Linie in 2. Ordnung sichtbar.

<u>Aufgabe 13.286: Abi 2008; Interferenz von Dipolstrahlung</u>

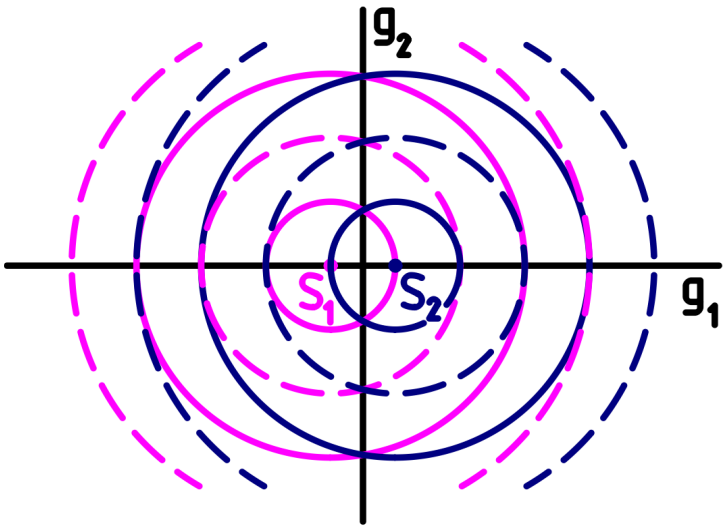
Zwei Dipolsender S1 und S2 schwingen gleichphasig mit der gleichen Frequenz und sind senkrecht zur Zeichenebene orientiert. S1 befindet sich im Mittelpunkt eines Halbkreises mit Radius a = 53 cm, auf dem S2 bewegt werden kann. Im Punkt E befindet sich ein Empfänger.



a) Der Sender S2 wird an die Stelle A gebracht. Begründen Sie, warum sich bei dieser Konstellation - unabhängig von der verwendeten Frequenz - ein Empfangsmaximum ergibt. Geben Sie die Ordnung des Maximums an.

b) Bringt man den Sender S2 in Position B, so registriert man beim Empfangsdipol E ein Maximum erster Ordnung. Berechnen Sie die Wellenlänge und die Frequenz der von den beiden Sendern abgegebenen Strahlung. (Kontrolle: λ = 22 cm)

c) Der Sender S2 wird jetzt auf der Geraden CE von der Position C bis zum Sender S1 bewegt. Berechnen Sie diejenigen Abstände zwischen S1 und S2, für die der Empfänger E Minima registriert.



d) Nun werden S1 und S2 im Abstand λ/2 aufgestellt. Nebenstehendes Bild zeigt eine Momentaufnahme der Wellenfronten der einzelnen Sender (Wellentäler gestrichelt, Wellenberge durchgezogen). Erläutern Sie an Hand dieser Zeichnung die Empfangsintesität längs der Geraden g1 und g2.

Lösung:

a) Das Dreieck ΔAES1 ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a, deshalb ist der Punkt E von A und S1 gleich weit entfernt, nämlich a. Der Laufwegunterschied von der beiden Wellen von A bzw. S1 nach E beträgt also 0, deshalb ist am Punkt E das Maximum 0. Ordnung, das Hauptmaximum.

b) $1\cdot\lambda=\Delta s=\sqrt{a^2+a^2}-a=\sqrt{2}\cdot a-a=(\sqrt{2}-1)\cdot a=(\sqrt{2}-1)\cdot 53\,cm=\underline{\underline{22\,cm}}$

$c=\lambda\cdot f \;\rightarrow\; f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{0{,}22\,m}=\underline{\underline{1{,}36\,GHz}}$

c) Der Laufwegunterschied ist gleich dem Abstand zwischen S1 und S2. Falls dieser ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist, liegt bei E ein Minimum vor. Die gesuchten Abstände zwischen S1 und S2 sind also 11 cm und 33 cm. 55 cm kommt nicht mehr in Frage, weil der Radius des Kreises nur 53 cm ist.

d) An Orten, an denen sich zwei Wellenberge oder zwei Wellentäler begegnen, schwingen die beiden Wellen gleichphasig und es kommt zu Verstärkung. An Orten, an denen sich ein Wellental und ein Wellenberg treffen, schwingen die beiden Wellen gegenphasig und es kommt zu teilweiser Auslöschung.

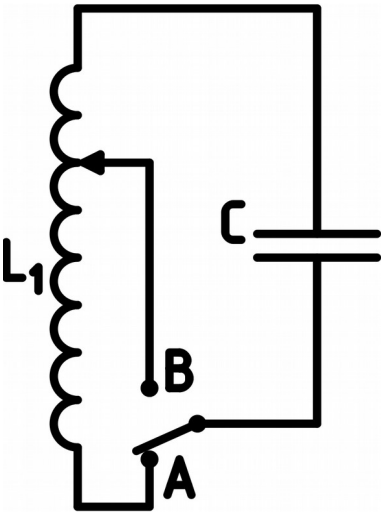
Entlang der Geraden g2 treffen sich immer entweder zwei Wellenberge oder zwei Wellentäler, d.h. es kommt auf der ganzen Geraden zu Verstärkung (Maximum), das bedeutet hohe Empfangsintensität.

Allerdings nimmt auch auf der Geraden g2 die Empfangsintensität mit der Entfernung zu den beiden Sendern ab, weil die Wellen in größerer Entfernung ein immer größer werdendes Raumvolumen überstreichen.

Entlang der Gerade g1 trifft sich immer ein Wellenberg und ein Wellental, d.h. es kommt entlang der ganzen Geraden zu Auslöschung (teilweise; Minimum), das bedeutet kleine Empfangsintensität.

Aufgabe 13.287: Abi 2009; Elektromagnetischer Schwingkreis

Ungedämpfte elektromagnetische Schwingungen kann man mithilfe eines Schwingkreises und einer geeigneten Rückkopplungsschaltung erzeugen. Nebenstehendes Bild zeigt einen Schwingkreis mit einem Kondensator der Kapazität C = 50 pF nd einer Spule mit einer Gesamtinduktivität von L1 = 1,3 μH.



Um zwei verschiedene Frequenzen zu erzeugen, kann man einen Schalter zwischen den Positionen A und B umlegen.

a) Erklären Sie kurz, weshalb eine elektromagnetische Schwingung ohne spezielle Maßnahmen gedämpft ist und was man prinzipiell tun muss, um eine ungedämpfte Schwingung zu erhalten.

b) Berechnen Sie die Frequenz f1 des gegebenen Schwingkreises für Schalterstellung A. (Kontrolle: f1 = 20 MHz)

c) In Schalterstellung B soll eine Schwingung doppelter Frequenz erzeugt werden. Zeigen Sie, dass dies erreicht werden kann, indem man nur ein Viertel der Windungen verwendet. Nehmen Sie dafür an, dass die Spule langgestreckt und die Windungsdichte (Zahl der Windungen pro Längeneinheit) konstant ist.

Der Schalter befindet sich wieder in Position A. An den Schwingkreis wird ein Sendedipol angekoppelt.

d) Berechnen Sie die kürzeste Länge des Dipols, so dass die Energieübertragung für die Abstrahlung optimal ist. Begründen Sie, dass sich mit diesem Dipol auch in Schalterstellung B elektromagnetische Wellen gut aussenden lassen.

e) Skizziere die Ladungs- und Stromverteilung längs des Dipols bei optimaler Energieübertragung für die Zeiten t = 0, T/4 und T/2, wobei T die Schwingungsdauer ist.

f) Beschreiben Sie kurz zwei Versuche, mit denen sich die Wellennatur der Dipolstrahlung nachweisen lässt.

Lösung:

a) Durch den ohmschen Widerstand des Schwingkreises (hauptsächlich in der Spule) wird ständig Schwingungsenergie in innere Energie umgewandelt, wodurch die Schwingungsenergie schnell abnimmt -> Dämpfung.

