Franz-Miltenberger-Gymnasium, Bad Brückenau

Physik 12

von Stefan Bruckmoser, Version: 2016_03_28

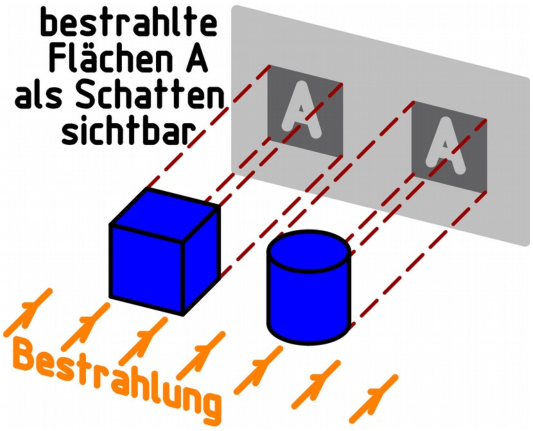
Inhaltsverzeichnis

1 Photonen

1.1 Klassische Energieübertragung

Energie-Übertragung im klassischen Modell elektromagnetischer Wellen

Der Energiegehalt (Bestrahlungsstärke, Intensität) einer elektromagnetischen Welle ist nur abhängig von der Amplitude der Welle, nicht von der Frequenz (genauer ist der Energiegehalt proportional zum Amplitudenquadrat).



Der Betrag der auf einen Körper übertragenen Energie ist zusätzlich abhängig von der Bestrahlungsdauer Δt (je länger die Bestrahlung dauert, desto mehr Energie wird übertragen) und von der Größe der Bestrahlten Fläche A.

Aufgabe 1.1: Versuche von Meyer und Gerlach (1914)

Eine Lampe mit einer Leistungsabgabe von 20mW beleuchtet Staubpartikel mit Durchmesser 0,2µm in 20,0m Entfernung. Wie lange dauert es, bis ein Staubkorn genug Energie aufgenommen hat, damit ein Elektron mit einer Bindungsenergie von 4eV aus dem Metall ausgelöst werden kann? (Originalzahlen nicht gefunden)

Lösung:

Nur die Energie, die auf die Querschnittfläche eines Staubpartikels trifft, kann vom Partikel aufgenommen werden.

$$E_{Lampe} = P \cdot t \quad ; \quad E_{Partikel} = \frac{A_{Partikel}}{A_{gesamt}} \cdot E_{Lampe} = \frac{\pi \cdot r^2}{4 \cdot \pi \cdot 5^2 m^2} \cdot P \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{E_{Par} 4 \cdot \pi \cdot 20^2 m^2}{\pi \cdot r^2 \cdot P}$$

$$\text{Zum Auslösen muss } E_{Par} = 4\text{eV} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J \cdot 4 \cdot \pi \cdot 20^2 m^2}{\pi \cdot (0{,}1 \cdot 10^{-6} m)^2 \cdot 0{,}02 W} = \underline{5{,}12\, s}$$

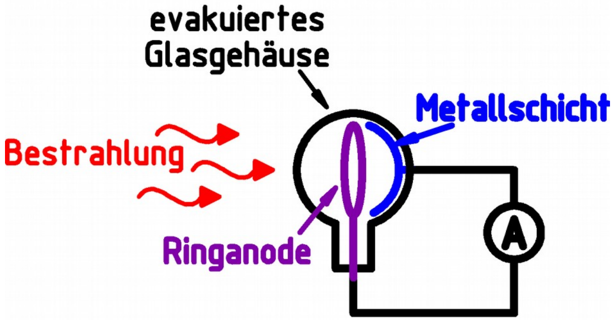
Bemerkung: Die Versuche sind tatsächlich durchgeführt worden. Es ist allerdings nicht die berechnete Verzögerung von 5,1s gemessen worden, sondern gar keine. Dabei müsste die Verzögerung noch länger sein, da ja ein Teil der Strahlung reflektiert wird und es wenigstens anschaulich extrem unwahrscheinlich scheint, dass die restliche, vom Staubpartikel absorbierte Energie in ein einziges Elektron fließt.

1.2 Photoeffekt

Von Photoeffekt spricht man, wenn durch Bestrahlung mit Licht (elektromagnetischen Wellen) aus einer Oberfläche Elektronen ausgelöst werden.

Photoeffekt, qualitativ:

Wir bestrahlen eine Vakuumphotozelle (siehe Bild) mit Licht aus verschiedenen Lichtquellen. Durch eine sehr empfindliche Strommessung lässt sich feststellen, ob Elektronen aus der Metallschicht ausgelöst werden und auf die Ringanode prallen, also ob ein Photoeffekt eintritt. Den so entstehenden Strom nennt man Photostrom.



Aufgabe 1.2:

Zum Versuchsaufbau oben.

a) Weshalb muss man die Anordnung in ein evakuiertes Gehäuse einbauen?

b) Weshalb ist die Anode als Ring ausgeführt, und nicht einfach als Platte?

Versuchsergebnisse:

Nicht jede Bestrahlung erzeugt einen Photoeffekt. Nur mit ganz bestimmten Lichtquellen lässt sich ein Photoeffekt auslösen. Die wesentlichen Ergebnisse sind:

➔ Nur Licht ab einer bestimmten Grenzfrequenz f_G oder darüber kann Elektronen aus der Metalloberfläche auslösen.

Wenn die Frequenz zu klein ist, dann lassen sich auch mit beliebig großer Bestrahlungsintensität (Beleuchtungsstärke; Amplitude der Welle) keine Elektronen auslösen. Wenn die Frequenz aber groß genug ist, dann führt eine Steigerung der Bestrahlungsintensität zu einem höheren Photostrom.

➔ Der Effekt tritt sofort ohne Zeitverzögerung ein.

D.h. sobald das Licht auf der Metalloberfläche ankommt werden sofort die ersten Elektronen ausgelöst.

Der Versuchsausgang steht im Widerspruch zur klassischen Theorie:

- Die von der EM-Welle übertragene Energie hat offensichtlich irgendwie mit der Frequenz zu tun, sie sollte aber nur von der Amplitude (Intensität) abhängen.

Nach der klassischen Theorie sollte Licht jeder Frequenz Elektronen auslösen können. Bei kleinerer Intensität sollte es nur länger dauern bis die ersten Elektronen ausgelöst werden, mit der Frequenz sollte es gar nichts zu tun haben.

- Nach der klassischen Theorie müsste es mindestens einige Sekunden dauern, bis ein Elektron genug Energie aufgenommen hat um aus dem Metall zu entkommen. Der Effekt tritt aber ohne Zeitverzögerung ein.

Der hauptsächliche Grund für die klassisch notwendige Zeit ist die geringe bestrahlte Fläche bei einem Elektron.

Aufgelöst werden die Widersprüche durch die

Quantenmechanische Modellvorstellung von Licht (vereinfacht):

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Eine elektromagnetische Welle der Frequenz f kann bei Wechselwirkung nur Energiepakete der Größe

$$E = h \cdot f$$

mit dem Planckschen Wirkungsquantum h (Naturkonstante, siehe Formelsammlung) austauschen. Ein solches Energiepaket nennt man ein Photon.

Eine Wechselwirkung tritt an keinem Ort mit Sicherheit ein, sondern immer nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit ist dabei umso größer, je größer die Amplitude der Welle ist. Insbesondere ist die Wechselwirkungs-Wahrscheinlichkeit größer Null, wenn die Amplitude größer Null ist.

Auflösung der Widersprüche beim Photoeffekt:

➔ Wenn die Frequenz der elektromagnetischen Welle kleiner als die Grenzfrequenz ist, dann ist ein Energiepaket wegen $E = h \cdot f$ zu klein um einem Elektron genug Energie zum Verlassen des Metalls zuzuführen. D.h. kein Photoeffekt.

➔ Sobald Licht auf die Metalloberfläche trifft, ist die Amplitude der EM-Welle am Ort eines Elektrons größer als Null. Deshalb ist dann auch die Wahrscheinlichkeit für eine Wechselwirkung größer als Null, d.h. eine Wechselwirkung kann stattfinden und ein Elektron kann ausgelöst werden, ohne Zeitverzögerung.

Begriff: Auslösearbeit (Austrittsarbeit)

Um ein Elektron aus dem Metall auszulösen, muss man eine gewisse vom Metall abhängige Mindestenergie zuführen. Man muss also an dem Elektron Arbeit gegen die anziehenden Kräfte der Atomrümpfe im Metallgitter verrichten, die Auslösearbeit. Zwischen Auslösearbeit und Grenzfrequenz beim Photoeffekt gilt der Zusammenhang:

$$\boxed{W_A = \Delta E = E_{Ph} = h \cdot f_G}$$

Bei verschiedenen Metallen ist natürlich die Auslösearbeit und damit auch die Grenzfrequenz verschieden groß (Tabelle siehe Formelsammlung).

Masse eines Photons:

Das Photon besitzt keine Ruhemasse ($m_0 = 0$), allerdings lässt sich dem Photon trotzdem eine Masse zuordnen.

$$E = m \cdot c^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{h \cdot f}{c^2}$$ oder mit $c = \lambda \cdot f$

$$m = \frac{h \cdot f}{c \cdot c} = \frac{h \cdot f}{c \cdot \lambda \cdot f} = \frac{h}{c \cdot \lambda}$$

Impuls eines Photons:

$$p = m \cdot v = m \cdot c = \frac{h}{c \cdot \lambda} \cdot c = \frac{h}{\lambda}$$

Photon: $$\boxed{E_{Ph} = h \cdot f \qquad p = \frac{h}{\lambda}}$$

Bemerkung:

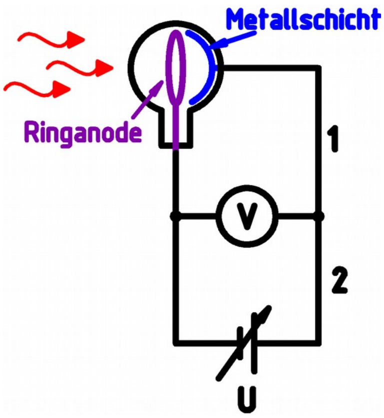
Alles was wir früher über elektromagnetische Wellen gelernt haben bleibt weiterhin richtig. Wir haben das Modell nur durch Einschränkungen beim Wechselwirkungsprozess ergänzt. Sie müssen sich eine EM-Welle weiterhin so vorstellen, wie bisher.

- ☠ Sobald Sie sich das Licht als Strom aus kleinen Kügelchen vorstellen, bekommen sie sehr schnell logische Probleme. Es gibt keine kleinen Kügelchen im Licht.

Wenn mit der EM-Welle eine Wechselwirkung stattfindet, dann verändert sich natürlich die Welle. Es geht irgendwas weg, oder es kommt was dazu.

Photoeffekt, quantitativ:

Um den Photoeffekt quantitativ auszuwerten, müssen wir die Frequenz (oder die Wellenlänge) der einfallenden Strahlung, und die kinetische Energie der Photoelektronen messen. Die kinetische Energie der Elektronen messen wir mit der Gegenfeldmethode. D.h. wir bremsen die Elektronen durch ein elektrisches Feld ab und steigern die Feldstärke so lange, bis die Elektronen das Feld nicht mehr durchqueren können.



Dazu legen wir zwischen Metallschicht (Photokathode) und Ringanode eine Gegenspannung an, die mit einem Voltmeter gemessen wird. An der Stelle 1 oder 2 schließen wir ein Amperemeter an. Jetzt regeln wir die Spannung so lange hoch, bis kein Photostrom mehr fließt. Bei diesem Wert für die Spannung wird die kinetische Energie der Photoelektronen vollständig in elektrische Energie umgewandelt. Dann ist

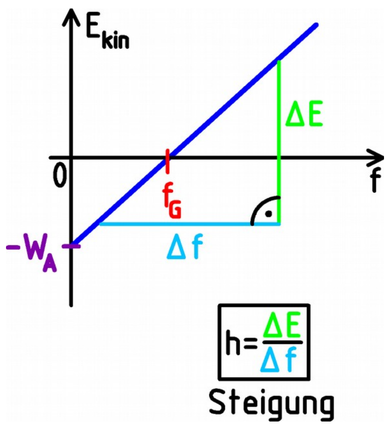
$$E_{kin} = E_{el} = U \cdot q = U \cdot e$$

Die Energie eines Photons, das ein Elektron ausgelöst hat, wird in der Regel größer sein als die Auslösearbeit. Die überschüssige Energie wird in kinetische Energie des Photoelektrons umgewandelt. Damit gilt:

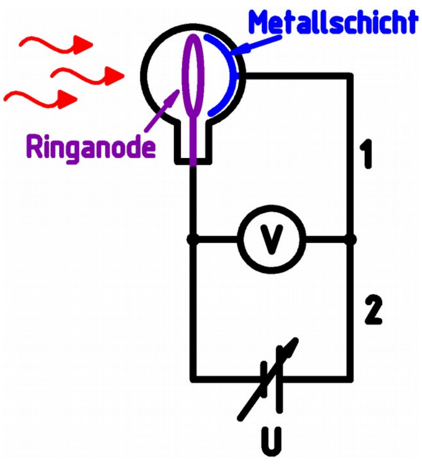
$$E_{Ph} = W_A + E_{kin} \quad / - W_A$$
$$E_{kin} = E_{Ph} - W_A$$
$$E_{kin} = h \cdot f - W_A$$

Einstein-Gleichung: $\boxed{E_{kin} = h \cdot f - W_A}$

Wir betrachten die kinetische Energie der Photoelektronen als Funktion der Frequenz des eingestrahlten Lichts. Das ist eine lineare Funktion (y = m · x + t), und der Graph ist eine Gerade mit y-Achsenabschnitt $-W_A$ und Steigung h (Steigungsdreieck). Mit diesem Wissen kann man aus einem experimentell gewonnenen f-E-Diagramm leicht Auslösearbeit (Austrittsarbeit), Grenzfrequenz und plancksches Wirkungsquantum h bestimmen.



Aufgabe 1.3:



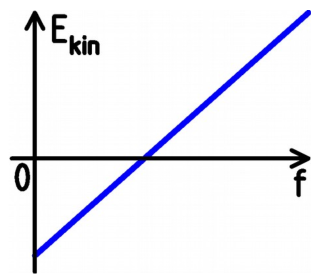
Bei der Messung muss man ganz genau wissen, wann der Photostrom Null wird. Der Photostrom wird in der Schaltung bei 1 oder 2 gemessen.

Wenn man aber Spannung und Stromstärke im Photostromkreis gleichzeitig messen will ist zwingend eine der beiden Messungen mit einem Fehler behaftet. Da der Photostrom sehr klein ist, muss die Strommessung so genau wie möglich sein, darf also nicht fehlerbehaftet sein.

An welcher Stelle des Stromkreises muss man das Amperemeter anschließen? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 1.4:

Im Versuch erhält man für das f-E-Diagramm Messpunkte, die auf einer Geraden liegen. Die tatsächlich vorkommenden Messwerte liegen aber nicht auf der ganzen Geraden.



Auf welchem Teil der Geraden erhält man Messpunkte und auf welchem Teil der Gerade erhält man keine Messpunkte? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 1.5:

a) Ein Metall hat eine Auslösearbeit von 2,1eV. Bestimme die Grenzfrequenz für den Photoeffekt und die dazugehörige Grenzwellenlänge. Wann tritt ein Photoeffekt auf, bei kleinerer oder bei größerer Wellenlänge?

b) An einer Metalloberfläche ist die Grenzwellenlänge für den Photoeffekt 405nm. Bestimme Grenzfrequenz und Austrittsarbeit des Metalls.

Lösung:

a)

$$W_A = h \cdot f_G \quad \rightarrow \quad f_G = \frac{W_A}{h} = \frac{2{,}1\,eV}{4{,}1 \cdot 10^{-15}\,eV \cdot s} = \underline{5{,}12 \cdot 10^{14}\,Hz}$$

$$c = \lambda_G \cdot f_G \quad \rightarrow \quad \lambda_G = \frac{c}{f_G} = \frac{3 \cdot 10^8\,m/s}{5{,}12 \cdot 10^{14}\,Hz} = \underline{586\text{nm}}$$

Ein Photoeffekt tritt nur bei einer größeren Frequenz als der Grenzfrequenz auf.

Deshalb muss die Wellenlänge kleiner als die Grenzwellenlänge sein, damit ein Photoeffekt eintritt.

b) $c=\lambda_G \cdot f_G \rightarrow f_G=\frac{c}{\lambda_G}=\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{405\cdot 10^{-9}\,m}=\underline{7{,}4\cdot 10^{14}\,Hz}$

$W_A=h\cdot f_G=6{,}6\cdot 10^{-34}\,Js\cdot 7{,}4\cdot 10^{14}\,Hz=\underline{4{,}9\cdot 10^{-19}\,J=3{,}07\,eV}$

Wenn Sie sich sicher sind, rechnen Sie mit eV. Wenn Sie sich nicht sicher sind rechnen Sie grundsätzlich alles in SI-Einheiten um.

Aufgabe 1.6:

Dies ist die Standardaufgabe zum Photoeffekt. Aus einer Gegebenen Messreihe soll Auslösearbeit (Austrittsarbeit), Grenzfrequenz und Plancksches Wirkungsquantum bestimmt werden. Wir gehen also bei dieser Aufgabe davon aus, dass wir den Zahlenwert für das Plancksche Wirkungsquantum noch gar nicht wissen.

a) Bei einem Versuch wird die kinetische Energie der Photoelektronen in Abhängigkeit der Frequenz des eingestrahlten Lichts gemessen.

f in 10^{14}Hz	7,1	8,2	9,4
E_{kin} in 10^{-18} J	0,06	0,12	0,23

Fertige ein f-E-Diagramm an (mit E der kinetischen Energie der Photoelektronen) und bestimme mit Hilfe des Diagramms Auslösearbeit, Grenzfrequenz und Plancksches Wirkungsquantum.

b) Bei einem Versuch wird die Gegenspannung beim Erliegen des Photostroms in Abhängigkeit von der Wellenlänge des eingestrahlten Lichts gemessen.

λ in nm	320	290	240
U in V	0,29	0,74	1,5

Fertige ein f-E-Diagramm für diesen Versuch an (mit E der kinetischen Energie der Photoelektronen) und bestimme mit Hilfe des Diagramms Austrittsarbeit, Grenzfrequenz und Plancksches Wirkungsquantum.

c) Bei einem Versuch wird die kinetische Energie der Photoelektronen in Abhängigkeit der Frequenz des eingestrahlten Lichts gemessen. Dabei werden nur zwei Messwerte aufgenommen.

f in 10^{14}Hz	15	17
E_{kin} in 10^{-18} J	0,30	0,44

Bestimme aus den Messwerten Auslösearbeit, Plancksches Wirkungsquantum und Grenzfrequenz, und zwar rein rechnerisch ohne ein Diagramm zu Hilfe zu nehmen.

d) Bei einem Versuch wird die Gegenspannung beim Zusammenbrechen des Photostroms in Abhängigkeit der Wellenlänge des eingestrahlten Lichts gemessen. Dabei werden nur zwei Messwerte aufgenommen.

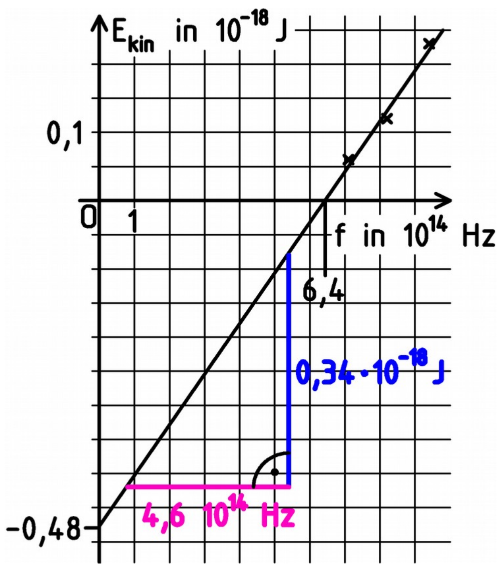
λ in nm	420	370
U in V	1,5	2,0

Bestimme aus den Messwerten Austrittsarbeit, Plancksches Wirkungsquantum und Grenzfrequenz, und zwar rein rechnerisch ohne ein Diagramm zu Hilfe zu nehmen.

Lösung:

a) Auslösearbeit und Grenzfrequenz liest man direkt aus dem Diagramm ab.

$\underline{W_A = 0{,}48 \cdot 10^{-18}\,J = 3{,}0\,eV}$ $\quad \underline{f_G = 6{,}4 \cdot 10^{14}\,Hz}$



Für das Plancksche Wirkungsquantum zeichnen wir ein Steigungsdreieck.

$$h = \frac{\Delta E}{\Delta f} = \frac{0{,}34 \cdot 10^{-18}\,J}{4{,}6 \cdot 10^{14}\,Hz} = \underline{7{,}4 \cdot 10^{-34}\,Js}$$

Solche Zeichnungen sind sehr empfindlich in der Genauigkeit, deshalb müssen sie beim Zeichnen sehr präzise arbeiten. Trotzdem kann es bei verschiedenen Schülern noch zu recht großen Abweichungen kommen. Ich würde sagen, wenn ihre Abweichung deutlich unter 20% liegt sind wir noch im grünen Bereich.

b) Wir rechnen zuerst die Wellenlängen mit $c = \lambda \cdot f$ in Frequenzen um. Die kinetische Energie kann man mit der Gegenspannung leicht in eV angeben ohne was rechnen zu müssen. Dann erhalten wir die Werte:

Frequenzen in $10^{14}\,Hz$: 9,4 ; 10,3 ; 12,5

Kinetische Energie der Photoelektronen in eV: 0,29 ; 0,74 ; 1,5

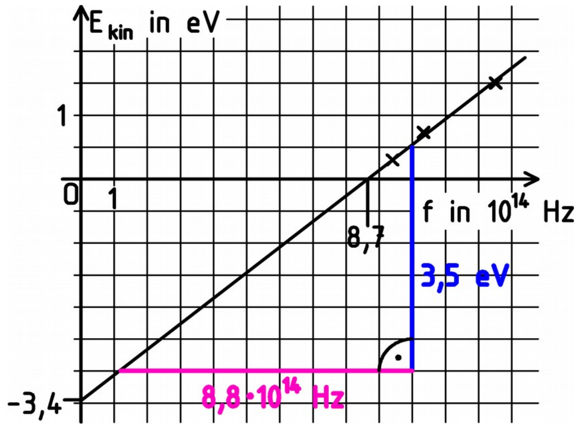
Man erhält

$$\underline{W_A = 3{,}4\,eV = 5{,}44 \cdot 10^{-19}\,J}\,; \quad \underline{f_G = 8{,}7 \cdot 10^{14}\,Hz}$$

und

$$h = \frac{\Delta E}{\Delta f} = \frac{3{,}5\,eV}{8{,}8 \cdot 10^{14}\,Hz} =$$

$$= \underline{3{,}9 \cdot 10^{-15}\,eV \cdot s = 6{,}4 \cdot 10^{-34}\,Js}$$



c) Wir bestimmen zuerst die Steigung der Geraden h.

$$h = \frac{\Delta E}{\Delta f} = \frac{(0{,}44 - 0{,}30) \cdot 10^{-18}\,J}{(17 - 15) \cdot 10^{14}\,Hz} = \underline{7{,}0 \cdot 10^{-34}\,Js}$$

Dann setzen wir einen beliebigen Punkt in die Einstein-Gleichung ein, um die Auslösearbeit rauszukriegen. Wir nehmen den ersten Messpunkt. Beim Einsetzen muss man das selbst bestimmte h einsetzen, sonst gibt man eine zusätzliche Information dazu.

$$E_{kin} = h \cdot f - W_A \quad / + W_A - E_{kin}$$
$$W_A = h \cdot f - E_{kin} = 7{,}0 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 15 \cdot 10^{14}\,Hz - 0{,}30 \cdot 10^{-18}\,J$$
$$\underline{\underline{W_A = 7{,}5 \cdot 10^{-19}\,J = 4{,}7\,eV}}$$

Die Grenzfrequenz bekommt man aus der Auslösearbeit.

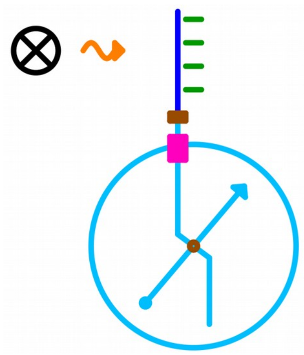
$$W_A = h \cdot f_G \Rightarrow f_G = \frac{W_A}{h} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-19}\,J}{7{,}0 \cdot 10^{-34}\,Js}$$
$$\underline{\underline{f_G = 1{,}07 \cdot 10^{15}\,Hz}}$$

d) Frequenzen in $10^{14}\,Hz$: 7,1 ; 8,1

$$h=\frac{\Delta E}{\Delta f}=\frac{2{,}0\,eV-1{,}5\,eV}{(8{,}1-7{,}1)\cdot 10^{14}\,Hz}=\underline{5\cdot 10^{-15}\,eV\cdot s=8\cdot 10^{-34}\,Js}$$

Auslösearbeit und Grenzfrequ. wie in c): $\underline{W_A=2{,}1\,eV=3{,}3\cdot 10^{-19}\,J}$ $\underline{\underline{f_G=4{,}1\cdot 10^{14}\,Hz}}$

Aufgabe 1.7: Einfacher Nachweis des Photoeffekts

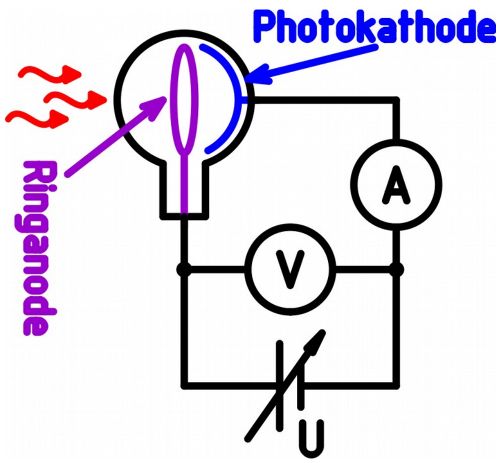


Eine negativ aufgeladene Zinkplatte auf einem Elektroskop wird mit Licht aus verschiedenen Lichtquellen bestrahlt.

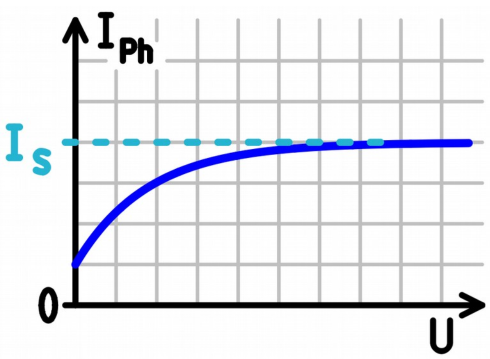
a) Bestrahlt man die negativ geladene Zinkplatte mit einer Quecksilberdampflampe, dann geht der Zeigerausschlag des Elektroskops sehr schnell auf Null zurück. Bestrahlt man die negativ geladene Zinkplatte jedoch mit einem leistungsstarken Tageslichtprojektor, dann lässt sich keine Auswirkung auf den Zeigerausschlag des Elektroskops beobachten. Erkläre die unterschiedlichen Reaktionen der Anordnung auf verschiedene Lichtquellen.

b) Wenn man die Zinkplatte zu Versuchsbeginn positiv auflädt, dann lässt sich auch bei Bestrahlung mit einer Quecksilberdampflampe keine Reaktion des Zeigerausschlags beobachten. Weshalb?

Aufgabe 1.8: Photozelle mit Saugspannung



Will man einen möglichst großen Photostrom, dann darf man die Photoelektronen nicht bremsen, sondern man muss sie zur Ringanode hin beschleunigen. Die Ringanode muss also an den Pluspol der Spannungsquelle angeschlossen werden (Saugspannung; siehe Bild).



Eine Kalium-Photozelle (Auslösearbeit 2,25 eV) wird mit Licht der Wellenlänge 250 nm bestrahlt. Auf die Photokathode fällt dabei eine Lichtleistung von 1,2 W. Beim langsamen hochregeln der Saugspannung ergibt sich für den gemessenen Photostrom das nebenstehend gezeigte Diagramm mit einer Sättigungsstromstärke Is.

a) Erkläre, weshalb bei zunehmender Saugspannung der Photostrom größer wird und weshalb der Photostrom die Sättigungsstromstärke nicht übersteigen kann.

b) Im Versuch wird eine Sättigungsstromstärke von 40 mA gemessen. Wie viel Prozent der auf die Photokathode treffenden Photonen lösen ein Photoelektron aus. Rechnung!

c) Skizziere in das U-I-Diagramm oben den Verlauf des gemessenen Photostroms, wenn die Bestrahlungsintensität bei sonst gleichen Versuchsbedingungen gesteigert wird und begründe die Veränderung des Diagramms.

Lösung:

a) Die Photoelektronen verlassen die Photokathode in beliebige Richtungen, deshalb treffen ohne Saugspannung nur sehr wenige Photoelektronen auf die flächenmößig kleine Ringanode. Durch die Saugspannung wird die Ringanode positiv geladen und zieht die Photoelektronen an. Deshalb treffen bei zunehmender Saugspannung immer mehr Photoelektronen auf die Ringanode und der Photostrom nimmt zu. Schließlich ist die Saugspannung so groß, dass fast alle ausgelösten Photoelektronen auf die Ringanode treffen. Eine weitere Zunahme der Saugspannung kann nicht noch mehr Elektronen auf die Ringanode ziehen, weil nicht mehr Photoelektronen da sind → die Sättigungsstromstärke ist erreicht und wird nicht überschritten.

b) Pro Sekunde auftreffende Photonen:

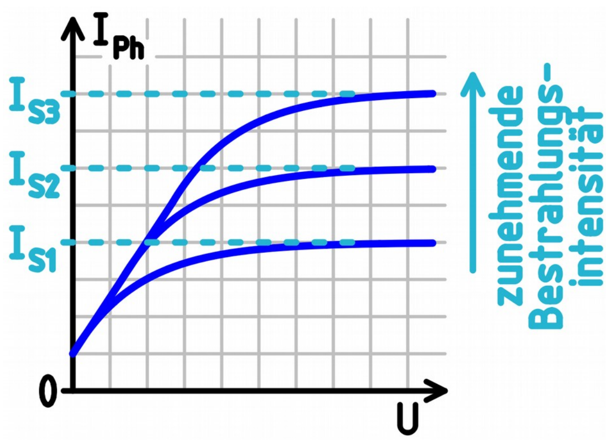
$$N_{Ph}=\frac{\Delta E}{E_{Ph}}=\frac{\Delta E}{h\cdot f}=\frac{\Delta E\cdot\lambda}{h\cdot c}=\frac{1{,}2\,J\cdot 250\cdot 10^{-9}\,m}{6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}=\underline{1{,}5\cdot 10^{18}}$$

Pro Sekunde ausgelöste Photoelektronen:

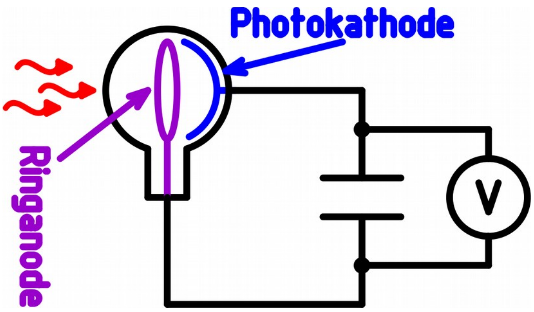
$$N_e=\frac{\Delta Q}{e}=\frac{40\cdot 10^{-3}\,C}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C}=\underline{2{,}5\cdot 10^{17}}$$

Anteil: $\frac{2{,}5\cdot 10^{17}}{1{,}5\cdot 10^{18}}=\underline{0{,}167=16{,}7\,\%}$

c) Zunehmende Bestrahlungsintensität → mehr Photonen → mehr Photoelektronen → höhere Sättigungsstromstärke; Diagramm siehe Bild



Aufgabe 1.9: Photozelle als Spannungsquelle

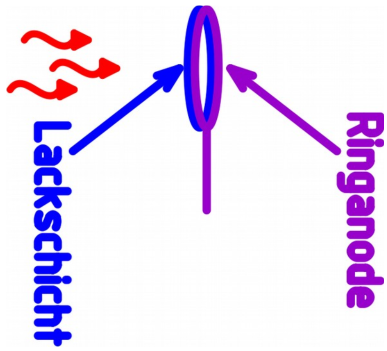


Eine Photozelle kann auch als Spannungsquelle dienen, z.B. um unter definierten Bedingungen ein Spannungsnormal als Vergleichswert zu liefern.