Um eine ungedämpfte Schwingung zu erhalten, muss man dem Schwingkreis permanent Energie zuführen, um die Energieentwertung im ohmschen Widerstand auszugleichen.

b) $$f_1=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{1{,}3\cdot 10^{-6}H\cdot 50\cdot 10^{-12}F}}=\underline{\underline{19{,}7\,MHz}}$$

c) Induktivität der verkürzten Spule: Windungszahl und Länge sinken auf ein Viertel des Anfangswertes.

$$L'=\mu_0\cdot\mu_r\cdot A\cdot\frac{N'^2}{l'}=\mu_0\cdot\mu_r\cdot A\cdot\frac{(0{,}25\cdot N)^2}{0{,}25\cdot l}=\frac{0{,}25^2}{0{,}25}\cdot\mu_0\cdot\mu_r\cdot A\cdot\frac{N^2}{l}=\underline{0{,}25\cdot L}$$

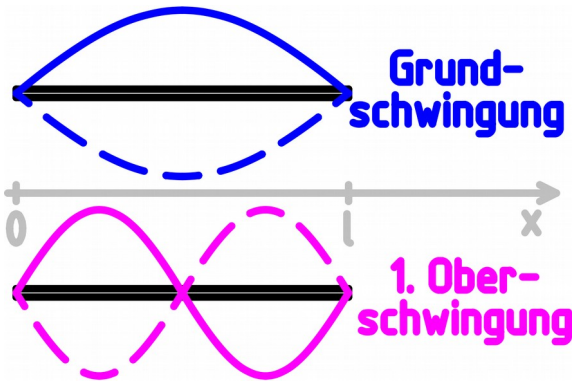
Also sinkt die Induktivität der Spule auf ein Viertel des Anfangswertes. Zur Frequenz.

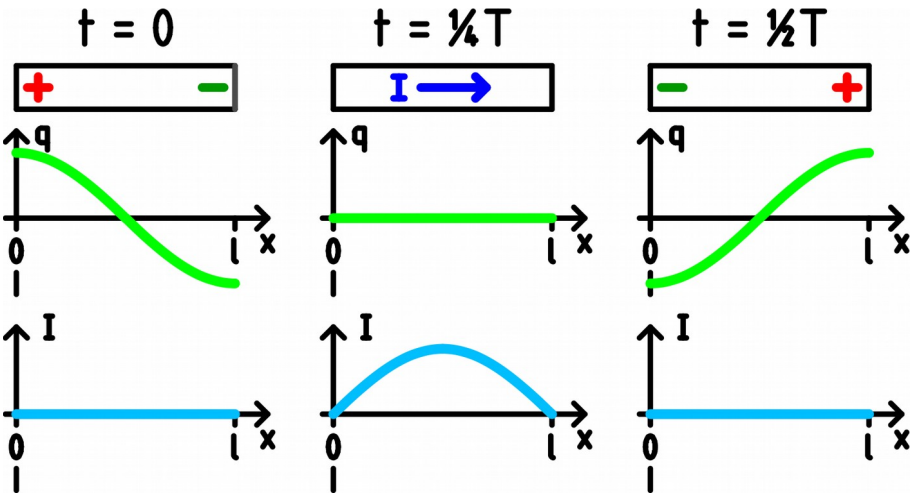
$$f'=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L'\cdot C}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{0{,}25\cdot L\cdot C}}=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot 0{,}5\cdot\sqrt{L\cdot C}}=2\cdot\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}}=\underline{2\cdot f}$$

Also steigt die Frequenz auf das doppelte.

d) Lambda-Halbe-Dipol: $\lambda=\frac{c}{f}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{20\cdot 10^6\,Hz}=\underline{15\,m}$; Der Dipol muss also 7,5 m lang sein.

Schalterstellung B: Der Dipol kann auch in Oberschwingungen gut in Resonanz angeregt werden. Dazu muss die Länge des Dipols ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge sein. In Schalterstellung B hat man doppelte Frequenz, d.h. halbe Wellenlänge. Der Dipol ist dann genauso lang wie die Wellenlänge, d.h. zwei halbe Wellenlängen. Der Dipol wird also in Resonanz in der ersten Oberschwingung angeregt.

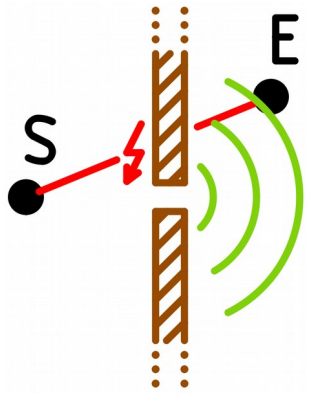


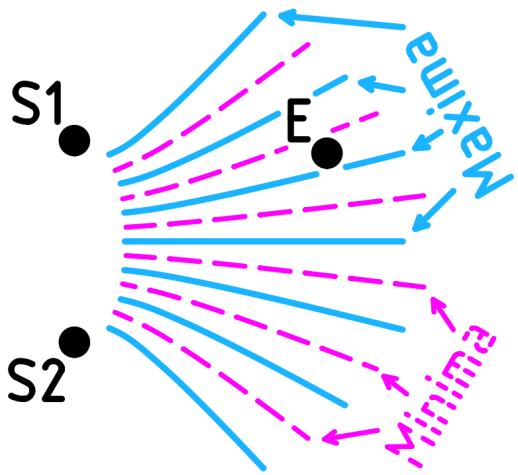


e) Ein definierter Anfangszeitpunkt ist nicht gegeben. Ob der Dipol in der Grundschwingung oder in der ersten Oberschwingung angeregt wird ist auch nicht gegeben. Ich zeichne einfach mal die Grundschwingung.

f) Nachweis von Wellennatur grundsätzlich durch Beugung und Interferenz:

Versuch 1: Man stellt ein Hindernis mit einem schmalen Spalt zwischen Sender S und Empfänger E, so dass der direkte Weg von S nach E versperrt ist. Trotzdem lässt sich bei E die Dipolstrahlung empfangen, weil sie am Spalt gebeugt wird. Die Empfangsintensität wird bei E natürlich sehr klein sein, weil nur ein kleiner Teil der Welle auf die rechte Seite des Hindernisses gelangt, und die Energie dieses Teils auf die ganze rechte Raumhälfte verteilt wird (<- Energieerhaltung).





Versuch 2: Man stellt zwei gleichphasig schwingende Sender in einem Abstand der größer als die Wellenlänge ist auf. Im Raum um die Sender untersucht man mit einem Empfänger die Empfangsintensität und findet auf Hyperbelkurven Maxima und Minima die nur durch die Überlagerung der beiden Wellen entstehen können.

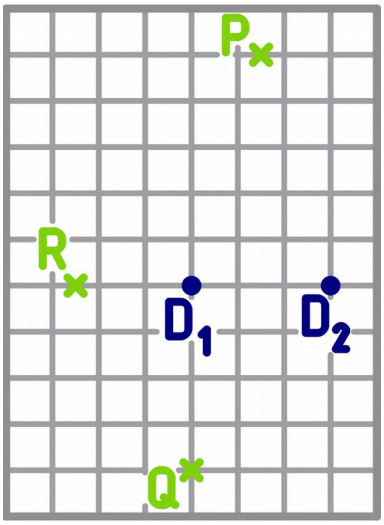
Aufgabe 13.288: Abi 2010; Elektromagnetische Wellen

Zur Übertragung von Nachrichten werden seit Guglielmo Marconi (1874 - 1937) elektromagnetische Wellen mit Frequenzen bis in den GHz-Bereich verwendet.

a) Bestimmen Sie die Länge eines Dipols, der auf die im Amateurfunk häufig benutzte Frequenz von 145 MHz abgestimmt ist.

b) Die vom Dipol in der Grundschwingung abgestrahlten Wellen sollen von einem zweiten Dipol in größerer Entfernung empfangen werden. Nennen Sie zwei Bedingungen, die eingehalten werden müssen, damit der Empfang optimal ist.

Die nebenstehende Abbildung zeigt zwei baugleiche, senkrecht zur Zeichenebene aufgestellte Sendedipole D1 und D2 im Abstand 1,5·λ. D.h. eine Kästchenbreite entspricht einer halben Wellenlänge.



c) Die Dipole werden gleichphasig zu Schwingungen angeregt. Untersuchen Sie qualitativ die Empfangsstärken an den Stellen P, Q und R.

d) Geben Sie an, inwiefern sich die Empfangsintensitäten an diesen Stellen ändern, wenn die Dipole gegenphasig schwingen.

Lösung:

a) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}0 \cdot 10^8\, m/s}{145 \cdot 10^6\, Hz} = 2{,}07\, m$; Der Dipol hätte also die Länge 1,03 m ($\frac{1}{2}\cdot\lambda$)

b) (1) Der Empfangsdipol muss parallel zum Sendedipol sein. (2) Die Länge des Empfangsdipols muss ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge der zu empfangenden Welle sein (man kann auch schreiben: Der Empfangsdipol muss genauso lang wie der Sendedipol sein.)

c) P liegt auf der Mittelsenkrechten der beiden Wellenzentren, d.h. Laufwegunterchied gleich Null, Maximum und hohe Empfangsstärke.

Bei Q liegt ein Laufwegunterschied von $\sqrt{(3^2 + 4^2)}\cdot\frac{1}{2}\lambda = 5\cdot\frac{1}{2}\lambda$ vor, d.h. Minimum und sehr kleine Empfangsstärke.

Bei R ist der Laufwegunterschied zwischen 1·λ und 1,5·λ d.h. weder Maximum noch Minimum und deshalb mittlere Empfangsstärke.

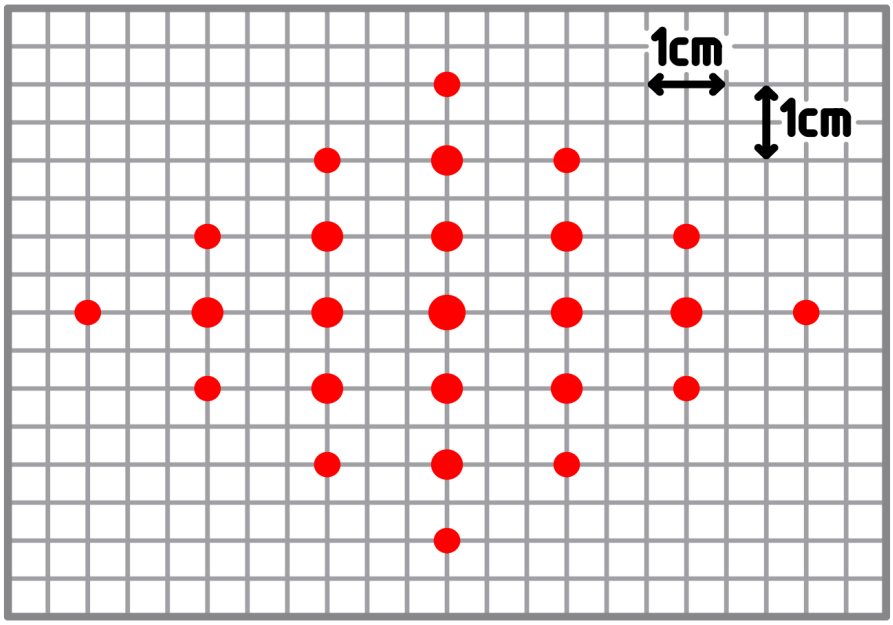
d) Am Ort eines Maximums schwingen die beiden Wellen gleichphasig, am Ort eines Minimums gegenphasig. Wenn die beiden Dipole jetzt gegenphasig schwingen, dann schwingen die beiden Wellen an den Orten, an denen sie vorher gleichphasig waren gegenphasig und umgekehrt. D.h. sehr kleine Empfangsstärke bei P, hohe Empfangsstärke bei Q und immer noch mittlere Empfangsstärke bei R.

Aufgabe 13.289: Abi 2010; Optische Gitter

a) Beschreiben Sie einen Versuch zur Bestimmung der Wellenlänge eines Lasers mithilfe eines optischen Gitters. Geben Sie an, welche Größen gemessen werden bzw. bekannt sein müssen, und zeigen Sie auf, wie die Wellenlänge λ daraus berechnet werden kann.

b) Welche Vorteile ergeben sich bei Verwendung eines Gitters im Vergleich zueinem Doppelspalt?

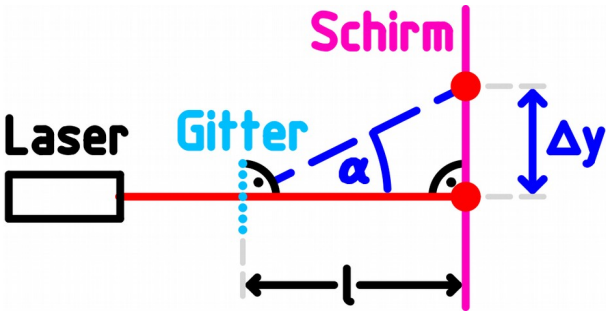
Zur Aufnahme der nebenstehenden Interferenzfigur wurden zwei Strichgitter verwendet, die unmittelbar hintereinander so aufgestellt wurden, dass die Gitterlinien senkrecht zueinander ausgerichtet sind. Der Abstand der Gitter zum Schirm ist deutlich größer als ein Meter.



c) Bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Gitterkonstanten und entscheiden Sie, ob bei dem Gitter mit dem größeren Strichabstand die Gitterlinien waagrecht oder senkrecht liegen. Begründen Sie ihre Antwort!

d) Bestimmen Sie die Gitterkonstante b des Gitters, dessen Linien waagrecht liegen, wenn der Abstand zwischen Gitter und Schirm a = 1,5 m beträgt und Licht der Wellenlänge λ = 630 nm verwendet wird.

Lösung:



a) Man schickt den Laserstrahl durch ein Gitter hinter dem sich ein Schirm befindet. Der Laserstrahl wird dabei möglichst senkrecht zum Gitter und zum Schirm ausgerichtet und der Abstand von Gitter zu Schirm l muss groß sein im Vergleich zur Gitterkonstante. Auf dem Schirm erscheinen die Maxima verschiedener Ordnung. Das Hauptmaximum 0. Ordnung erkennt man an der größten Helligkeit. Bekannt sein muss die Gitterkonstante b (Abstand zwischen zwei benachbarten Spalten). Gemessen wird der Abstand zwischen Gitter und Schirm l und z.B. der Abstand zwischen Hauptmaximum und Maximum 1. Ordnung auf dem Schirm Δy. Damit berechnet man die Wellenlänge wie folgt:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{l} \rightarrow \alpha \quad ; \quad \underline{\underline{\lambda = b \cdot \sin\alpha}}$$

b) (1) Die Maxima sind wesentlich enger, also nicht so breit, weshalb man besser messen kann. (2) Die Intensität der Maxima ist höher, weil die Lichtleistung auf kleinere Bereiche konzentriert wird. D.h. man kann die Maxima besser erkennen, vor allem die Maxima höherer Ordnung.

c) Das Gitter mit vertikalen Strichen bv erzeugt Maxima links und rechts Δylr. Das Gitter mit horizontalen Strichen bh erzeugt Maxima oben und unten Δyou. Zum Rechnen kann man die Kleinwinkelnäherung benutzen. Wir betrachten die Maxima 1. Ordnung.

$$\lambda = b_v \cdot \frac{\Delta y_{lr}}{l} \quad ; \quad \lambda = b_h \cdot \frac{\Delta y_{ou}}{l}$$

$$\rightarrow b_v \cdot \frac{\Delta y_{lr}}{l} = b_h \cdot \frac{\Delta y_{ou}}{l} \rightarrow \frac{b_v}{b_h} = \frac{\Delta y_{ou}}{\Delta y_{lr}} = \frac{2}{3}$$

Das gesuchte Verhältnis ist also 2:3 und das Gitter mit den horizontalen Gitterlinien hat den größeren Strichabstand.

d) Horizontale Gitterlinien heißt Maxima oben und unten. Zum Rechnen benutzen wir die Maxima 1. Ordnung.

$$\Delta s = \lambda = b \cdot \frac{\Delta y}{l} \rightarrow b = \frac{\lambda \cdot l}{\Delta y} = \frac{630 \cdot 10^{-9}\, m \cdot 1{,}5\, m}{0{,}01\, m} = \underline{95\, \mu m}$$

Aufgabe 13.290: Abi 2010; Energieübertragung durch Magnetfelder

Nach einer Meldung der Süddeutschen Zeitung vom 27.11.2008 kann elektrische Energie "durch die Luft" übertragen werden. Dazu hat der amerikanische Physiker Marin Soljacic zwei Spulen im Abstand von zwei Metern aufgestellt. Die eine Spule gibt Energie ab und wird als "Sendespule" bezeichnet, die andere Spule ist die "Empfangsspule".

a) Schildern Sie, wie prinzipiell Energie von einer Spule auf eine andere übertragen werden kann. Gehen Sie auch darauf ein, warum Gleichstrom dabei nicht geeignet ist. Wie sollten die beiden Spulen zueinander orientiert sein, damit die Energieübertragung möglichst effektiv ist?