Ausgelöste Photoelektronen treffen auf die Ringanode, wodurch sich die Ringanode negativ und die Photokathode positiv aufladen → zwischen Photokathode und Ringanode entsteht eine Spannung. Sobald diese Spannung eine bestimmte Größe erreicht können keine Elektronen mehr die Ringanode erreichen und die Spannung bleibt konstant. Die Photokathode besteht aus Barium (Auslösearbeit 2,52 eV) und wird mit Licht der Wellenlänge 300 nm bestrahlt.

a) Bestimme die Größe der Spannung, die sich zwischen Photokathode und Ringanode einstellt.

b) Weshalb wird die Ringanode im Versuch auf der Seite des Lichteinfalls durch eine Licht-undurchlässige Lackschicht vor Lichteinfall geschützt.



c) Wie könnte man allein durch die Wahl des Anodenmaterials bei den gegebenen Bedingungen – ohne Lackschicht auf der Anode – verhindern, dass aus der Ringanode Photoelektronen ausgelöst werden.

Lösung:

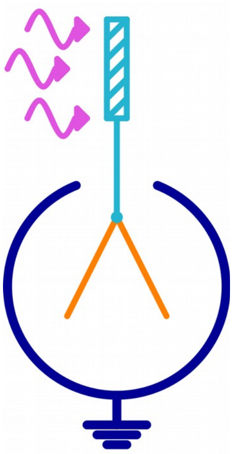
a) $$U \cdot e = E_{kin} = h \cdot f - W_A = h \cdot \frac{c}{\lambda} - W_A = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{300 \cdot 10^{-9}\, m} - 2{,}52\, eV = \underline{1{,}9\, eV}$$

D.h. es stellt sich eine Spannung von 1,9 V ein.

b) Durch Lichteinfall auf die Ringanode könnten Photoelektronen aus der Ringanode ausgelöst werden, so dass sich eine kleinere Spannung – oder evtl. gar keine – zwischen Photokathode und Ringanode aufbaut.

c) Wenn die Auslösearbeit des Anodenmaterials größer ist als die Photonenenergie, können keine Photoelektronen ausgelöst werden. Das Material der Ringanode müsste also eine Auslösearbeit von mehr als 4,14 eV besitzen, z.B. Wolfram oder Platin.

Aufgabe 1.10: Abi 1977; Versuch von Hallwachs



Hallwachs belichtete eine mit einem empfindlichen Goldblatt-Elektroskop verbundene Metallplatte mit UV-Licht. Er beobachtete eine sofort einsetzende Abstoßung der beiden Gold-Blättchen bis zu einer maximalen Auslenkung, die sich auch bei weiterer Bestrahlung mit dem gleichen Licht nicht mehr änderte.

a) Erklären Sie den Versuchsausgang auf den Grundlage der quantenmechanischen Modellvortstellung des Lichts.

b) Was ändert sich am Ablauf des obigen Versuchs und was bleibt gleich, wenn man die Lichtintensität – in „normalen" bzw. „üblichen" Bereichen – variiert?

Im Versuch wird eine Metallplatte aus Kalium (Auslösearbeit 2,25 eV) mit monochromatischem Licht der Wellenlänge 250 nm beleuchtet. Die Kalium-Schicht befindet sich im Vakuum.

c) Zwischen der Kalium-Schicht und dem geerdeten Gehäuse des Goldblatt-Elektroskops baut sich im Versuch eine Spannung auf. Berechne die Größe dieser Spannung. (Kontrolle: 2,7 V)

1.3 Impuls des Photons

Bei Wechselwirkung mit Photonen gelten so wie immer die bekannten Erhaltungssätze, Impuls- und Energieerhaltung.

Aufgabe 1.11:

Ein ruhendes Wasserstoffatom (H1) fällt vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand und emittiert dabei ein Photon der Energie 10,2eV.

a) Bestimme den Impuls des Photons.

b) Bestimme Impuls und Geschwindigkeit des Wasserstoffatoms nach der Emission des Photons (Atommassen siehe Formelsammlung S.51).

c) Die beim Zurückfallen in den Grundzustand freiwerdende Energie teilt sich also auf. Einen Teil der Energie nimmt das Photon mit, den anderen Teil nimmt das Atom als kinetische Energie mit. Bestimme jeweils die prozentualen Anteile der beiden Energien an der insgesamt freiwerdenden Energie.

Lösung:

$$E_{Ph} = h \cdot f \;\rightarrow\; f = \frac{E}{h} \qquad c = \lambda \cdot f \;\rightarrow\; \lambda = \frac{c}{f}$$

a) $$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\frac{c}{f}} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h \cdot \frac{E}{h}}{c} = \frac{E}{c} = \frac{10{,}2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J}{3 \cdot 10^{8} m/s}$$

$$\underline{p_{Ph} = 5{,}44 \cdot 10^{-27} kg \cdot \frac{m}{s}}$$

b)
$$p = p'$$
$$0 = p_{Ph} + p_W$$
$$p_W = -p_{ph} = \underline{-5{,}44 \cdot 10^{-27} kg \cdot \frac{m}{s}}$$

Der Impuls des Wasserstoffatoms muss entgegengesetztes Vorzeichen haben, da sich Photon und Wasserstoffatom in entgegengesetzte Richtungen bewegen.

$$p_W = m \cdot v \;\rightarrow\; v = \frac{p_W}{m} = \frac{-5{,}44 \cdot 10^{-27} kg \cdot m/s}{1{,}008 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} kg} = \underline{-3{,}25 \frac{m}{s}}$$

Die Geschwindigkeit ist extrem klein.

c)
$$E_{Ph} = 10{,}2\, eV = 1{,}6 \cdot 10^{-18} J$$
$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}008 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} kg \cdot \left(-3{,}25 \frac{m}{s}\right)^2 = 8{,}8 \cdot 10^{-27} J$$
$$E_{gesamt} = 1{,}6 \cdot 10^{-18} J + 8{,}8 \cdot 10^{-27} J = 1{,}6 \cdot 10^{-18} J$$

$$\frac{E_{Ph}}{E_{gesamt}} = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-18} J}{16 \cdot 10^{-18} J} = 100\,\%$$

$$\frac{E_{kin}}{E_{gesamt}} = \frac{8{,}8 \cdot 10^{-27} J}{1{,}6 \cdot 10^{-18} J} = 0{,}00000055\,\%$$

Es wird also so gut wie die ganze Energie vom Photon mitgenommen. Bei der Berechnung von Wellenlängen und Energieübergängen können wir die vom Atom als kinetische Energie mitgenommene Energie völlig vernachlässigen.

Aufgabe 1.12:

Ein ruhendes Quecksilberatom (Hg201) wird von einem Photon der Energie 4,9eV aus dem Grundzustand in einen energetisch höheren Zustand angeregt.

a) Bestimme den Impuls des Photons.

b) Bestimme Impuls, Geschwindigkeit und kinetische Energie des Quecksilberatoms nach der Anregung.

Lösung:

$$c=\lambda\cdot f \quad \rightarrow \lambda=\frac{c}{f} \qquad E_{Ph}=h\cdot f \quad \rightarrow \quad f=\frac{E_{Ph}}{h}$$

a)

$$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{\frac{c}{f}}=\frac{h\cdot f}{c}=\frac{h\cdot\frac{E_{ph}}{h}}{c}=\frac{E_{Ph}}{c}=\frac{4{,}9\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}{3\cdot 10^{8}\,m/s}=\underline{2{,}6\cdot 10^{-27}\,kg\cdot\frac{m}{s}}$$

b)

$$p=p'$$
$$p_{Ph}=p'_{Hg}$$
$$\underline{p'_{Hg}=2{,}6\cdot 10^{-27}\,kg\cdot\frac{m}{s}}$$

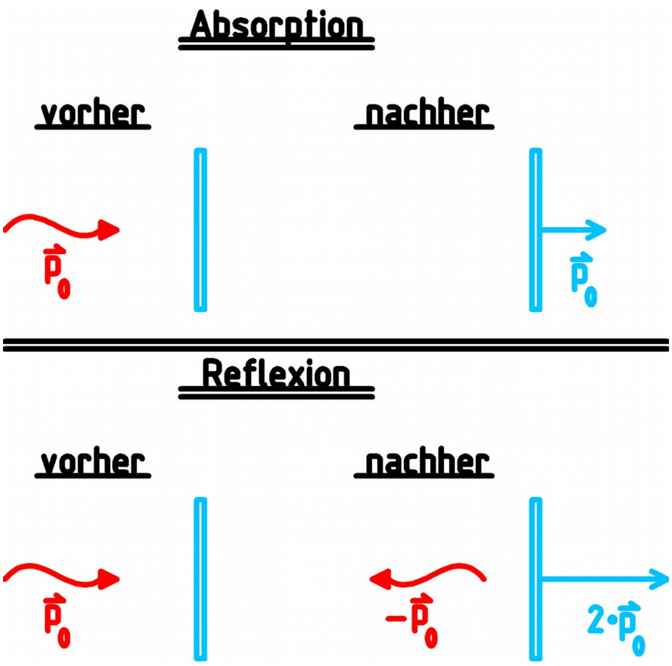
$$p_{Hg}=m\cdot v \quad \rightarrow \quad v=\frac{p_{Hg}}{m}=\frac{2{,}6\cdot 10^{-27}\,kg\cdot m/s}{200{,}97\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{0{,}0080\,\frac{m}{s}}$$

$$E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=\frac{1}{2}\cdot 200{,}97\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg\cdot\left(0{,}008\,\frac{m}{s}\right)^2=\underline{1{,}07\cdot 10^{-29}\,J=6{,}6\cdot 10^{-11}\,eV}$$

Impulsübertrag bei Reflexion und Absorption:

Wird eine Photon von einer Platte absorbiert (z.B. schwarze Platte) existiert das Photon nach dem Stoß nicht mehr und der gesamte Impuls wird auf die Platte übertragen.

$$p=p'$$
$$p_{Ph}=p'_{Platte}$$



Wenn das Photon reflektiert wird ist sein Impuls nachher genau so groß wie vorher, nur dass der Impuls jetzt negatives Vorzeichen hat (andere Richtung). Deshalb wird auf die Platte der doppelte Impuls des Photons übertragen.

$$p=p'$$
$$p_{Ph}=p'_{Ph}+p'_{Platte}$$
$$p_{Ph}=-p_{Ph}+p'_{Platte}$$
$$p'_{Platte}=2\cdot p_{Ph}$$

Aufgabe 1.13:

Auf eine Platte der Masse 10g fällt eine Lichtleistung von 5,0W ein. Wir gehen von senkrechtem Lichteinfall aus.

a) Bestimme den gesamten Impuls aller Photonen, die innerhalb einer Sekunde auf die Platte treffen.

b) Bestimme für den Fall, dass alle Photonen absorbiert werden, den Impulsübertrag auf die Platte innerhalb einer Sekunde und die Geschwindigkeit der Platte nach einer Sekunde. Bestimme mit diesen Werten die mittlere Beschleunigung und damit die Größe der durch die Beleuchtung auf die Platte wirkenden Kraft.

c) Wie b) für den Fall vollständiger Reflexion.

Lösung:

a)

Gesamtenergie aller Photonen in 1s : $E = P \cdot t$

Impuls eines Photons : $p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{E_{Ph}}{c}$

Gesamtimpuls aller Photonen:

$$p_{ges} = \frac{E}{c} = \frac{P \cdot t}{c} = \frac{5\,W \cdot 1\,s}{3 \cdot 10^8\,m/s} = \underline{1{,}67 \cdot 10^{-8}\,kg \cdot \frac{m}{s}}$$

b)

$$p'_{Platte} = 1{,}67 \cdot 10^{-8}\,kg \cdot \frac{m}{s}$$

$$p = m \cdot v \quad \rightarrow \quad v = \frac{p}{m} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-8}\,kg \cdot m/s}{0{,}01\,kg} = \underline{1{,}67 \cdot 10^{-6}\,\frac{m}{s}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-6}\,m/s}{1\,s} = \underline{1{,}67 \cdot 10^{-6}\,\frac{m}{s^2}}$$

$$F = m \cdot a = 0{,}01\,kg \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-6}\,\frac{m}{s^2} = \underline{1{,}67 \cdot 10^{-8}\,N = 16{,}7\,nN}$$

c)

$$p'_{Platte} = 2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-8}\,kg \cdot \frac{m}{s} = 3{,}34 \cdot 10^{-8}\,kg \cdot \frac{m}{s}$$

$$p = m \cdot v \quad \rightarrow \quad v = \frac{p}{m} = \frac{3{,}34 \cdot 10^{-8}\,kg \cdot m/s}{0{,}01\,kg} = \underline{3{,}34 \cdot 10^{-6}\,\frac{m}{s}}$$

$$p'_{Platte} = 2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-8}\, kg \cdot \frac{m}{s} = 3{,}34 \cdot 10^{-8}\, kg \cdot \frac{m}{s}$$

$$p = m \cdot v \;\rightarrow\; v = \frac{p}{m} = \frac{3{,}34 \cdot 10^{-8}\, kg \cdot m/s}{0{,}01\, kg} = \underline{3{,}34 \cdot 10^{-6}\, \frac{m}{s}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3{,}34 \cdot 10^{-6}\, m/s}{1\, s} = \underline{3{,}34 \cdot 10^{-6}\, \frac{m}{s^2}}$$

$$F = m \cdot a = 0{,}01\, kg \cdot 3{,}34 \cdot 10^{-6}\, \frac{m}{s^2} = \underline{3{,}34 \cdot 10^{-8}\, N = 33{,}4\, nN}$$

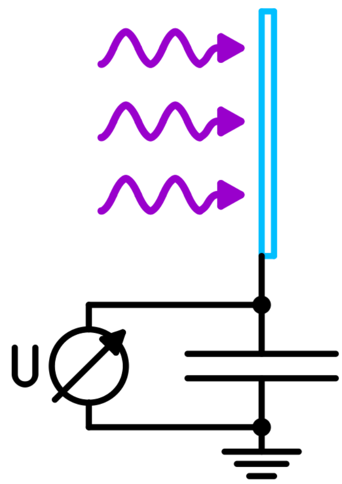
Die wirkenden Kräfte sind sehr klein. Die Lichtmühlen, die Sie vielleicht als physikalisches Spielzeug kennen, funktionieren nicht nach diesem Prinzip. Dafür sind die Kräfte viel zu klein.

1.4 Abi mit Lösung

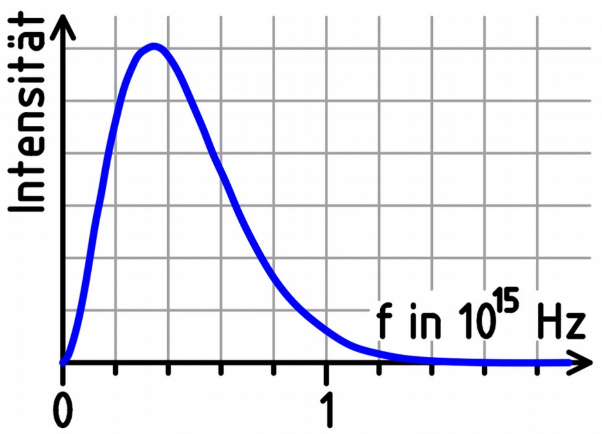
Aufgabe 1.14: Abi 2009, Elektrostatische Aufladung von Satelliten

Seit dem Jahr 2000 umkreisen vier so genannte CLUSTER-Satelliten die Erde und messen u.a. die Ionen- und die Elektronendichte des Weltraumplasmas. Bei diesen Messungen stört die elektrostatische Aufladung des Satelliten durch das Sonnenlicht.

a) Bei einem Laborversuch wird ein zunächst ungeladenes Stück der Satelliten-Außenhaut unter Weltraumbedingungen mit UV-Licht der Wellenlänge 200 nm bestrahlt. Dabei lädt sich der Kondensator in der nebenstehend skizzierten Versuchsanordnung auf eine Spannung von 1,1 V auf. Mit welchen Vorzeichen laden sich die beiden Platten auf? Begründung! Berechnen Sie die Austrittsarbeit der Satelliten-Außenhaut.



(Kontrolle: Austrittsarbeit 5,1 eV)



b) Das von der Sonne abgestrahlte Licht besitzt näherungsweise die nebenstehende Frequenz-Verteilung. Begründen Sie mit Hilfe des Diagramms, dass nur ein sehr kleiner Teil der Strahlungsintensität zur Ablösung von Photoelektronen beiträgt.

c) Gehen Sie im Folgenden davon aus, dass die für den Photoeffekt relevanten Photonen eine einheitliche Wellenlänge von 200 nm besitzen und dass 1,0% der solaren Bestrahlungsstärke ($S = 1{,}36\ \mathrm{kW/m^2}$) auf diese Photonen zurückzuführen ist. Wie viele dieser Photonen treffen pro Sekunde auf 4,0 m^2 der Satellitenfläche, die senkrecht zur Bestrahlungsrichtung orientiert sein soll?

(Kontrolle: $N_{Ph} = 5{,}5 \cdot 10^{19}$)

d) Nur eines von $1{,}6 \cdot 10^5$ Photonen aus Teilaufgabe 1d löst aus der Satellitenoberfläche ein Photoelektron aus. Berechnen Sie die daraus resultierende Photo-Stromstärke, die hier als konstant angenommen wird.

Lösung:

a) Da Elektronen ausgelöst werden, wird die obere Platte positiv, die Untere negativ.

$$U\cdot e+W_A=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda}\ \rightarrow\ W_A=h\cdot\frac{c}{\lambda}-U\cdot e=4{,}14\cdot10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot10^{8}\,m/s}{200\cdot10^{-9}\,m}-1{,}1\,V\cdot e=\underline{\underline{5{,}11\,eV}}$$

b) $$h\cdot f_G=W_A\ \rightarrow\ f_G=\frac{W_A}{h}=\frac{5{,}11\,eV}{4{,}14\cdot10^{-15}\,eVs}=\underline{\underline{1{,}23\cdot10^{15}\,Hz}}$$

Nur der winzig kleine Teil der Photonen über $1{,}2\cdot10^{15}\,Hz$ kann Elektronen auslösen. In dem Bereich ist die Intensitätskurve schon fast auf der f-Achse.

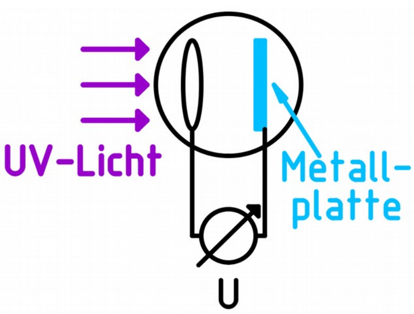
c) $$0{,}01\cdot\Delta E=N\cdot h\cdot f$$
$$N\cdot h\cdot\frac{c}{\lambda}\ \rightarrow\ N=\frac{0{,}01\cdot\Delta E\cdot\lambda}{h\cdot c}=\frac{0{,}01\cdot1{,}36\cdot10^{3}\,J\cdot4\cdot200\cdot10^{-9}\,m}{6{,}63\cdot10^{-34}\,Js\cdot3\cdot10^{8}\,m/s}=\underline{\underline{5{,}47\cdot10^{19}}}$$

d) $$I=\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{1{,}6\cdot10^{5}}\cdot N\cdot e}{1\,s}=\frac{5{,}47\cdot10^{19}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,C}{1{,}6\cdot10^{5}\cdot1\,s}=\underline{\underline{54{,}7\,\mu A}}$$

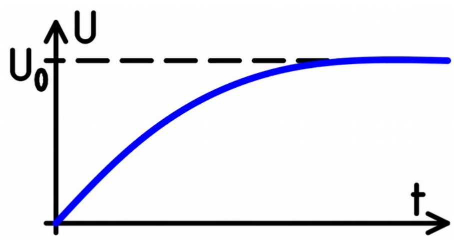
Aufgabe 1.15: Abi 2004; Photoeffekt; gekürzt

1888 bestrahlte W. Hallwachs eine geladene, auf einem Elektroskop sitzende Metallplatte mit UV-Licht. Die Ladung des Elektroskops worde dabei durch eine einfache Zeigermechanik nachgewiesen.

a) Beschreiben Sie Versuche und deren Ausgänge, woraus sich folgern lässt, dass bei Lichteinstrahlung nur negative Ladungsträger aus Metallen austreten. Dabei könne Sie die Metallplatte gezielt negativ oder positiv aufladen.



Bei der skizzierten Vakuumphotozelle zeigt das extrem hochohmige Voltmeter nach dem Einschalten der Beleuchtung die im Diagramm dargestellte zeitlich abhängige Spannung.



b) Erklären Sie, wie der dargestellte Spannungsverlauf zustande kommt.

c) Wie verändern sich U_0 und die Anfangssteigung der t-U-Kurve, wenn man im Versuch bei gleich bleibender Wellenlänge die Intensität der Bestrahlung erhöht? Begründen Sie kurz ihre Antwort.

d) Berechnen Sie U_0 für eine Kupferplatte (Austrittsarbeit 4,84 eV), die mit momochromatischem UV-Licht der Wellenlänge λ = 40,0 nm bestrahlt wird.

Lösung:

a) Bei Bestrahlung des negativ aufgeladenen Elektroskops muss sich das Elektroskop entladen, bei Bestrahlung des positiv aufgeladenen Elektroskops darf sich das Elektroskop nicht entladen.

b) Elektronen werden aus der Metallplatte ausgelöst und treffen auf die Ringanode. Dadurch lädt sich die Ringanode negativ und die Metallplatte positiv auf. Es entsteht ein elektrisches Feld zwischen den beiden - welches die Elektronen abbremst - und damit eine Spannung. Zu Anfang werden viele Elektronen ausgelöst und diese Spannung und auch die Feldstärke zwischen Metallplatte und Ringanode steigen schnell an.

Bei ansteigender Feldstärke wird es für die Elektronen immer schwieriger die Ringanode zu erreichen, dies geschieht dann mit weniger Elektronen und die Spannung stigt immer langsamer an. Schließlich sind Feldstärke und Spannung so groß, dass die kinetische Energie der Photoelektronen - welche durch die Energie der Photonen begrenzt ist - nicht mehr ausreicht die Ringanode zu erreichen. Außerdem ist die Auslösearbeit der positiv geladenen Metallplatte größer als die der neutralen Metallplatte, weil diese eine zusätzliche Anziehung auf die Elektronen ausübt. Die gestiegene Auslösearbeit wird schließlich auch so groß, dass die Photonenenergie nicht mehr ausreicht ein Elektron auszulösen.

c) Höhere Intensität -> mehr Photonen -> mehr Photoelektronen -> Kurve steigt zu Anfang schneller an

Photonenenergie bleibt gleich -> Grenzspannung bleibt auch gleich

d) $$U\cdot e = h\cdot f - W_A = h\cdot\frac{c}{\lambda} - W_A = 4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot 10^{8}\,m/s}{40\cdot 10^{-9}\,m} - 4{,}84\,eV = \underline{26{,}2\,eV}$$

Aufgabe 1.16: Abi 1998; Photonenimpuls

Eine Platte der Fläche A = 4,0 cm² wird von einer praktisch punktförmigen Lichtquelle bestrahlt, die Licht der Wellenlänge λ = 0,59 µm emittiert und die sich im Abstand a = 1,0 m vor der Platte befindet. Die isotrop in den Raum abgestrahlte Leistung beträgt P = 20 W. Es darf angenommen werden, dass die Lichtstrahlen senkrecht auf die Platte auftreffen, wobei 80% der auftreffenden Strahlung reflektiert und 20% absorbiert werden.

a) Wie viele Photonen treffen pro Sekunde auf die Platte?

(Kontrolle: $N=1{,}9\cdot 10^{15}$)

b) Wie groß ist der vom Licht pro Sekunde auf die Platte übertragene Impuls?

c) Begründen Sie ohne erneute Rechnung, in welchem Maße sich die ausgeübte Kraft ändert, wenn das Absorptionsverhalten der Platte und die Leistung der Lichtquelle gleich bleiben, aber

i) der Abstand a von 1,0m auf 3,0m erhöht wird bzw.

ii) die Wellenlänge des verwendeten Lichts halbiert wird.

Lösung:

a) Alle Photonen aus der Lichtquelle pro Sekunde

$$\Delta E=N_{ges}\cdot h\cdot f=N_{ges}\cdot h\cdot\frac{c}{\lambda}\ \rightarrow\ N_{ges}=\frac{\Delta E\cdot\lambda}{h\cdot c}$$

Photonen, welche die Platte treffen

$$\frac{N_P}{N_{ges}}=\frac{A_P}{A_{ges}}\ \rightarrow\ N_P=\frac{A_P\cdot N_{ges}}{A_{ges}}=\frac{4\cdot 10^{-4}m^2\cdot 20\,J\cdot 5{,}9\cdot 10^{-7}m}{4\cdot\pi\cdot 1\,m^2\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}Js\cdot 3\cdot 10^8 m/s}=\underline{\underline{1{,}89\cdot 10^{15}}}$$

b) Die reflektierten Photonen übertragen ihren doppelten Impuls, die absorbierten ihren Einfachen.

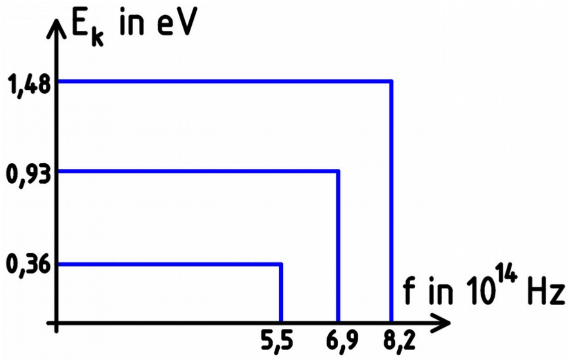
$$\Delta p=0{,}8\cdot 2\cdot N_P\cdot\frac{h}{\lambda}+0{,}2\cdot N_P\cdot\frac{h}{\lambda}=1{,}8\cdot 1{,}89\cdot 10^{15}\cdot\frac{6{,}63\cdot 10^{-34}Js}{5{,}9\cdot 10^{-7}m}=\underline{\underline{3{,}8\cdot 10^{-12}kg\cdot\frac{m}{s}}}$$

c) zwei Teile

i) Bei dreifachem Abstand wird die Gesamtfläche 9-mal so groß, deshalb treffen nur noch ein neutel so viele Photonen auf die Platte und der übertragene Impuls sinkt auf ein neuntel des vorherigen Werts.

ii) Halbe Wellenlänge -> doppelte Frequenz, bei gleicher Gesamtenergie -> halb so viele Photonen mit doppelt so großem Impuls -> übertragener Impuls bleibt gleich

Aufgabe 1.17: Abi 1998



Zur Untersuchung des Photoeffekts wird an einer Vakuum-Photozelle eine Messreihe aufgenommen und graphisch dargestellt (siehe Abb.). Dabei ist f die Frequenz des monochromatischen Lichts und Ek die maximale kinetische Energie der Photoelektronen.

a) Skizzieren Sie einen geeigneten Versuchsaufbau und beschreiben Sie kurz die Durchführung der Messung.

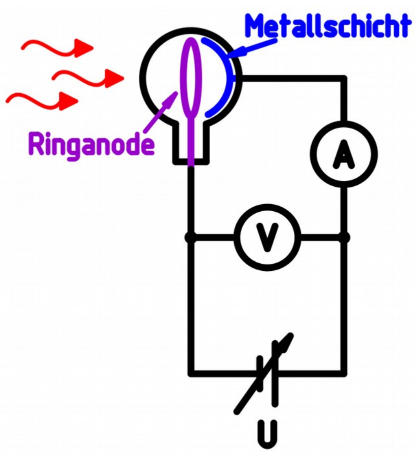
b) Interpretieren Sie das Versuchsergebnis auf der Grundlage des Photonenmodells.

c) Übertragen Sie die Graphik unter Wahl eines geeigneten Maßstabs auf ihr Lösungsblatt und ermitteln Sie dann graphisch die Werte der beiden für das Kathodenmaterial der Photozelle charakteristischen Größen.

d) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit der Elektronen, die von Photonen der Frequenz $f = 6{,}9 \cdot 10^{14}\,Hz$ ausgelöst werden.

e) Nun wird mit einer Photozelle gearbeitet, deren Kathodenmaterial die Leitungselektronen stärker bindet; tragen Sie in die Abbildung von Teilaufgabe c) einen Graphen ein, der zu dieser Messreihe gehören kann, und begründen Sie ihre Zeichnung.

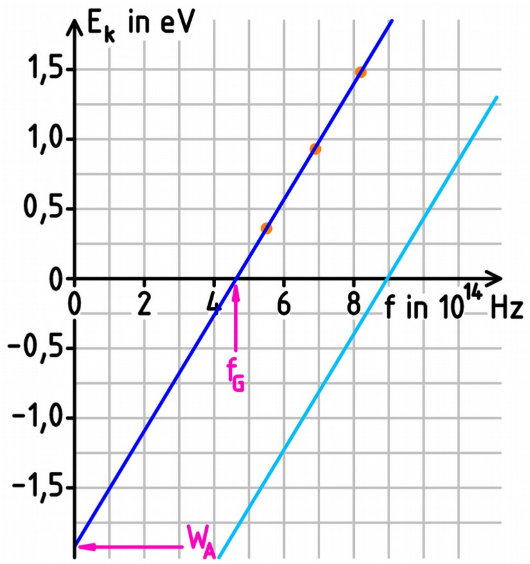
Lösung:



a) Die evakuierte Vakuum-Photozelle links oben wird mit monochromatischem Licht - bekannter Wellenlänge und Frequenz - bestrahlt, was dazu führt, dass am Amperemeter ein Photostrom gemessen wird. Anschließend wird die Gegenspannung so lange hochgeregelt, bis der Photostrom zum erliegen kommt. Die entsprechende Gegenspannung wird am Voltmeter abgelesen und gibt mit e multipliziert die maximale kinetische Energie der Photoelektronen.

b) Je größer die Frequenz des Lichts, desto größer ist die von einem Photon übertragene Energie h·f. Die Photonenenergie abzüglich der

Auslösearbeit - die bei dieser Photozelle einen konstanten minimalen Wert WA hat - ergibt die kinetische Energie der Photoelektronen. Deshalb steigt die maximale Energie der Photoelektronen mit steigender Frequenz des Lichts jeweils um h·Δf.



c) Grenzfrequenz und Auslösearbeit durch ablesen:

$$f_G \approx 4{,}6 \cdot 10^{14}\,Hz$$
$$W_A \approx 1{,}9\,eV$$

d)

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{kin} = h \cdot f - W_A$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (h \cdot f - W_A)}{m}}$$

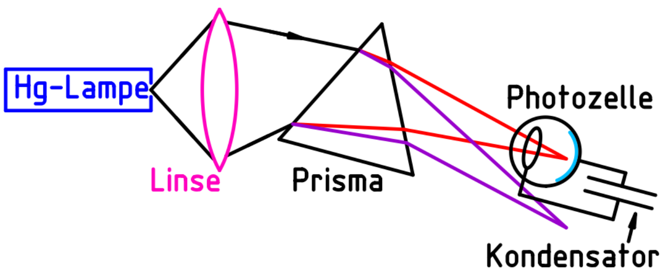
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 6{,}9 \cdot 10^{14}\,Hz - 1{,}9 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J)}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg}}$$

$$\underline{\underline{v = 5{,}8 \cdot 10^5\,m/s}}$$

e) Der Graph muss auf alle Fälle parallel zum ersten sein, weil die Steigung h ist. Die Auslösearbeit muss größer sein, also muss der Graph weiter unten verlaufen (siehe Bild).