Durch die Sendespule mit der Induktivität $L = 25\ \mu H$ fließt ein Wechselstrom der Frequenz $f = 10$ MHz. Sie gibt dabei in jeder Sekunde die Energie 400 J ab, hat also eine "Sendeleistung" von $P = 400$ W.

b) Zur Abschätzung der maximalen Stromstärke Io in der Sendespule wird davon ausgegangen, dass die Sendespule während einer Schwingungsperiode doppelt so viel Energie abgibt, wie ihre maximale magnetische Energie beträgt. Zeigen Sie, dass dann für die Leistung P der Zusammenhang $P = L \cdot Io^2 \cdot f$ gilt und berechnen Sie daraus Io.

c) Über die Empfangsspule wird eine 60-Watt-Glühlampe betrieben. Bestimmen Sie den Wirkungsgrad der Energieübertragung. Wie könnte diese Art der Energieübertragung Verwendung finden? Diskutieren Sie kurz, welche Nachteile dabei in Kauf zu nehmen wären.

d) Sende- und Empfangsanordnung können auch als in Resonanz gestimmte Schwingkreise aufgefasst werde. Berechnen Sie die Kapazität des "Sendeschwingkreises".

Lösung:

a) Die Sendespule muss ein sich permanent veränderndes Magnetfeld erzeugen.

(1) Kleiner Abstand: Wenn das Magnetfeld der Sendespule die Empfangsspule durchdringt, dann ändert sich permanent der Magnetische Fluss durch die Empfangsspule wodurch in der Empfangsspule ständig eine wechselnde Spannung induziert wird, mit der man einen Stromkreis antreiben kann -> Energieübertragung

(2) Großer Abstand: Das sich ständig ändernde Magnetfeld der Sendespule erzeugt ein sich ständig veränderndes elektrisches Feld, das wiederum ein sich ständig änderndes Magnetfeld erzeugt usw., eine elektromagnetische Welle breitet sich aus.

Die EM-Welle erreicht die Empfangsspule und das sich ständig ändernde Magnetfeld der EM-Welle durchdringt die Empfangsspule wodurch wieder permanent eine Spannung induziert wird ... (wie in (1)) ... ->Energieübertragung

Gleichstrom ist dafür nicht geeignet, weil das Magnetfeld der Sendespule sich ständig verändern muss, egal ob für kleine oder große Abstände. Dazu muss sich die Stromstärke in der Sendespule ständig verändern -> Wechselstrom

Damit die Energieübertragung möglichst effektiv ist, muss das sich ständig verändernde Magnetfeld die Querschnittfläche der Empfangsspule senkrecht durchdringen (<- für maximalen Magnetischen Fluss durch die Empfangsspule), bzw. parallel zur Spulenachse sein. Spulenachsen von Sende- und Empfangsspule müssen also parallel zueinander sein.

b) Maximale magnetische Energie: $E_{mag,max}=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I_0^2$

Leistung ist übertragene Energie pro Zeit, also pro Schwingungsdauer T = 1/f.

$$P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{2\cdot E_{mag,max}}{T}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\cdot L\cdot I_0^2}{\frac{1}{f}}=L\cdot I_0^2\cdot f \rightarrow \underline{P=L\cdot I_0^2\cdot f}$$

$$I_0=\sqrt{\frac{P}{L\cdot f}}=\sqrt{\frac{400\,W}{25\cdot 10^{-6}\,H\cdot 10\cdot 10^6\,Hz}}=\underline{\underline{1{,}26\,A}}$$

c) Wirkungsgrad: $\eta=\frac{P_{nutz}}{P_{auf}}=\frac{60\,W}{400\,W}=0{,}15=\underline{15\,\%}$

Verwendung: Hier müssen Beispiel(e) hin, bei denen etwas dagegen spricht, dass man einfach ein Kabel rein steckt oder den Akku auswechselt (kein Dudelapparat) und bei denen der schlechte Wirkungsgrad akzeptiert werden kann (keine Autos).

Beispiele: Aufladen der Batterie von Herzschrittmachern oder anderen medizinischen Implantaten im Innern des Körpers. Aufladen kleinerer Batteriebetriebener Geräte wie elektrische Zahnbürsten (<- hier ist das Standard) oder Handys (<-ist auch bereits verbreitet) ist ohne Kabelsalat bequemer.

Nachteile: Extrem schlechter Wirkungsgrad im Vergleich zu Kabelverbindung; hoher technischer und damit auch wirtschaftlicher (teuer) Aufwand; Elektrosmog durch die Emission von EM-Wellen durch die Sendespule?

d) $f=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{L\cdot C}} \rightarrow C=\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot f}\right)^2\cdot\frac{1}{L}=\left(\frac{1}{2\cdot\pi\cdot 10\cdot 10^6\,Hz}\right)^2\cdot\frac{1}{25\cdot 10^{-6}\,H}=\underline{10{,}1\,pF}$

Aufgabe 13.291: Abi 2011; Interferenz von sichtbarem Licht

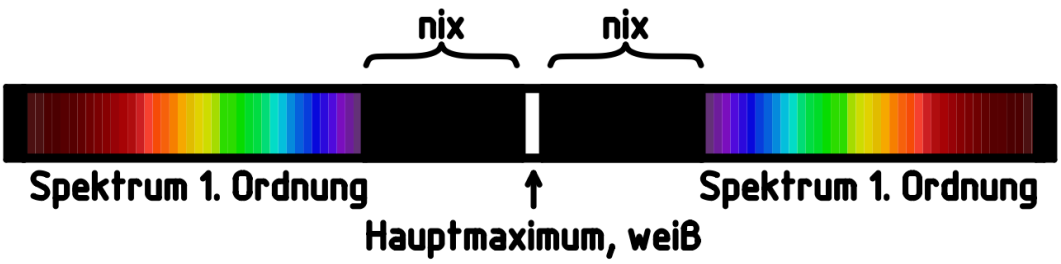
Der sichtbare Strahlungsanteil einer Kohlebogenlampe hat Wellenlängen zwischen 380 nm und 750 nm. Das Spektrum einer solchen Lampe soll mit Hilfe eines Beugungsgitters (300 Spalte pro Millimeter) untersucht werden. Dazu wird ein rechteckiger Schirm der Breite d = 2,30 m im Abstand a = 1,20 m parallel zum Gitter aufgestellt. Das Maximum 0. Ordnung liegt in der Mitte des Schirms.

a) Beschreiben Sie qualitativ das auf dem Schirm zu erwartende Bild bis zu den ersten Ordnungen. Gehen Sie dabei auch auf die Lage der Farben ein.

b) Erstellen Sie eine Skizze zum Aufbau und berechnen Sie die Anzahl der Spektren, die vollständig auf dem Schirm erscheinen.

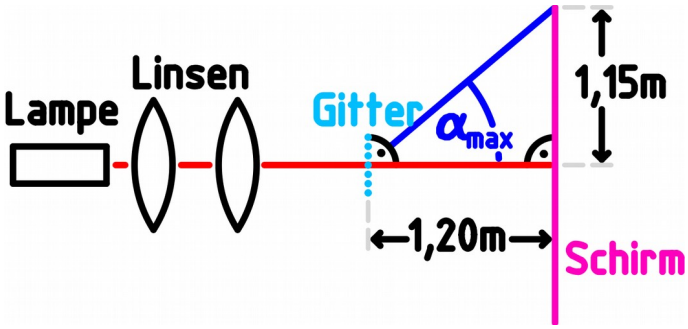
c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob sich die Bereiche der Maxima 1. und 2. Ordnung überlappen.

Lösung:



a) Auf dem Schirm erscheint in der Mitte das Hauptmaximum 0. Ordnung in weiß (<- Hauptmaximum für alle Wellenlängen gleich, alle Farben überlagern sich). Dann kommt auf beide Seiten nix gefolgt vom Spektrum 1. Ordnung das auf beiden Seiten erscheint. Da große Wellenlängen stärker gebeugt werden als kleine kommen die Farben in der Reihenfolge violett, blau, grün, gelb, orange und am Ende rot (die Spektren erscheinen vollständig, weil 380 nm bis 750 nm das ganze sichtbare Spektrum überdeckt).

b) Für die Anzahl der Spektren untersuchen wir nur die größte Wellenlänge (<- "... Spektren, die vollständig ...").



☠ Keine Kleinwinkelnäherung!

$$\tan \alpha_{max} = \frac{1{,}15\,m}{1{,}20\,m} \rightarrow \underline{\alpha_{max} = 43{,}8\,°}$$

$$k\cdot\lambda = b\cdot\sin\alpha \quad \rightarrow \quad k=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\lambda}\leqslant\frac{(1/300)\cdot 10^{-3}m\cdot\sin 43{,}8°}{750\cdot 10^{-9}m}=\underline{3{,}1}$$

D.h. die Spektren erscheinen bis zu dritter Ordnung, deshalb sind links und rechts vom Hauptmaximum insgesamt 6 Spektren zu sehen.

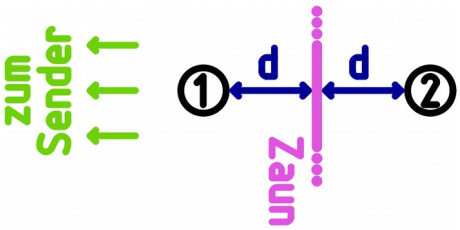
c) 1. Ordnung außen: $\lambda = b\cdot\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha=\frac{\lambda}{b}=\frac{750\cdot 10^{-9}m}{(1/300)\cdot 10^{-3}m} \rightarrow \underline{\alpha=13{,}0°}$

2. Ordnung innen: $2\cdot\lambda = b\cdot\sin\alpha \rightarrow \sin\alpha=\frac{2\cdot\lambda}{b}=\frac{2\cdot 380\cdot 10^{-9}m}{(1/300)\cdot 10^{-3}m} \rightarrow \underline{\alpha=13{,}2°}$

Die Spektren liegen sehr nahe beieinander, es kommt aber zu keiner Überlappung.

<u>Aufgabe 13.292: G8 Muster-Abi 2010; Gestörter Rundfunkempfang</u>

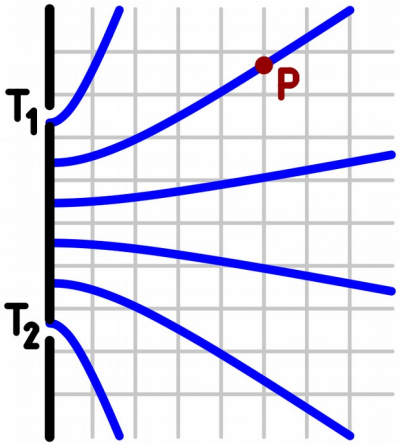
Ein Sportplatz ist einseitig von einem Zaun begrenzt, der vollständig mit Blech beschlagen ist. In größerer Entfernung vom Zaun befindet sich der Sendedipol eines UKW-Senders.



Auf beiden Seiten des Zauns steht jeweils ein Sportler (1) bzw. (2) mit einem tragbaren Radio in einem bestimmten Abstand d vom Zaun. Trotz optimal eingestellter Empfänger haben beide sehr schlechten Radioempfang, doch kann einer der beiden Sportler durch eine geringfügige Veränderung seines Abstandes vom Zaun die Empfangssituation deutlich verbessern, der andere nicht.

a) Erläutern Sie, warum anfangs beide Personen schlechten Radioempfang haben konnten und warum die Abstandsänderung nur bei einem der beiden zu einer Empfangsverbesserung führt.

Im Metallzaun sind zwei Türen T1 und T2. Wenn beide offen sind, hat man hinter dem Zaun auf den skizzierten sechs Linien praktisch keinen Empfang. Der Abstand der Türmitten ist 10 m.



b) Berechnen Sie die Wellenlänge und die Frequenz f des Senders unter Zuhilfenahme von Punkt P. Die Breite eines Kästchens in der Zeichnung entspricht 2,0m in der Natur. Beschreiben Sie, an welchen Orten besonders guter Empfang herrscht.

(Kontrolle: f = 80 MHz)

c) Bestimmen Sie eine möglcihe Länge eines optimal abgestimmten Sendedipols.

Lösung:

a) Die Radiowellen werden nahezu vollständig am Zaun reflektiert, weshalb nur ein kleiner Teil der Wellen durch Beugung zu Sportler (2) gelangt -> schlechter Empfang. Eine geringfügige Änderung seiner Position bringt ihn nicht aus dem geometrischen Schattenbereich, welchen der Zaun erzeugt und an der Reflexion der EM-Wellen am Zaun ändert das auch nichts. D.h. der Sportler kann seinen Empfang nicht verbessern.

Bei Sportler (1) überlagern sich direkt einlaufende Welle und reflektierte Welle. Die beiden Wellen schwingen am Ort von (1) anscheinend nahezu gegenphasig und löschen sich gegenseitig aus -> schlechter Empfang. Bewegt sich der Sportler (1) so ändern die beiden Wellen ihre Phasenlage und schwingen in einer geeigneten Richtung gleichphasig und verstärken sich gegenseitig -> guter Empfang. Falls sich (1) z.B. auf der Lotstrecke zwischen Sender und Zaun befindet so kann er durch Bewegung um $\frac{1}{4}\cdot\lambda$ vom Zaun weg von einem Schwingungsknoten zu einem Schwingungsbauch gelangen.

b) Die beiden Laufwege berechnet man mit Pytagoras:

$$s_1=\sqrt{(10\,m)^2+(2{,}3\,m)^2}=\underline{10{,}3\,m} \qquad s_1=\sqrt{(10\,m)^2+(12{,}3\,m)^2}=\underline{15{,}9\,m}$$

Am Punkt P ist das zweite Minimum von innen, deshalb ist der Laufwegunterschied an diesem Punkt 1,5·λ:

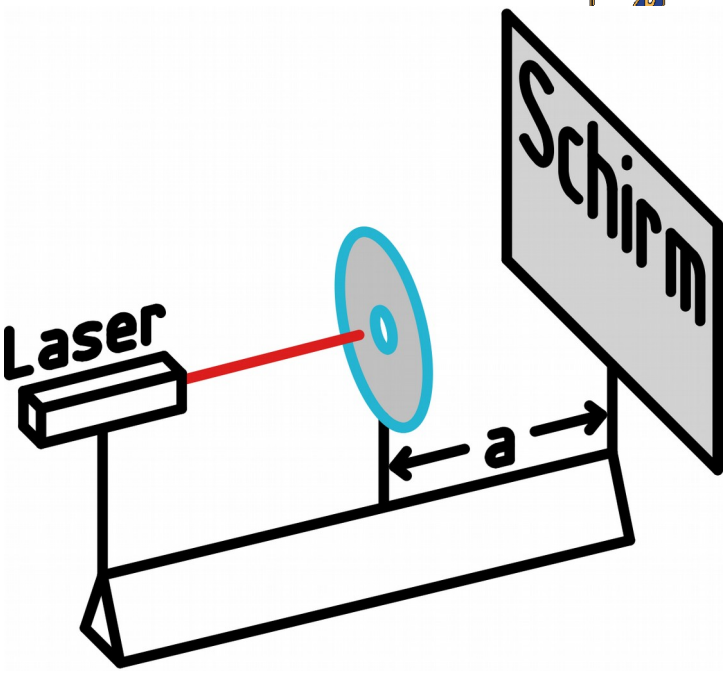
$$1{,}5\cdot\lambda=15{,}9\,m-10{,}3\,m \;\rightarrow\; \underline{\underline{\lambda=3{,}73\,m}} \qquad f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\cdot10^8\,m/s}{3{,}73\,m}=\underline{80\,MHz}$$

Guter Empfang ist bei den Maxima, also z.B. auf der Mittelsenkrechten von T1 und T2. Grundsätzlich befindet sich zwischen zwei Minima-Hyperbeln immer eine Maxima-Hyperbel, also eine Ortslinie mit besonders gutem Empfang.

c) Lambda-Halbe-Dipol: $l=\frac{\lambda}{2}=\frac{3{,}73\,m}{2}=\underline{1{,}87\,m}$

Aufgabe 13.293: G8 Muster-Abi 2010; CD als Beugungsgitter

Auf einer CD werden Informationen digital durch Vertiefungen in spiralförmigen Spurlinien gespeichert, die sich mit einem Laser im CD-Player auslesen lassen. Der Abstand g der nebeneinander liegenden Spurlinien beträgt $1{,}6\ \mu m$. Wenn man die Etikettenbeschichtung der CD ablöst, kann man die CD als Beugungsgitter verwenden.