Aufgabe 1.18: Abi 1999

Mit einem Glasprisma wird das Licht einer Quecksilberdampflampe spektral zerlegt. Durch das Spektrum wird eine Vakuumfotozelle bewegt, die mit einem Kondensator verbunden ist (siehe Abbildung).



a) Fällt das Licht einer Quecksilberspektrallinie auf die Fotozelle, so wird der Kondensator auf eine bestimmte Spannung aufgeladen. Erklären Sie ausführlich das Zustandekommen der Spannung.

Die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials der Fotozelle beträgt 1,68 eV. Bei einer Spektrallinie des Quecksilberlihts im sichtbaren Bereich wird am Kondensator die Spannung U = 1165 mV gemessen.

b) Berechnen Sie die entsprechende Wellenlänge λ.

c) Berechnen Sie die größte Wellenlänge die mit dieser Fotozelle messbar ist. Welche Farbe hat dieses Licht?

d) Beschreiben Sie, wie mit Hilfe eines optischen Gitters nicht-monochromatisches Licht spektral zerlegt und die Wellenlänge einer Spektrallinie ohne Fotozelle gemessen werden kann. Ergänzen Sie Ihre Ausführungen durch eine beschriftete Skizze des Versuchsaufbaus und geben Sie die für die Wellenlängenbestimmung erforderlichen Beziehungen an.

Lösung:

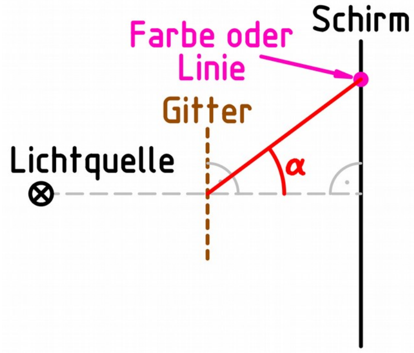
a) Wenn Photonen mit ausreichender Energie auf die Photokathode fallen werden Elektronen ausgelöst, wodurch die obere Kondensatorplatte positiv aufgeladen wird. Diese Elektronen können auf die Ringanode treffen und so die untere Platte negativ aufladen. Durch das positive Aufladen der Photokathode steigt deren Auslösearbeit. Außerdem entsteht zwischen Photokathode und Ringanode durch den Ladungstransport eine Spannung also ein elektrisches Feld, welches die Photoelektronen auf dem Weg zur Ringanode überwinden müssen. Da im monochromatischen Licht einer Spektrallinie die Photonen alle dieselbe Energie $h \cdot f$ besitzen, haben auch die Photoelektronen eine maximale kinetische Energie und können die Ringanode wegen des Gegenfeldes irgendwann nicht mehr erreichen, bzw. können die Photonen irgendwann gar keine Elektronen mehr aus der positiv geladenen Photokathode auslösen und der Ladungstransport ist beendet. An diesem Punkt ist die maximale Ladung des Kondensators also die erwähnte bestimmte Spannung erreicht.

b) $$h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = W_A + E_{kin} = W_A + U \cdot e \;\rightarrow\; \lambda = \frac{h \cdot c}{W_A + U \cdot e} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\,m/s}{1{,}68\,eV + 1{,}165\,V \cdot e} = \underline{\underline{437\,nm}}$$

c) $$h \cdot f_G = h \cdot \frac{c}{\lambda_G} = W_A \;\rightarrow\; \lambda_G = \frac{h \cdot c}{W_A} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\,m/s}{1{,}68\,eV} = \underline{\underline{739\,nm}}$$

Das Licht ist fast am Ende des Spektrums (780 nm) also rotes Licht.

d) Man schickt das zu zerlegende Licht durch ein Gitter hinter dem sich ein Schirm befindet. In Abhängigkeit von der Wellenlänge kommt es auf dem Schirm zu Interferenzmaxima der einzelnen Spektrallinien (Farbe oder Linie). Gemessen wird der Winkel α und die Ordnung des Maximums, z.B. 1. Ordnung. Damit lässt sich die Wellenlänge der entsprechenden Linie bestimmen.



$$\Delta s = 1 \cdot \lambda = d \cdot \sin\alpha$$

Aufgabe 1.19: Abi 2000

Aus dem kontinuierlichen Spektrum einer Kohlebogenlampe wird Licht der Wellenlänge λ ausgefiltert. Dies trifft auf die Cäsium-Kathode einer Vakuumphotozelle und löst Elektronen aus. Die maximale kinetische Energie der PHotoelektronen soll mit Hilfe einer geeigneten Messanordnung bestimmt werden.

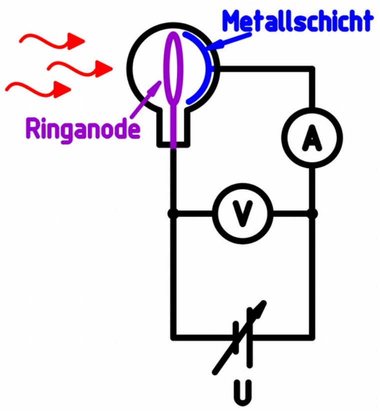
a) Erstellen Sie eine Schaltskizze und erläutern Sie kurz das Messverfahren.

Das Messergebnis liefert für die Elektronen eine maximale kinetische Energie von 0,33 eV.

b) Bestimmen Sie die Wellenlänge λ.

c) Kann der Abstand der Lichtquelle von der Photozelle so gewählt werden, dass die kinetische Energie eines Photoelektrons auf die Hälfte sinkt? Begründen Sie ihre Antwort.

Lösung:



a) Mit dem Amperemeter rechts wird der Photostrom gemessen. Anschließend wird die Spannung (unten) solange hoch geregelt, bis der Photostrom zum erliegen kommt. An diesem Punkt wandeln die Photoelektronen auf dem Weg zur Ringanode - im Gegenfeld - ihre ganze kinetische Energie in elektrische Energie um, dann gilt:

$$E_{kin,max} = U \cdot e$$

b) Ohne Angabe der Auslösearbeit geht das nur, wenn die Auslösearbeit von Cäsium (1,94 eV) in ihrer Formelsammlung steht.

$$h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = W_A + E_{max} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{W_A + E_{max}} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}{1{,}94\, eV + 0{,}33\, eV} = \underline{\underline{547\, nm}}$$

c) Die maximale kinetische Energie der Photoelektronen ist nur Abhängig von der Energie der Photonen h·f, also von der Wellenlänge des Lichts. Der Abstand der Lichtquelle hat keinen Einfluss auf die Wellenlänge, sondern nur auf die Intensität (Anzahl der Photonen), deshalb hat der Abstand auch keinen Einfluss auf die kinetische Energie der Photoelektronen.

Aufgabe 1.20: Abi 2001

Mikroskopisch kleine Kupferpartikel werden zwischen die horizontal gelagerten Platten eines Kondensators (Plattenabstand d) eingebracht und mit hinreichend kurzwelligem UV-Licht bestrahlt. Durch geeignete Einstellung der Kondensatorspannung U können einzelne Teilchen zum Schweben gebracht werden.

a) Warum führt die Bestrahlung mit UV-Licht zu einer Aufladung der Kupferpartikel, nicht jedoch die Bestrahlung mit rotem Licht? Argumentieren Sie mit Energiebetrachtungen.

b) Erläutern Sie, wie es zu einem Schwebezustand einzelner Partikel kommen kann. Warum lässt sich dieser Schwebezustand nur bei einer bestimmten Polung des Kondensators beobachten?

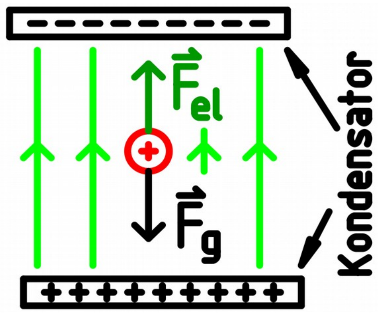
Im Folgenden soll ein Teilchen der Masse m = 3,2 pg in einem Kondensator mit Plattenabstand d = 3,85 mm betrachtet werden. Schon nach kurzer Beleuchtung mit UV-Strahlung der Wellenlänge λ = 240 nm tritt der Schwebezustand bei U1 = 750 V ein. Wird die UV-Beleuchtung jetzt unterbrochen, bleibt der Schwebezustand des Kupferpartikels längere Zeit erhalten.

c) Zeigen Sie, dass die Ladung Q1 des Teilchens eine Elementarladung ist.

d) Setzt nun die UV-Bestrahlung des Metallteilchens wieder ein, wird der Gleichgewichtszustand bald wieder gestört, lässt sich aber durch entsprechende Veränderung der Kondensatorspannung auf U2 von Neuem einstellen. Dieses Vorgehen wird mehrfach wiederholt (U3, ...). Bestimmen Sie die Spannungen U2 und U3. Begründen Sie ihre Angaben.

Lösung:

a) Die Energie der einzelnen Photonen $h \cdot f$ ist Abhängig von ihrer Frequenz also von der Wellenlänge des Lichts. UV-Licht hat eine wesentlich kürzere Wellenlänge als rotes Licht, also haben die Photonen im UV-Licht eine wesentlich höhere Energie, und nur wenn die Photonenenergie größer als die Auslösearbeit bei Kupfer ist, können die Photonen Elektronen aus dem Kupfer auslösen und die Kupferpartikel so positiv aufladen. Die Photonen im UV-Licht haben hierfür genug Energie, die Photonen im roten Licht nicht.



b) Im geladenen Kondensator herrscht ein elektrisches Feld, das eine Kraft auf die geladenen Kupferpartikel ausübt. Wenn die elektrische Kraft genauso groß ist wie die Gewichtskraft auf die Kupferpartikel herrscht ein Kräftegleichgewicht und das Kupferpartikel schwebt.

Da durch Auslösen von Photoelektronen die Kupferpartikel ausschließlich positiv aufgeladen werden - und nie negativ - kann ein Schwebezustand nur erreicht werden, wenn die obere Platte negativ und die untere Platte positiv geladen ist.

c)
$$F_{el}=F_g \rightarrow m\cdot g=E\cdot q=\frac{U}{d}\cdot q \rightarrow q=\frac{m\cdot g\cdot d}{U}$$
$$q=\frac{3{,}2\cdot 10^{-15}kg\cdot 9{,}81\,m/s^2\cdot 3{,}85\cdot 10^{-3}m}{750\,V}=\underline{1{,}61\cdot 10^{-19}C\approx 1\cdot e}$$

d) Durch Auslösen zusätzlicher Photoelektronen steigt die Ladung des Kupferpartikels schließlich auf 2·e und dann auf 3·e, die Ladung verdoppelt sich - bzw. verdreifacht sich - also. Damit die elektrische Kraft F = E·q gleich groß bleibt muss die elektrische Feldstärke - und damit wegen E = U/d auch die Spannung - auf die Hälfte - bzw. auf ein Drittel - des vorherigen Wertes sinken. Die Gesuchten Spannungen sind deshalb: U2 = 375 V und U3 = 250 V.

<u>Aufgabe 1.21: Abi 2002; Lichtelektrischer Effekt</u>

a) Erklären Sie, auf welche Weise sich zwischen Kathode und Anode einer Vakuum-Fotozelle, deren Kathode mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda \leqslant \lambda_G$ bestrahlt wird, eine bestimmte Spannung U aufbaut. Gehen Sie dabei auch auf die Bedeutung der Grenzwellenlänge ein.

Im Folgenden wird mit einer Vakuum-Fotozelle mit einer Grenzwellenlänge von 551 nm gearbeitet.

b) Berechnen Sie die Austrittsarbeit W der Kathode. (Kontrolle: W = 2,25 eV)

Die Fotozelle befinde sich an Bord eines Satelliten außerhalb der Erdatmosphäre und werde mit Sonnenlicht bestrahlt, das vorher ein Quarzprisma durchlaufen hat. Quarz ist im UV-Bereich nur für $\lambda \geq 250$ nm durchlässig.

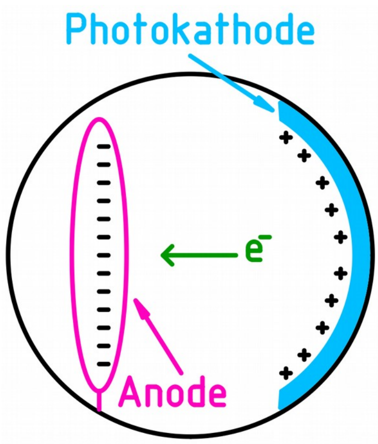
c) Erklären Sie, weshalb unter diesen Bedingungen die Spannung an der Fotozelle einen gewissen Höchstwert Umax nicht überschreitet.

Die Fotozelle soll dazu dienen, bei Bedarf ein Spannungsnormal reproduzieren zu können. Zu diesem Zweck wird die Anordnung so eingestellt, dass die Zelle nur mit Licht der Wellenlänge 382 nm bestrahlt wird.

d) Berechnen Sie die zu dieser Wellenlänge gehörende Fotospannung UL.

e) Wie wirkt es sich auf die Fotospannung UL aus, wenn die Intensität des auf die Fotokathode treffenden Lichts der Wellenlänge von oben (382 nm) Schwankungen unterliegt? Begründen Sie ihre Antwort.

<u>Lösung:</u>



a) Wenn Photonen mit ausreichender Energie auf die Photokathode fallen werden Elektronen ausgelöst, wodurch die Kathode positiv aufgeladen wird. Diese Elektronen können auf die Ringanode treffen und diese negativ aufladen. Durch das positive Aufladen der Photokathode steigt deren Auslösearbeit. Außerdem entsteht zwischen Photokathode und Ringanode durch den Ladungstransport ein elektrisches Feld, welches die Photoelektronen auf dem Weg zur Anode überwinden müssen. Da im monochromatischen Licht die Photonen alle dieselbe Energie $h \cdot f$ besitzen, haben auch die Photoelektronen eine maximale kinetische Energie und können die Ringanode wegen des Gegenfeldes irgendwann nicht mehr erreichen, bzw. können die Photonen irgendwann gar keine Elektronen mehr aus der positiv geladenen Photokathode auslösen und der Ladungstransport ist beendet. An diesem Punkt ist die maximale Ladung von Kathode und Anode, also die erwähnte bestimmte Spannung erreicht.

All das passiert aber nur, wenn die Photonenenergie $h \cdot f$ größer als die Auslösearbeit des Kathodenmaterials ist, weil ansonsten gar keine Elektronen ausgelöst werden. Man benötigt also Licht, welches mindestens eine bestimmte Frequenz, also höchstens eine bestimmte Wellenlänge (Grenzwellenlänge) besitzt.

b) $$W_A = h \cdot f_G = h \cdot \frac{c}{\lambda_G} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{551 \cdot 10^{-9}\, m} = \underline{\underline{2{,}25\, eV}}$$

c) Die Photonen haben eine minimale Wellenlänge (250 nm), also eine maximale Frequenz und damit eine maximale Energie. Deshalb haben auch die Photoelektronen eine maximale kinetische Energie. Genauso wie in a) stellt sich deshalb ein bestimmte - also eine maximale - Spannung ein.

d) $U\cdot e = h\cdot f - W_A = h\cdot\frac{c}{\lambda} - W_A = 4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{382\cdot 10^{-9}\,m} - 2{,}25\,eV = \underline{1{,}0\,V}$

e) Die Photonenenergie h·f - und damit auch die maximale kinetische Energie der Photoelektronen, also auch die Grenzspannung - ist nur abhängig von der Frequenz, also von der Wellenlänge des Lichts. Auf die maximale Spannung hat die Intensität deshalb gar keinen Einfluss.

Die Intensität wirkt sich nur auf die Anzahl der Photonen aus. Deshalb kann es höchstens passieren, dass bei zu geringer Intensität durch Fehlerströme die Photozelle ihre Ladung und damit ihre Spannung nicht halten kann, weil die Photoelektronen zu wenige sind um die Fehlerströme auszugleichen.