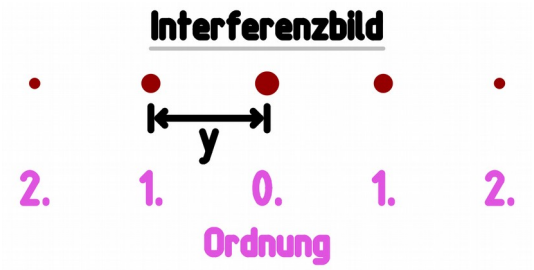
a) Der abgebildete Versuch soll zur Bestimmung der Wellenlänge des Lasers dienen. Skizzieren Sie das Interferenzbild auf dem Schirm und das Vorgehen zur Bestimmung der Wellenlänge.

b) Bei einem Versuch ergibt sich für den Abstand zwischen dem nullten und dem ersten Maximum 8,6 cm. Der Abstand zwischen CD und Schirm beträgt $a = 20$ cm. Berechnen Sie die Wellenlänge des verwendeten Lasers.

c) Beschreiben Sie die zu erwartenden Änderungen des Interferenzbildes, wenn der zunächst verwendete rote Laser durch einen grünen ersetzt wird und danach statt einer CD eine DVD verwendet wird, deren Spurlinien enger liegen.

Lösung:

a) Auf dem Schirm erscheinen Punkte verschiedener Intensität. Der hellste Punkt ist das Haupmaximum 0. Ordnung. Vom Hauptmaximum nach außen wird die Intensität der Maxima immer kleiner.



Zur Bestimmung der Wellenlänge misst man den Abstand a von Schirm zu CD und den Abstand y zwischen Hauptmaximum und Maximum erster Ordnung. Mit $\tan(\alpha) = y/a$ erhält man den Beugungswinkel α. Der Spaltabstand des Gitters beträgt $d = 1{,}6\ \mu m$ und mit $\Delta s = \lambda = d \cdot \sin(\alpha)$ erhält man schließlich die Wellenlänge.

b) Keine Kleinwinkelnäherung !!!

$$\tan(\alpha)=\frac{8{,}6\,cm}{20\,cm} \rightarrow \underline{\alpha=23{,}27°}$$

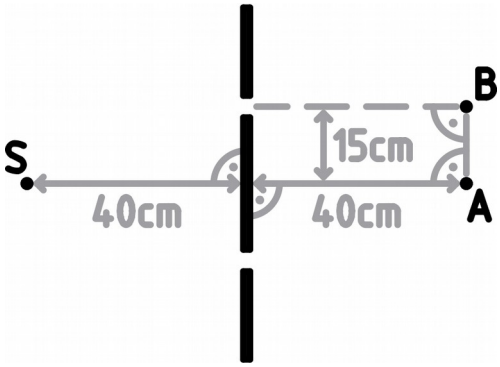
$$\lambda=\Delta s=d\cdot\sin(\alpha)=1{,}6\cdot10^{-6}\,m\cdot\sin(23{,}37°)=\underline{632\,nm}$$

c) Grüner Laser: Die Farbe des Interferenzbildes ändert sich natürlich von rot auf grün. Der grüne Laser hat eine kleinere Wellenlänge und wegen $\Delta s = \lambda = d\cdot\sin(\alpha)$ kleinere Beugungswinkel, d.h. die Maxima (Punkte auf dem Schirm) rücken näher zusammen.

DVD: Die DVD hat eine kleinere Gitterkonstante und wegen $\Delta s = \lambda = d\cdot\sin(\alpha)$ müssen dann die Beugungswinkel größer werden, d.h. die Maxima rücken wieder weiter auseinander. Die Farbe bleibt natürlich grün.

<u>Aufgabe 13.294: G8 Abi 2011; Interferenz von Mikrowellen</u>

Die nebenstehende Abbildung zeigt von oben betrachtet eine Doppelspaltanordnung it drei Metallplatten. Im Punkt S befindet sich ein Mikrowellensender der Wellenlänge λ = 4,0 cm, der von beiden Spalten gleich weit entfernt ist. Die mittlere Platte ist 28 cm, die beiden Spalte sind jeweils 2,0 cm breit.



a) Zunächst werden beide Spalte mit zusätzlichen schmalen Metallplatten verschlossen, sodass eine durchgehende Metallwand entsteht. Ein Empfänger wird auf der Geraden SA von S aus zur mittleren Platte hin bewegt. In regelmäßigen Abständen registriert man Empfangsminima. Erklären Sie dieses Phänomen und bestimmen Sie den Abstand zweier aufeinanderfolgender Minima. Berechnen Sie zudem die Frequenz der verwendeten Mikrowellenstrahlung.

Nun werden die schmalen Metallplatten entfernt und somit die beiden Spalte geöffnet.

b) Stellt man den Empfänger nun im Punkt A auf, so registriert man maximalen Empfang, obwohl die Strahlung nicht direkt durch die mittlere Metallplatte von S nach A gelangen kann. Erklären Sie diese Beobachtung.

c) Zeigen Sie durch Rechnung, dass man hingegen minimalen Empfang hat, wenn der Empfänger im Punkt B aufgestellt wird.

Lösung:

a) Auf dem Weg von S zur Metallplatte wird der Laufweg der direkt von S ankommenden Welle kontinuierlich größer, der Laufweg der an der Metallplatte reflektierten Welle wird kontinuierlich kleiner, so dass sich in regelmäßigen Abständen Punkte ergeben, an denen die beiden Wellen gegenphasig schwingen und sich deshalb teilweise auslöschen -> Empfangsminima.

Die Empfangsminima liegen in einem Abstand von λ/2: $\Delta s = \frac{1}{2}\lambda = 2{,}0\,cm$.

$$f=\frac{c}{\lambda}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{0{,}04\,m}=\underline{7{,}5\,GHz}$$

b) Die beiden Spalte erzeugen zwei neue Wellenzentren von denen aus die Mikrowellen zum Punkt A gelangen. Von S aus gemessen sind die Laufwege der beiden Wellen bis zum Punkt A gleich lang, weshalb die beiden Wellen am Punkt A gleichphasig schwingen und sich deshalb gegenseitig verstärken -> Empfangmaximum.

c) oberer Laufweg:

$$s_o=\sqrt{(40\,cm)^2+(15\,cm)^2}+40\,cm=\underline{82{,}72\,cm}$$

unterer Laufweg:

$$s_o=\sqrt{(40\,cm)^2+(15\,cm)^2}+\sqrt{(40\,cm)^2+(30\,cm)^2}=\underline{92{,}72\,cm}$$

Laufwegunterschied: $\Delta s=92{,}72\,cm-82{,}72\,cm=10\,cm=\frac{5}{2}\cdot\lambda$

Da der Laufwegunterschied ein ungeradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge ist, kommt es zu Auslöschung -> Minimum.

Aufgabe 13.295: Abi 2012; DVB-T - "Überall-Fernsehen"

Seit einigen Jahren ist Fernsehen in Deutschland über das so genannte DVB-T (Digital Video Broadcasting - Terrestrial) zu empfangen. Eine dafür geeignete, vertikal orientierte Sendeantenne strahlt mit einer Frequenz von 578 MHz.

a) In großer Entfernung vom Sender ist die Empfangsfeldstärke sehr klein, so dass nur mit einer Dachantenne ein störungsfreier Empfang mglich ist. Berechnen Sie die kleinste sinnvolle Länge des Empfangsdipols und geben Sie an, wie er für einen optimalen Empfang ausgerichtet sein muss.

b) Um die Empfangsqualität zu verbessern, wird eine Metallplatte hinter der Emp-

fangsantenne senkrecht zur Einfallsrichtung der Strahlung montiert. Nennen Sie das hier auftretende physikalische Phänomen, verdeutlichen Sie es durch eine Skizze und berechnen Sie für die Frequenz 578 MHz den kleinsten sinnvollen Abstand zwischen Antenne und Platte.

Es wird ein Schwingkreis aus Spule und Kondensator betrachtet, dessen Eigenfrequenz mit der Frequenz des DVB-T-Senders übereinstimmen soll.

c) Die langgestreckte, zylindrische Spule hat eine Länge von 8,0 cm, einen Durchmesser von 4,0 mm und 12 Windungen. Berechnen Sie die Kapazität des zugehörigen Schwingkreiskondensators.

d) Begründen Sie jeweils kurz, dass es sich bei einer Antenne auch um einen Schwingkreis handelt und dennoch eine Empfangsantenne nicht gleichwertig durch einen Schwingkreis aus Spule und Kondensator ersetzt werden kann.