Aufgabe 1.22: Abi 2003; Photoeffekt

Man bestrahlt die Photokathode einer Vakuumphotozelle nacheinander mit drei ausgewählten Linien des Heliumspektrums (siehe Tabelle unten).

a) Erläutern Sie anhand einer Skizze, wie man mit einem geeigneten Versuch die maximale kinetische Energie von Photoelektronen bestimmen kann.

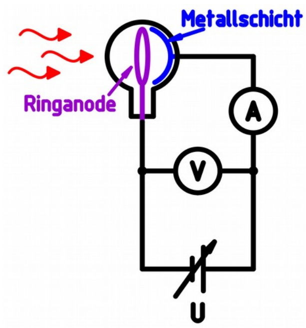
In der Tabelle ist der Zusammenhang zwischen Wellenlänge bzw. Frequenz des eingestrahlten Lichts und der gemessenen maximalen kinetischen Energie der Photoelektronen angegeben.

λ in nm	668	492	403
f in $10^{14}\,Hz$	4,5	6,1	7,5
$E_{k,max}$ in eV	0,81	1,48	2,03

b) Tragen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die maximale kinetische Energie der Photoelektronen über der Frequenz f auf. Bestimmen Sie die Steigung und Achsenabschnitt der Geraden und interpretieren Sie diese Werte physikalisch.

c) Zeigen Sie, dass sich die untersuchte Photozelle zum Nachweis eines Teils des infraroten Spektralbereichs eignet.

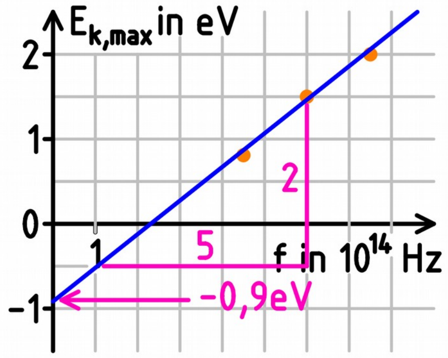
Lösung:



a) Mit dem Amperemeter rechts wird der Photostrom gemessen. Anschließend wird die Spannung (unten) solange hoch geregelt, bis der Photostrom zum erliegen kommt. An diesem Punkt wandeln die Photoelektronen auf dem Weg zur Ringanode - im Gegenfeld - ihre ganze kinetische Energie in elektrische Energie um, dann gilt:

$E_{kin,max}=U\cdot e$

b) Steigung -> h (Plancksche Konstante):



$$h\approx\frac{\Delta E_k}{\Delta f}=\frac{2\,eV}{5\cdot 10^{-14}\,Hz}=\underline{\underline{4\cdot 10^{-15}\,eVs}}$$

Achsenabschnitt -> Auslösearbeit:

$$\underline{\underline{W_A\approx 0{,}9\,eV}}$$

c) Grenzwellenlänge:

$$h\cdot f_G=h\cdot\frac{c}{\lambda_G}=W_A \;\rightarrow\; \lambda_G=\frac{h\cdot c}{W_A}$$

$$\lambda_G=\frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{0{,}9\,eV}=\underline{1380\,nm}$$

Infrarot beginnt bei ca. 780 nm und die Grenzwellenlänge liegt darüber, also geht's.

Aufgabe 1.23: Abi 2004; Photoeffekt

Der geplante Teilchenbeschleuniger TESLA soll mit gepulsten Elektronenpaketen arbeiten. Diese werden erzeugt, indem man im Vakuum eine Photokathode aus Cäsium-Tellurid mit kurzen Laserpulsen bestrahlt. Die Grenzwellenlänge dieser Photokathode wird mit 260 nm angegeben.

a) Berechnen Sie die Mindestenergie, die die Photonen des Laserpulses haben müssen, um Photoelektronen auslösen zu können. (Kontrolle: 4,77 eV)

b) Berechnen Sie die maximale Austrittsgeschwindigkeit der Photoelektronen, wenn man Strahlung der Wellenlänge 255 nm benutzt.

c) Um Photoelektronen mit vernachlässigbarer Austrittsgeschwindigkeit zu erhalten, bestrahlt man die Kathode mit Laserpulsen der Wellenlänge 260 nm. Ein solcher Laserpuls erzeugt dabei ein Elektronenpaket der Ladung 1,0 nAs. Berechnen Sie die Energie eines solchen Laserpulses unter der Annahme, dass nur 2,0% der Laserphotonen Elektronen auslösen.

d) Alternativ wird ein Laserimpuls gleicher Energie wie in Teilaufgabe c), aber kürzerer Wellenlänge verwendet. Der Auslöseanteil wird wieder mit 2,0% angenommen. Erläutern Sie, wie sich die Zahl der ausgelösten Photoelektronen ändert.

Lösung:

a) Gesucht ist die Auslösearbeit aus der Grenzwellenlänge:

$$W_A = h \cdot f_G = h \cdot \frac{c}{\lambda_G} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{260 \cdot 10^{-9}\, m} = \underline{\underline{4{,}78\, eV}}$$

b) $$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{kin} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - W_A = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{255 \cdot 10^{-9}\, m} - 4{,}77\, eV = \underline{\underline{0{,}10\, eV}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg}} = \underline{\underline{1{,}8 \cdot 10^5\, m/s}}$$

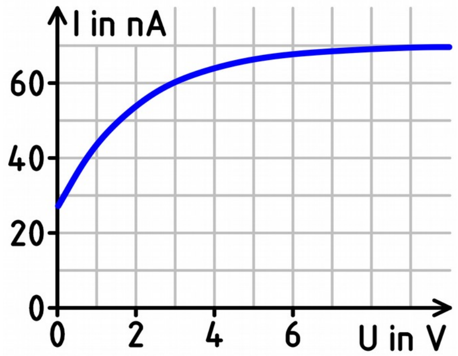
c) $$N_e = \frac{q}{e} \;\rightarrow\; N_{Ph} = 50 \cdot N_e = 50 \cdot \frac{q}{e} \;\rightarrow\; E = N_{Ph} \cdot h \cdot f = \frac{50 \cdot q \cdot h \cdot c}{e \cdot \lambda}$$

$$E = \frac{50 \cdot 1 \cdot 10^{-9}\, C \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^8\, m/s}{e \cdot 260 \cdot 10^{-9}\, m} = \underline{\underline{0{,}24\, \mu J = 1{,}5\, TeV}}$$

d) Kürzere Wellenlänge -> höhere Frequenz -> höhere Photonenenergie -> weniger Photonen bei gleicher Puls-Energie -> weniger ausgelöste Elektronen (bei gleicher Auslöserate)

Aufgabe 1.24: Abi 2005

Eine Vakuumphotozelle wird mit monochromatischem Licht der Wellenlänge 436 nm bestrahlt. In Abhängigkeit von einer zwischen Kathode und der Ringanode liegenden Spannung U wird der Photostrom I gemessen. Dabei wird die U-I-Kennlinie im Bild aufgenommen.



a) Erstellen Sie eine beschriftete Skzizze einer Versuchsanordnung, mit der die U-I-Kennlinie einer Vakuumphotozelle aufgenommen werden kann.

b) Erklären Sie, warum auch bei der Spannung U = 0 V schon eine Stromstärke Io gemessen wird. Erläutern Sie, warum der Strom die so genannte Sättigungsstromstärke Is (Im Diagramm Is = 70 nA) trotz zunehmender Spannung nicht übersteigt.

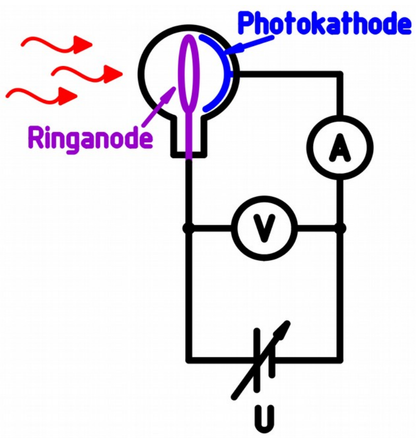
c) Um jeglichen Stromfluss zu unterdrücken, ist eine umgekehrt gerichtete Gegenspannung von Ug = -0,90 V gerade ausreichend. Bestimmen Sie die Austrittsarbeit für die Elektronen und geben Sie das Kathodenmaterial an.

Die gesamte auf die Photozelle fallende Lichtleistung beträgt 1,0 W.

d) Berechnen Sie die Anzahl der pro Sekunde auf die Photozelle fallenden Photonen. (Kontrolle: $2{,}2\cdot 10^{18}$)

e) Nicht jedes Photon aus Teilaufgabe d) kann ein Elektron auslösen. Ermitteln Sie mit dem Wert für die Sättigngsstromstärke Is die Anzahl der ausgelösten Elektronen pro Sekunde und geben Sie an, welcher Anteil der einfallenden Photonen Photoelektronen auslöst.

Lösung:



a) Das Bild ist ganz ähnlich wie die bekannte Schaltung zum Photoeffekt, nur dass man die Spannung anders polen muss, um die Photoelektronen zur Anode hin zu beschleunigen.

b) Bei Bestrahlung mit Licht ausreichender Frequenz werden aus der Photokathode Elektronen ausgelöst, die mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf die Ringanode treffen und so einen Photostrom Io erzeugen.

Wenn so gut wie alle Photoelektronen von der anliegenden Spannung zur Ringanode gezogen werden, kann die Stromstärke nicht weiter steigen, auch eine höhere Spannung kann nicht mehr als alle Photoelektronen zur Ringanode ziehen -> Sättigungsstromstärke Is.

c) $$W_A = h\cdot f - U\cdot e = h\cdot\frac{c}{\lambda} - U\cdot e = 4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{436\cdot 10^{-9}\,m} - 0{,}9\,V\cdot e = \underline{\underline{1{,}95\,eV}}$$

Ein Blick in die Formelsammlung liefert: Cäsium (Wenn das Cäsium nicht in der Formelsammlung steht ist diese Frage nicht lösbar)

d) $$N = \frac{E_{ges}}{E_{Ph}} = \frac{1{,}0\,J}{6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js\cdot\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{436\cdot 10^{-9}\,m}} = \underline{\underline{2{,}2\cdot 10^{18}}}$$

e) $$N_e = \frac{q}{e} = \frac{70\cdot 10^{-9}\,C}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,C} = \underline{\underline{4{,}4\cdot 10^{11}}}$$; Anteil: $$\frac{N_e}{N_{Ph}} = \frac{4{,}4\cdot 10^{11}}{2{,}2\cdot 10^{18}} = \underline{\underline{0{,}00002\,\%}}$$

Also nur 0,00002% der einfallenden Photonen lösen ein Elektron aus.

Aufgabe 1.25: Abi 2006; Photoeffekt

a) Beschreiben Sie einen einfachen Versuch mit einem Elektroskop als Nachweisgerät, mit dem sich der Photoeffekt beobachten lässt.

b) Geben Sie zwei Beobachtungen beim Photoeffekt an, die im Widerspruch zur klassischen Lichtwellentheorie stehen. Erklären Sie die von Ihnen genannten Beobachtungen unter Verwendung der Einstein'schen Deutung des Photoeffekts.

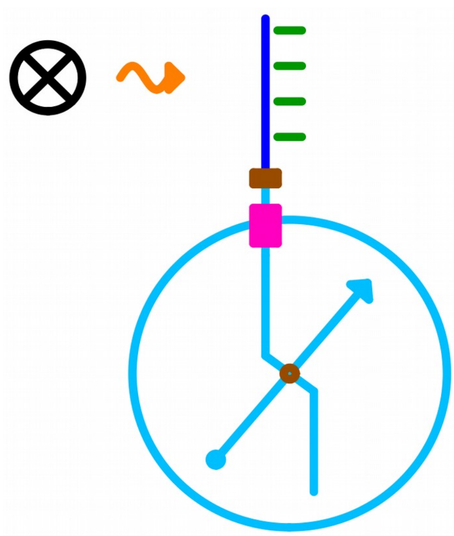
Vakuumphotozellen basieren auf dem Photoeffekt. Bei Bestrahlung mit geeignetem monochromatischem Licht ist eine Vakuumphotozelle eine Spannungsquelle.

c) Geben Sie die Beziehung für den Zusammenhang zwischen der Spannung der Photozelle und der Frequenz des eingestrahlten Lichts an.

d) Grünes Licht der Frequenz $f = 5{,}38 \cdot 10^{14}\,Hz$ soll durch eine Vakuumphotozelle nachgewiesen werden. Zur Verfügung stehen Photozellen mit folgenden Kathodenmaterialien: Cäsium, Gold, Kalium, Platin und Rubidium. Welche Eigenschaft muss das Kathodenmaterial haben um dafür geeignet zu sein.

e) Bei Verwendung von speziellen Legierungen erreicht man bei Photozellen Ablösearbeiten von 1,0 eV. In welchem Bereich liegen die Geschwindigkeiten von Photoelektronen, die durch sichtbares Licht (400 nm bis 800 nm) in solchen Photozellen ausgelöst werden?

Lösung:



a) Man steckt eine negativ aufgeladene Zinkplatte auf ein Elektroskop, wodurch der Zeiger ausschlägt. Bei Bestrahlung mit einer geeigneten Lichtquelle geht der Zeigerausschlag schnell zurück, was bedeutet, dass sich das Elektroskop - also auch die Zinkplatte - entlädt, weil durch das Licht Elektronen aus der Zinkplatte ausgelöst werden.

b) 1. Nur EM-Wellen (Licht) ab einer gewissen Grenzfrequenz oder darüber kann Elektronen auslösen -> EM-Wellen können Energie nur in Paketen der Größe $E = h \cdot f$ - mit dem Planckschen Wirkungsquantum h und der Frequenz der Welle f - austauschen. Erst ab einer gewissen Frequenz haben diese Pakete - so genannte Photonen - genug Energie um die Austrittsarbeit für ein Elektron aufzubringen.

2. Der Photoeffekt tritt sofort bei Beginn der Bestrahlung ein, also ohne Zeitverzögerung -> Die Wahrscheinlichkeit für eine Wechselwirkung, also für den Austausch eines Energiepakets, ist um so größer, je größer die Amplitude der EM-Welle an dem betreffenden Ort ist, insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit größer Null, wenn die Amplitude der Welle an dem Ort größer Null ist. Sobald Licht auf die Platte trifft ist die Amplitude der EM-Welle größer Null, also ist auch die WW-Wahrscheinlichkeit größer Null und es kann sofort ein Energiepaket ausgetauscht werden.

c) $U \cdot e = h \cdot f - W_A$, mit der materialspezifischen Auslösearbeit WA, die vom Material der Photokathode abhängig ist.

d) $E_{Ph} = h \cdot f = 4{,}14 \cdot 10^{-15} eVs \cdot 5{,}38 \cdot 10^{14} Hz = \underline{2{,}23\, eV}$

Die Auslösearbeit des Kathodenmaterials muss kleiner als die Photonenenergie - also kleiner als 2,23 eV - sein.

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{kin} = h \cdot f - W_A = h \cdot \frac{c}{\lambda} - W_A$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \left(h \cdot \frac{c}{\lambda} - W_A \right) : m}$$

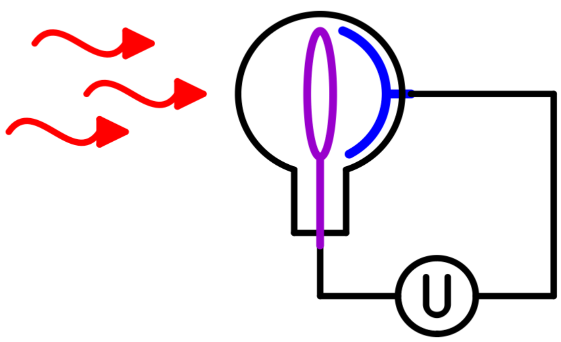
$$v_1 = \sqrt{2 \cdot \left(6{,}63 \cdot 10^{-34} Js \cdot \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{800 \cdot 10^{-9} m} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} J \right) : 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg} = \underline{4{,}4 \cdot 10^5 m/s}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot \left(6{,}63 \cdot 10^{-34} Js \cdot \frac{3 \cdot 10^8 m/s}{400 \cdot 10^{-9} m} - 1{,}6 \cdot 10^{-19} J \right) : 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg} = \underline{8{,}6 \cdot 10^5 m/s}$$

Es treten Elektronen zwischen den beiden Geschwindigkeiten auf.