Lösung:

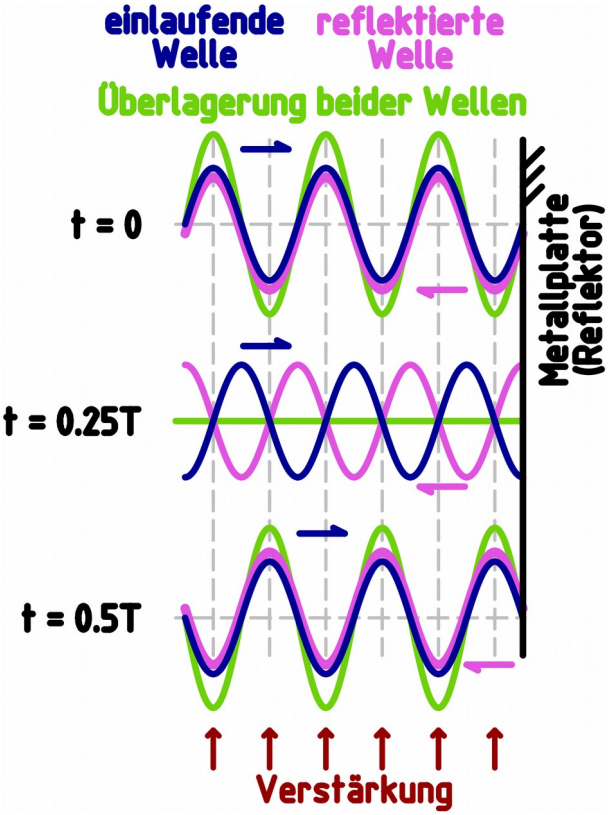
a) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\, m}{578 \cdot 10^6\, Hz} = \underline{0{,}52\, m}$

Die kleinste sinnvolle Länge ist eine Halbe Wellenlänge also 0,26 m.

Für optimalen Empfang muss die Empfangsantenne parallel zur Sendeantenne sein, also vertikal.

b) Phänomen: Reflexion; Interferenz; stehende Welle; Bild rechts

Kleinster Abstand für Schwingungsbauch -> $\frac{1}{4}\lambda$ also 0,13 m.



c) $L = \mu_0 \cdot A \cdot \frac{N^2}{l} = \ldots = \underline{28{,}4\, nH}$

$f = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$ → $C = \frac{1}{4 \cdot \pi^2 \cdot f^2 \cdot L}$

$\underline{C = 2{,}67\, pF}$

d) Dipol-Antenne ist aufgebogener Schwingkreis aus einer viertel Spule und sehr kleinem Kondensator; Schwingkreis kann Dipol-Antenne nicht gleichwertig ersetzen, weil effektive Absorptionsfläche von Dipol viel größer als von kleiner Spule

Aufgabe 13.296: Abi 2012; Interferenz mit Laserlicht

Ein Laser emittiert rotes Licht einer unbekannten Wellenlänge λ. Für ein Experiment stehen Ihnen ein optisches Gitter bekannter Gitterkonstante b, ein Schirm und ein Maßband mit Millimeter-Skala zur Verfügung.

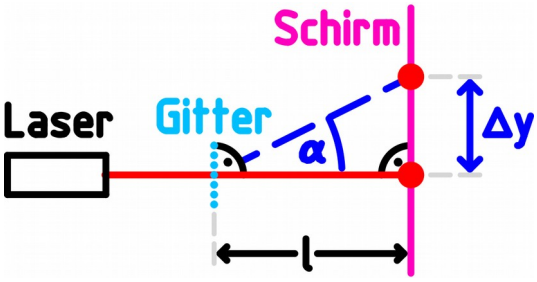
a) Beschreiben Sie unter Verwendung einer Skizze, wie man mit den gegebenen Hilfsmitteln die Wellenlänge λ des Laserlichts bestimmen kann. Gehen Sie insbesondere darauf ein, welche Größen gemessen werden müssen und wie die Auswertung erfolgt.

b) Im Experiment ergibt sich für die Wellenlänge des Laserlichts λ = 630 nm. Ermitteln Sie, welche Bedingung die Gitterkonstante b erfüllen muss, damit bei senkrechter Einstrahlung die Interferenzmaxima mindestens bis zur 10.Ordnung entstehen können.

c) Beschreiben und begründen Sie jeweils knapp, wie sich das Interferenzmuster auf dem Schirm verändert, wenn bei sonst gleichen Versuchsbedingungen ...

α) ... grünes Laserlicht verwendet wird.
β) ... das Gitter bei unverändert senkrechtem Einfall des Laserstrahls um 90° gedreht wird.

Lösung:



a) Man schickt das Laserlicht durch das Gitter hinter dem sich der Schirm befindet. Auf dem Schirm sind die Interferenzmaxima als helle Punkte sichtbar. Der hellste dieser Punkte ist das Hauptmaximum 0. Ordnung. Man misst den Abstand von Schirm und Gitter l und den Abstand des Maximums 1.Ordnung vom Hauptmaximum Δy. Damit erhält man den Beugungswinkel α aus tan(α) = Δy/l . Anschießend berechnet sich die Wellenlänge aus λ = d·sin(α).

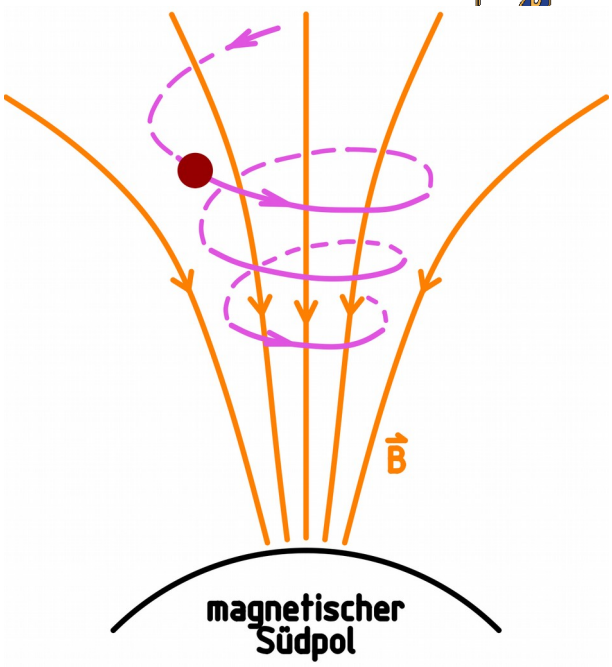
b) $b\cdot\sin(\alpha)=10\cdot\lambda \rightarrow b=\frac{10\cdot\lambda}{\sin(\alpha)}\geqslant 10\cdot\lambda=10\cdot 630\cdot 10^{-9}m=\underline{6{,}3\mu m} \Rightarrow \underline{b\geqslant 6{,}3\mu m}$

c) α) Die Farbe der Punkte ändert sich auf grün und wegen k·λ = b·sin(α) werden wegen der kleineren Wellenlänge des grünen Laserlichts die Beugungswinkel α kleiner, d.h. die Punkte (Maxima) rücken näher zusammen.

β) Da das Licht senkrecht zu den Spaltrichtungen gebeugt wird dreht sich das Interferenzmuster ebenfall um 90° in dieselbe Richtung.

Aufgabe 13.297: Abi 2013; Polarlicht und magnetische Stürme

Das Polarlicht ist eine am Himmel über den Polarregionen der Erde sichtbare farbige Leuchterscheinung. Sie entsteht, wenn geladene Teilchen des so genannten Sonnenwinds auf die obersten Schichten der Atmosphäre treffen und deren Gasteilchen zum Leuchten anregen. Die nebenstehende schematische Abbildung zeigt die Flugbahn eines geladenen Teilchens im Erdmagnetfeld.



a) Geben Sie zwei Gründe an, weshalb sich das geladene Teilchen im Erdmagnetfeld auf der in obiger Abbildung dargestellten Bahnform bewegt, und bestimmen Sie das Ladungsvorzeichen des Teilchens.

Leuchtender Stickstoff emittiert vor allem rotes und blaues Licht, das insgesamt den Farbeindruck Magenta ergibt und im Labor mit Hilfe eines Gitterspektralapparats untersucht werden kann.

b) Zeigen Sie allgemein, dass innerhalb einer Ordnung rotes Licht stärker gebeugt wird als blaues Licht. Skizzieren Sie qualitativ unter Kennzeichnung aller auf dem Schirm sichtbaren Farben das zu beobachtende Interferenzbild bis zur 2.Ordnung.

Die Intensität des von der Sonne emittierten Teilchenstroms ist manchmal besonders groß und verursacht Schwankungen des Erdmagnetfeldes. Spiegel Online berichtete am 10.08.2006 über die Trans-Alaska-Pipeline: "Sonnenstürme setzen Pipeline unter Strom."

c) Begründen Sie kurz das Entstehen der elektrischen Ströme in der Pipeline und beschreiben Sie unter Zuhilfenahme einer Skizze einen Versuch, mit dem das zugrunde liegende Phänomen im Labor demonstriert werden kann.