Aufgabe 1.26: Abi 2007 Photoelektrischer Effekt

Eine Vakuumphotozelle wird nacheinander mit Licht unterschiedlicher Wellenlänge λ bestrahlt. Mit einem Voltmeter wird festgestellt, dass sich zwischen Kathode und Anode jeweils eine andere Spannung U einstellt.



a) Erklären Sie, warum sich die Spannung U aufbaut. Begründen Sie, dass für die Energie Eph der Photonen der Zusammenhang $E_{Ph} = e \cdot U + W_A$ gilt, wobei WA die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials ist.

λ in nm	447	492	502
U in mV	635	390	339

b) Für die verschiedenen Wellenlängen des Lichts ergeben Sie die Spannungen in der nebenstehenden Tabelle. Ermitteln Sie unter Verwendung aller Versuchsdaten die Plancksche Konstante.

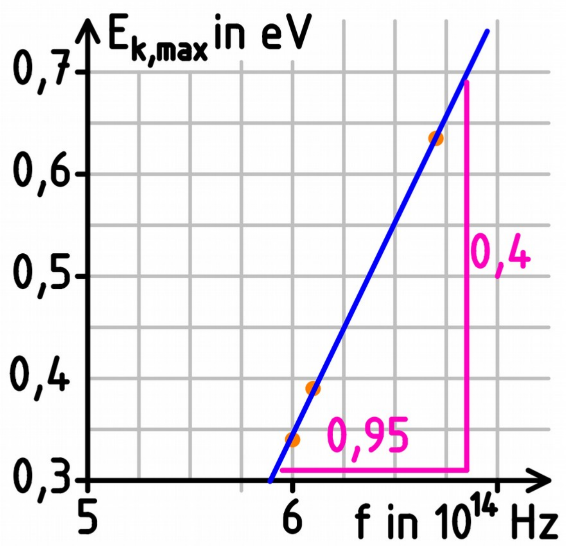
Lösung:

a) Das Licht löst Elektronen aus der Kathode aus, wodurch die Kathode positiv geladen wird. Diese Elektronen - Photoelektronen - gelangen teilweise zur Anode, wodurch diese negativ geladen wird. Es entsteht ein elektrisches Feld von Kathode in Richtung Anode, also (wegen $U = E \cdot \Delta x$) eine Spannung zwischen den beiden.

Das Licht kann nur Energiepakete der Größe $E = h \cdot f$ - mit dem Planckschen Wirkungsquantum h und der Frequenz des Lichts f - übertragen. Ein Teil dieser Energie wird benötigt, um ein Elektron aus dem Metallgitter der Anode auszulösen -> die so genannte Austrittsarbeit. Den Rest des Energiepakets (also $h \cdot f - W_A$) erhält das Elektron als kinetische Energie. Auf dem Weg zur Anode wird diese kinetische Energie in elektrische Energie ($U \cdot e$) umgewandelt. Sobald die Spannung so groß ist, dass die kinetische Energie der Photoelektronen nicht mehr ausreicht um die Anode zu erreichen, wird keine Ladung mehr zur Anode transportiert und die Spannung steigt nicht mehr weiter an. Dann wird die kinetische Energie der Photoelektronen vollständig in elektrischen Energie umgewandelt und es gilt $U \cdot e = h \cdot f - W_A$ -> $E_{ph} = h \cdot f = e \cdot U + W_A$.

b) Mit $f = c/\lambda$ und $E_{kin} = U \cdot e$ die Frequenzen und kinetischen Energien der Photoelektronen ausrechnen gibt die Tabelle rechts.

f in THz	671	610	598
E in eV	0,635	0,390	0,339



Mit den Werten zeichen wir einen Ausschnitt aus dem f-E-Diagramm und lesen die Steigung ab.

$$h = \frac{0{,}4\,eV}{0{,}95 \cdot 10^{14}\,Hz} = \underline{\underline{4{,}2 \cdot 10^{-15}\,eVs}}$$

Bemerkung: "Alle Versuchsdaten verwenden" bedeutet eine echte Ausgleichsgerade zeichnen und von dieser die Steigung ablesen. Von Messpunkt zu Messpunkt gibt empfindlichen Punktabzug.

Aufgabe 1.27: Abi 2008; Wellenlängenbestimmung mit Photozelle

Eine Photozelle mit einer Cäsium-Kathode (Austrittsarbeit 1,94 eV) soll zur Bestimmung der Wellenlänge λ von monochromatischem Licht verwendet werden.

a) Beschreiben Sie den Aufbau und den Ablauf eines Versuchs, bei dem eine Spannung U gemessen wird, die Rückschlüsse auf die Wellenlänge des auftreffenden Lichts zulässt. Zeigen Sie, dass für die Wellenlänge folgender Zusammenhang gilt:

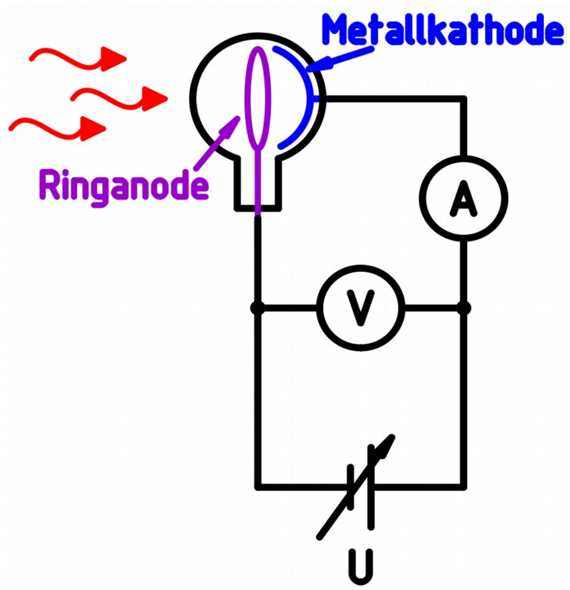
$$\lambda = \frac{h \cdot c}{W_A + e \cdot U}$$

b) Bestimmen Sie die Wellenlänge des Lichts, wenn U = 1,0 V ist. Welche Farbe hat dieses Licht?

c) Schätzen Sie ab, wie lange es nach klassischer Vorstellung mindestens dauern würde, bis ein Elektron aus dem Kathodenmaterial herausgelöst wird. Nehmen Sie dazu an, dass auf die 1,0 cm² große Kathode Licht der Leistung 15 µW trifft und die Atome der Kathode einen Radius von 0,1 nm haben.

Lösung:

a) Eine Metallkathode (Cäsium) und eine Ringanode befinden sich in einem evakuierten Glaskolben, welcher die Photozelle darstellt. Die Photozelle wird gemäß nebenstehender Abbildung mit Messgeräten und einer regelbaren Spannungsquelle verbunden und mit dem monochromatischen Licht bestrahlt. Das Amperemeter misst den Photostrom. Anschließend wird mit der Spannungsquelle die Spannung soweit hochgeregelt, bis der Photostrom zum Erliegen kommt. Diese Spannung wird gemessen.



Ein Elektron in der Photokathode erhält von einem Photon die Energie E = h·f. Ein Teil dieser Energie wird benötigt, um das Elektron aus dem Metallgitter auszulösen <- die Auslösearbeit WA. Den Rest der Photonenenergie (also h·f - WA) erhält das Elektron als kinetische Energie, die auf dem Weg zur Anode im Gegenfeld in elektrische Energie umgewandelt wird. Im Grenzfall wird die gesamte kinetische Energie der Photoelektronen in elektrische Energie umgewandelt, dann gilt:

$$E_{el}=U\cdot e=E_{kin}=h\cdot f-W_A=h\cdot\frac{c}{\lambda}-W_A \rightarrow \frac{h\cdot c}{\lambda}=U\cdot e+W_A \rightarrow \underline{\underline{\lambda=\frac{h\cdot c}{U\cdot e+W_A}}}$$

b) $$\lambda=\frac{4{,}14\cdot 10^{-15}eVs\cdot 3\cdot 10^{8}m/s}{1{,}0V\cdot e+1{,}94eV}=\underline{\underline{422\,nm}}$$

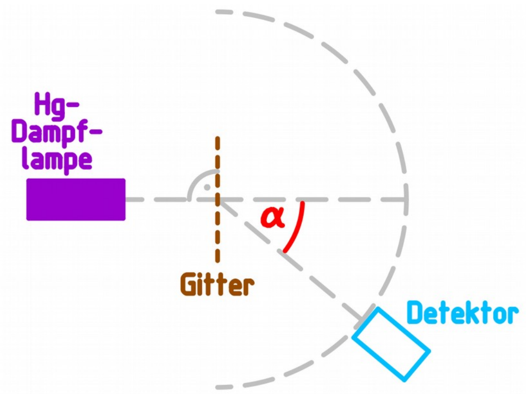
Das Licht ist fast am kurzwelligen Ende des sichtbaren Spektrums, also blau.

c)
$$W_A=E=P\cdot t=15\cdot 10^{-6}W\cdot\frac{\pi\cdot\left(0{,}1\cdot 10^{-9}m\right)^2}{1{,}0\cdot 10^{-4}m^2}\cdot t=4{,}71\cdot 10^{-21}W\cdot t$$
$$t=\frac{W_A}{4{,}71\cdot 10^{-19}W}=\frac{1{,}94\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}J}{4{,}71\cdot 10^{-21}W}=\underline{\underline{66\,s}}$$

Es müsste also mindestens 66 s dauern bis die ersten Elektronen ausgelöst werden.

<u>Aufgabe 1.28: Abi 2009; Interferenz und Photoeffekt</u>

Ein schmales Lichtbündel aus einer Quecksilberdampflampe strahlt auf ein Gitter mit 640 Strichen pro Millimeter. Das entstehende Spektrum wird mit einem Detektor untersucht, der auf einer Kreislinie bewegt werden kann.



a) Unter dem Winkel α = 16,2° fällt das Licht des Maximums 1. Ordnung einer bestimmten Spektrallinie auf den Detektor. Berechnen Sie die Wellenlänge λ der bei diesem Winkel auftretenden Linie. (Kontrolle: λ = 436 nm)

b) Bis zu welcher Ordnung sind Spektrallinien der in Teilaufgabe a) ermittelten Wellenlänge zu erwarten?

Als Detektor wird eine Vakuumphotozelle verwendet, die an ein Spannungsmessgerät mit sehr hohem Innenwiderstand angeschlossen ist. Wenn die Photozelle mit dem Licht einer Spektrallinie beleuchtet wird, stellt sich eine bestimmte Spannung U ein.

c) Erklären Sie, warum für die Spannung U der Zusammenhang e·U = h·f - WA gilt. Dabei ist h die Planck-Konstante, f die Frequenz des Lichts und WA die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials.

d) Die Intensität der Linie zweiter Ordnung ist deutlich geringer als diejenige der Linie erster Ordnung. Geben Sie mit Begründung an, ob sich dies grundsätzlich auf die Spannung an der Photozelle auswirkt.

e) Der Aufbau kann prinzipiell zur Bestimmung sowohl von h als auch von WA (der Austrittsarbeit) dienen. Beschreiben Sie, wie man aus den Werten für den Winkel α, unter dem das Maximum 1. Ordnung auftritt, und U für verschiedene Spektrallinien die gesuchten Größen erhält.

Lösung:

a) Gitterkonstante: $d = \frac{0{,}001\,m}{640} = \underline{\underline{1{,}5625\,\mu m}}$

$$1 \cdot \lambda = \Delta s = d \cdot \sin\alpha = 1{,}5625 \cdot 10^{-6}\,m \cdot \sin(16{,}2°) = \underline{\underline{436\,nm}}$$

b) $k \cdot \lambda = d \cdot \sin\alpha \leq d \;\rightarrow\; k \leq \frac{d}{\lambda} = \frac{1{,}5625 \cdot 10^{-6}\,m}{436 \cdot 10^{-9}\,m} = \underline{\underline{3{,}6}}$

Es können also Maxima (Spektrallinien) bis zur 3. Ordnung auftreten.

c) Ein Elektron in der Photokathode erhält von einem Photon die Energie E = h·f. Ein Teil dieser Energie wird benötigt, um das Elektron aus dem Metallgitter auszulösen <- die Auslösearbeit WA. Den Rest der Photonenenergie (also h·f - WA) erhält das Elektron als kinetische Energie, die auf dem Weg zur Anode im Gegenfeld in elektrische Energie umgewandelt wird. Im Gleichgewichtsfall (bei der gemessenen Spannung) wird die gesamte kinetische Energie der Photoelektronen in elektrische Energie umgewandelt, dann gilt:

$$U \cdot e = E_{el} = E_{kin} = h \cdot f - W_A$$

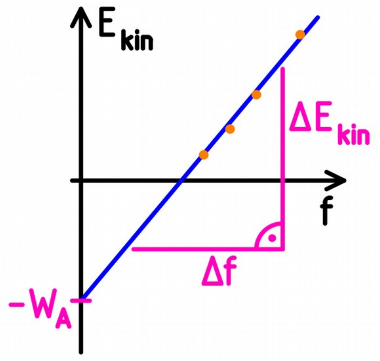
d) Die Spannung U ist nur Abhängig von der Frequenz des eingestrahlten Lichts. Die Intensität des Lichts hängt nur von der Amplitude der EM-Welle ab, und nicht von der Frequenz. Deshalb wirkt sich die Intensität prinzipiell nicht auf die Spannung aus.

Bemerkung: Die Intensität wirkt sich auf die Größe des Photostroms bei der Bildung des Gleichgewichts aus. Falls der Photostrom nicht ausreicht um eventuelle kleine Leckströme in der Apparatur oder den kleinen Strom durch das hochohmige Voltmeter aufzubringen, dann funktioniert der Versuch nicht oder nicht richtig. Ein zu kleine Intensität wirkt sich also schon auf die gemessene Spannung aus.

e) Aus dem Winkel α erhält man Wellenlänge und schließlich Frequenz der entsprechenden Spektrallinie:

$$d \cdot \sin\alpha = \lambda = \frac{c}{f} \;\rightarrow\; f = \frac{c}{d \cdot \sin\alpha}$$

Aus der Spannung U erhält man die maximale kinetische Energie der Photoelektronen:



$$E_{kin} = E_{el} = U \cdot e$$

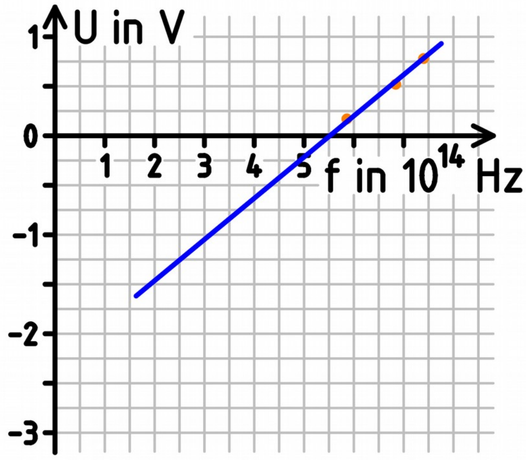
Die so gewonnenen Wertepaare trägt man in ein f-E-Diagramm ein und zeichnet eine Ausgleichsgerade.

Der negative y-Achsenabschnitt ist die Auslösearbeit; die Steigung der Gerade ist die Planck-Konstante:

$$h = \frac{\Delta E_{kin}}{\Delta f}$$

Aufgabe 1.29: Abi 2011; Fotoeffekt

Mit Hilfe einer Fotozelle wurde bei einem Experiment auf Grundlage dreier Messpunkte das nebenstehende Diagramm erstelle.