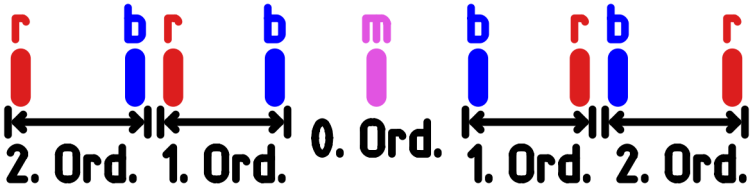
Lösung:

a) Gründe: Die Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens ist nicht senkrecht zu den magnetischen Feldlinien (das geht hier auch gar nicht) -> keine Kreisbahn sondern ähnlich Schraubenlinie. Das Magnetfeld wird nach unten hin immer stärker -> die Schraubenlinie wird nach unten hin immer enger.

Dreifingerregel: Die Lorentzkraft muss ins Innere der Schraubenlinie zeigen (Mittelfinger); das Magnetfeld zeigt nach unten (Zeigefinger) -> Daumen in Flugrichtung -> das Teilchen ist positiv geladen.

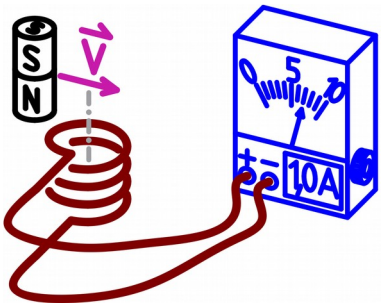
b) Wegen $k \cdot \lambda = b \cdot \sin(\alpha)$

ist der Beugungswinkel a zu einer festen Ordnung k umso größer, je größer die Wellenlänge ist. Weil rotes Licht eine größere Wellenlänge hat als blaues wird es stärker gebeugt.



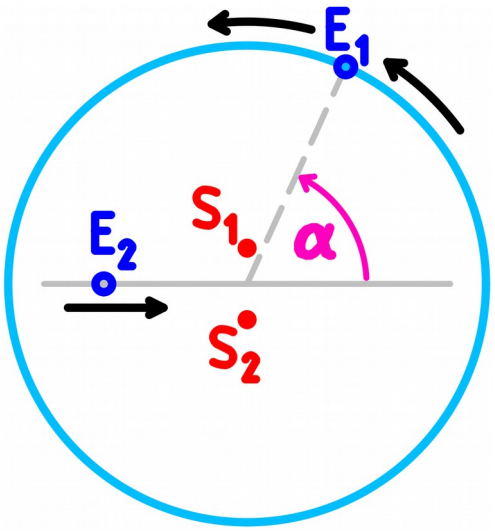
c) Wenn sich das Magnetfeld (Erdmagnetfeld) durch die Sonnenstürme verändert, dann ändert sich der magnetische Fluss durch die Pipeline und deshalb wird eine Spannung und falls die Pipeline elektrisch leidend ist ein elektrischer Strom induziert.

Im Labor bewegt man einen Magneten in der Nähe einer Spule, die an ein Amperemeter (geht auch ein Voltmeter) angeschlossen ist, und beobachtet einen Zeigerausschlag, sobald der Magnet bewegt wird.



<u>Aufgabe 13.298: Abi 2013; Interferenz von Dipolstrahlung</u>

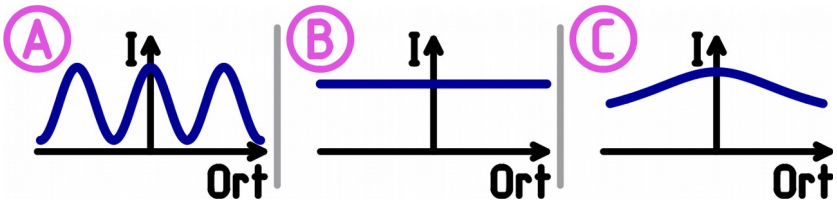
Zwei Hertzsche Dipole S1 und S2 stehen senkrecht zur Zeichenebene, im Abstand von 15 cm und schwingen phasengleich mit einer Frequenz von f = 5,0 GHz.



a) Berechnen Sie die Länge der Dipole, falls sie in ihrer Grundschwingung schwingen.

b) Skizzieren Sie für charakteristische Zeitpunkte während einer Periode das elektrische Feldlinienbild im Nahbereich eines Dipols.

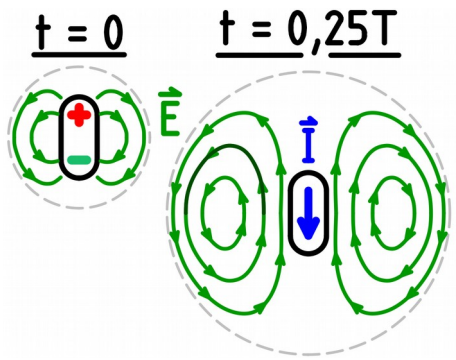
c) Der Empfangsdipol E1 bewegt sich entlang einer Kreislinie in mehreren Metern Abstand um die Senderanordnung. Bestimmen Sie die Anzahl der Empfangsmaxima bei einem Umlauf.



d) Der Empfangsdipol E2 bewegt sich entlang der Mittelsenkrechten der Senderanordnung. Begründen Sie, welches der drei nachfolgenden Diagramme die Empfangsintensität I qualitativ richtig darstellt.

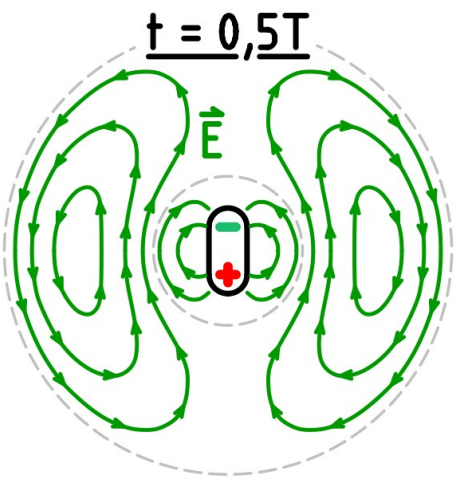
Lösung:

a) $c = f \cdot \lambda \rightarrow \lambda = \frac{c}{f}$; $l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2 \cdot f} = \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{2 \cdot 5{,}0 \cdot 10^9\, Hz} = \underline{\underline{3{,}0\, cm}}$



b) Nahbereich!

Nur elektrische Feldlinien!

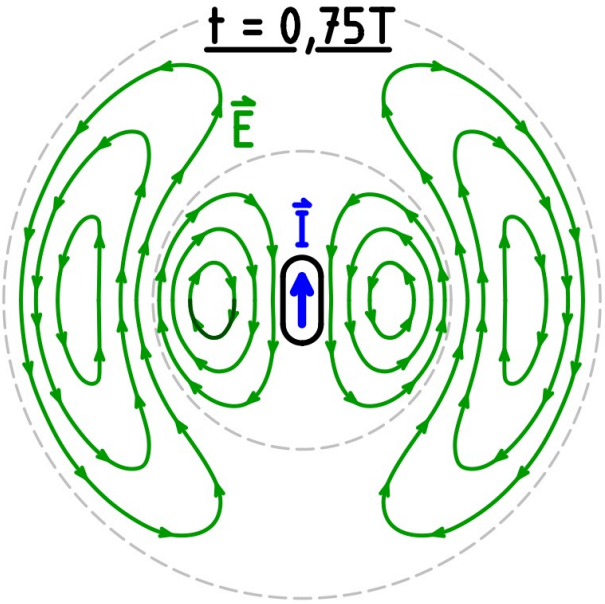


c) Maximale Ordnung

$$k \cdot \lambda = b \cdot \sin(\alpha) \rightarrow k = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{\lambda} \leqslant \frac{b}{\lambda}$$

$$k \leqslant \frac{0{,}15\, m}{0{,}060\, m} = \underline{\underline{2{,}5}}$$

Maximale Ordnung ist also 2. Das macht zwei Hauptmaxima und in jedem Viertelkreis noch 2 Nebenmaxima. Das gibt insgesamt 10 Maxima.



d) Auf der Mittelsenkrechten befindet sich das Hauptmaximum 0. Ordnung, also nur Verstärkung und niemals Auslöschung. Je näher man jedoch den Sendern kommt, desto größer wird die Empfangsintensität -> Diagramm C ist richtig.