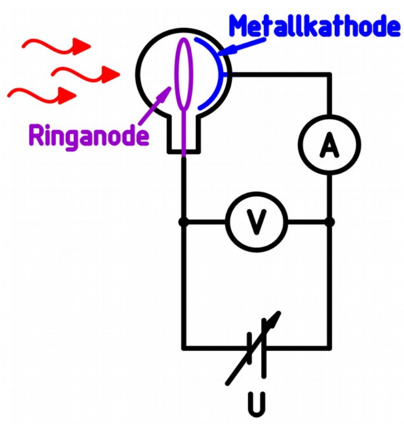
a) Beschreiben Sie den prinzipiellen Aufbau und die Durchführung eines Versuchs, bei dem sich ein solches Diagramm ergibt.

b) Ermitteln Sie jeweils unter Verwendung des Diagramms die Grenzwellenlänge, die Planck-Konstante sowie die Austrittsarbeit. Aus welchem Material könnte folglich die Kathodenschicht bestehen?

c) Beschreiben Sie den Graphen, der sich bei einer Fotozelle mit größerer Grenzwellenlänge ergeben würde. Begründen Sie ihre Aussagen.

d) Erläutern Sie zwei experimentelle Befunde des Fotoeffekts, die sich mit der klassischen Wellentheorie des Lichts nicht erklären lassen.

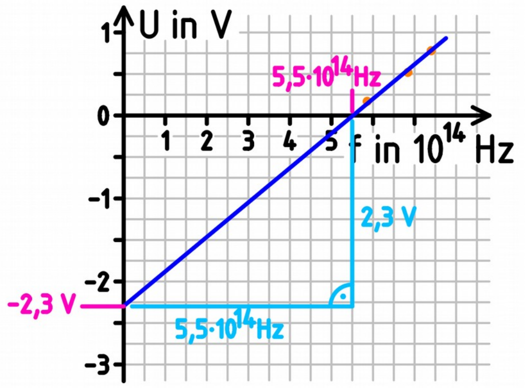
Lösung:



a) Eine Metallkathode und eine Ringanode befinden sich in einem evakuierten Glaskolben, welcher die Photozelle darstellt. Die Photozelle wird gemäß nebenstehender Abbildung mit Messgeräten und einer regelbaren Spannungsquelle verbunden und mit dem monochromatischen Licht bekannter Frequenz bestrahlt. Das Amperemeter misst den Photostrom. Anschließend wird mit der Spannungsquelle die Spannung soweit hochgeregelt, bis der

Photostrom zum Erliegen kommt. Diese Spannung wird gemessen.

Der Versuch mit verschiedenen Licht-Frequenzen wiederholt ergibt mehrere Messpunkte.



b) Die Spannung mit e multipliziert gibt die maximale kinetische Energie der Photoelektronen, deshalb ist das Diagramm gleichwertig zu einem f-E-Diagramm für die maximale kinetische Energie der Photoelektronen skaliert in eV.

$$f_G = 5{,}5 \cdot 10^{14}\,Hz$$

$$\lambda_G = \frac{c}{f_G} = \frac{3 \cdot 10^8\,m/s}{5{,}5 \cdot 10^{14}\,Hz} = \underline{\underline{545\,nm}}$$

$$\underline{\underline{W_A = 2{,}3\,eV}}$$

$$h = \frac{\Delta E_{kin}}{\Delta f} = \frac{2{,}3\,eV}{5{,}5 \cdot 10^{14}\,Hz} = \underline{\underline{4{,}2 \cdot 10^{-15}\,eVs}}$$

In meiner Formelsammlung steht keine Austrittsarbeit von 2,3 eV; am nächsten kommt noch das Barium mit 2,52 eV. Wenn nichts passendes in der Formelsammlung steht, ist die Frage nicht lösbar.

c) Der Graph wird eine zur ersten parallele Gerade, weil die Steigung durch die Planck-Konstante gegeben ist. Da die Grenzwellenlänge größer ist, ist die Grenzfrequenz kleiner und die Gerade ist links von der ersten (bzw. darüber).

d) Der Photostrom setzt sofort ein, sobald Licht auf die Kathode fällt <- ohne Zeitverzögerung, die nach der klassischen Theorie notwendig ist, bis die ersten Elektronen genug Energie erhalten haben um aus dem Metallgitter zu entweichen.

Der Photoeffekt tritt nur mit Licht ab einer gewissen Grenzfrequenz oder darüber ein. Dies steht im Widerspruch zur klassischen Theorie, da in hier die Energie der EM-Welle nur von der Intensität - also von der Amplitude der EM-Welle - abhängig ist und kein Zusammenhang zwischen Frequenz und Energie besteht.

Bemerkung: "Erläutern" ist ein bisschen schwammig <- offene Aufgabenstellung. Punkte beachten und entsprechend ausführlich antworten.

Aufgabe 1.30: G8 Abi 2011; Der Photoeffekt

Ende des 19. Jahrhunderts untersuchten Heinrich Hertz und Wilhelm Hallwachs erstmals systematisch den Photoeffekt, bei dem durch Bestrahlung mit Licht Elektronen aus Metalloberflächen herausgelöst werden.

a) Skizzieren Sie eine Versuchanordnung, bei der mit Hilfe einer Vakuumphotozelle die maximale kinetische Energie Ek von Photoelektronen in Abhängigkeit von der Lichtfrequenz gemessen werden kann, und beschreiben Sie die Versuchsdurchführung.

Das in Teilaufgabe 1.a) beschriebene Experiment wird mit einem speziellen Laser durchgeführt, bei dem verschiedene Lichtfrequenzen im sichtbaren Bereich eingestellt werden können.

λ in nm	444	480	523	605	640
f in 10^{14} Hz	6,75	6,25	5,73	4,96	4,68
$E_{k,max}$ in eV	0,66	0,44	0,25	—	—

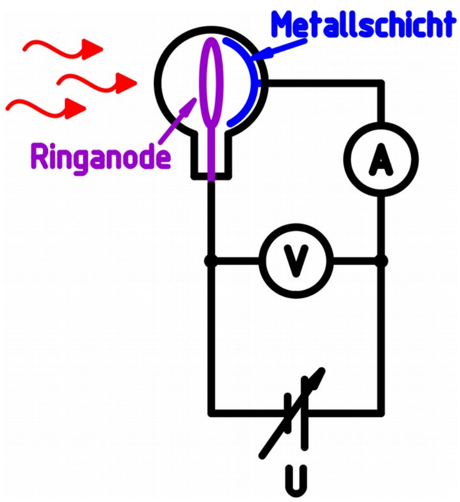
b) Erklären Sie mit Hilfe der Lichtquantenhypothese, warum bei den beiden größten Wellenlängen im Experiment kein Photoeffekt auftritt.

c) Zeichnen Sie ein f-Ekmax-Diagramm und erklären Sie die physikalische Bedeutung der Schnittpunkte der durch die Messpunkte bestimmten Ausgleichsgeraden mit den beiden Achsen. (Skalierung: 1 eV entspricht 5 cm)

d) Ermittle mit Hilfe des Diagramms aus Teilaufgabe 1.c) die Planck-Konstante h.

e) Bei Bestrahlung mit dem grünen Laserlicht (λ = 523 nm) trifft eine Lichtleistung von 2,0 mW auf die Photokathode. Berechnen Sie dei Photostromstärke unter der Annahme, dass nur 0,010% der Photonen Elektronen auslösen.

Lösung:

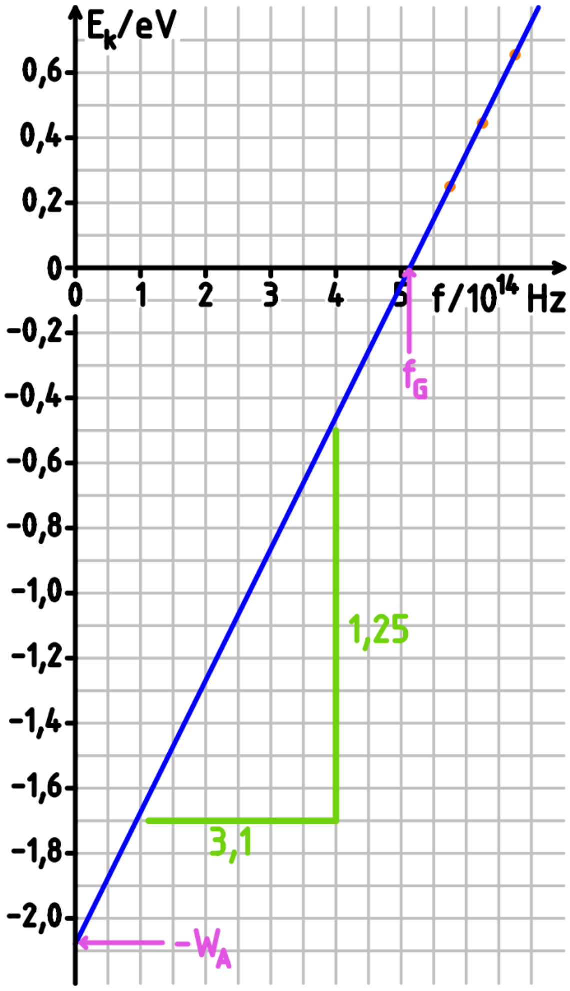


a) Man bestrahlt die Metallschicht einer Vakuumphotozelle mit Licht bekannter Frequenz (oder bekannter Wellenlänge). Falls das Licht oberhalb der Grenzfrequenz ist, werden aus der Metallschicht Elektronen ausgelöst. Die ausgelösten Photoelektronen lassen sich mit dem eingezeichneten Amperemeter als Photostrom nachweisen. Anschließend regelt man die eingezeichnete Gegenspannung U solange hoch, bis der Photostrom zum erliegen kommt. Bei diesem Wert der Gegenspannung wandeln die Photoelektronen ihre gesamte kinetische Energie in elektrische Energie um und die maximale kinetische Energie der Photoelektronen ergibt sich zu: Ek = Eel = e·U

b) Licht kann Energie nur in Paketen der Größe h·f, mit dem Planckschen Wirkungsquantum h und der Frequenz der Lichtwellen f übertragen. Bei den zwei größten Wellenlängen in der Tabelle ist offensichtlich die Frequenz der Lichtwellen - und damit die Größe der übertragbaren Energiepakete - zu klein um die Auslösearbeit aufzubringen, die notwendig ist, um ein Elektron aus seiner Bindung im Metall auszulösen.

c) Der Schnittpunkt mit der f-Achse gibt die Grenzfrequenz an, unterhalb derer kein Photoeffekt auftritt.

$$\underline{\underline{f_G \approx 5{,}1 \cdot 10^{14}\,Hz}}$$



Der Schnittpunkt mit der E-Achse gibt die negative Auslösearbeit an. Die Auslösearbeit ist die Arbeit, die notwendig ist, um ein Elektron aus seiner Bindung im Metall auszulösen.

$$\underline{\underline{W_A \approx 2{,}1\,eV}}$$

d) h ist die Steigung im Diagramm

$$h \approx \frac{1{,}25\,eV}{3{,}1 \cdot 10^{14}\,Hz} \approx \underline{\underline{4{,}03 \cdot 10^{-15}\,eVs}}$$

e) Photonenenergie:

$$E_{Ph} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

$$E_{Ph} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\,m/s}{523 \cdot 10^{-9}\,m}$$

$$\underline{E_{Ph} = 3{,}80 \cdot 10^{-19}\,J}$$

Anzahl der Photonen pro Sekunde: $N_{Ph} = \frac{2{,}0 \cdot 10^{-3}\,J}{3{,}80 \cdot 10^{-19}} = \underline{5{,}26 \cdot 10^{15}}$

Anzahl der Photoelektronen pro Sekunde: $N_e = 0{,}0001 \cdot 5{,}26 \cdot 10^{15} = \underline{5{,}26 \cdot 10^{11}}$

Stromstärke: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{5{,}26 \cdot 10^{11} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C}{1\,s} = \underline{84\,nA}$

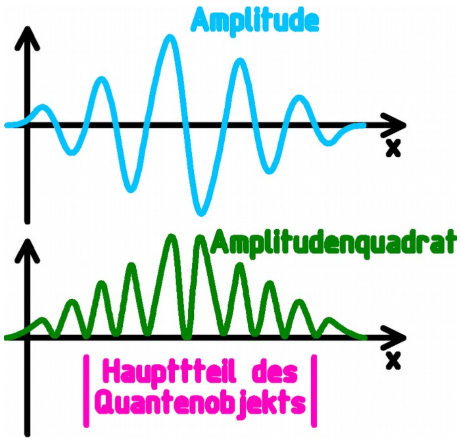
2 Quantenobjekte

Beim Experimentieren mit Mikroteilchen wie Elektronen, Protonen oder Neutronen fällt auf, dass diese sich nicht wie kleine Kugeln sondern ganz ähnlich wie EM-Wellen verhalten. Teilchen mit solchem Verhalten nennt man Quantenobjekte. Die Energie- und Impulsgleichung bleibt dabei wie für EM-Wellen erhalten.

2.1 Begriff: Quantenobjekt

Ein Quantenobjekt lässt sich durch eine Welle (Wellenfunktion Ψ) beschreiben. Die Parameter der Welle haben dabei folgende Bedeutung.

➔ Amplitude: Das Betrags-Quadrat der Amplitude $|\psi|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeits-Dichte ("Teilchen-Dichte") an diesem Ort an.



Das Teilchen befindet sich teilweise an dem einen Ort, teilweise an anderen Orten. Bei einem Elektron ist das Amplitudenquadrat mit e (Elementarladung) multipliziert die Ladungsdichte der Wellenfunktion (des Elektrons) an diesem Ort.

➔ Die Wellenlänge hängt mit dem Impuls des Teilchens zusammen.

$$p=\frac{h}{\lambda}$$

De-Broglie-Beziehung (De-Broglie-Wellenlänge)

Überlege: Weshalb bedeutet diese Gleichung, dass es keine Elektron ohne kinetische Energie geben kann?

➔ Frequenz: Aus der Frequenz der Welle ergibt sich die Energie des Teilchens (Gesamtenergie, also $E_{pot}+E_{kin}$, ohne Ruheenergie).

$$\boxed{E=h\cdot f}$$

Grundsätzlich besteht die ganze Materie aus Quantenobjekten. Allerdings treten die Wellenphänomene umso deutlicher in Erscheinung, je kleiner die Körper sind. Bei großen Körpern wie Gewehrkugeln lassen sich Wellenphänomene nicht beobachten, unter anderem weil die Wellenlänge zu klein ist. Selbst Atome sind dafür noch sehr groß, allerdings sind Doppelspaltversuche auch mit Atomen bereits gelungen.

Wellenlänge und Energie

Eine kleine Wellenlänge führt wegen $p=\frac{h}{\lambda}$ zu einem großen Impuls und deshalb zu einer großen kinetischen Energie. Man geht im Normalfall davon aus, dass dies auch zu einer großen Gesamtenergie führt. Umgekehrt besitzt ein Elektron mit einer großen Wellenlänge eine kleine Energie.

Kleine Wellenlänge hat große Energie.

Große Wellenlänge hat kleine Energie.

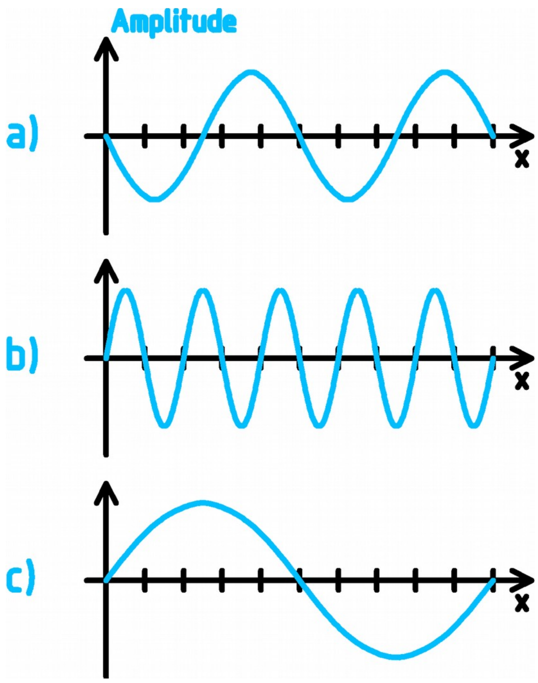
Aufgabe 2.31:

Das Bild zeigt Wellenfunktionen verschiedener Elektronen.

Welches der Elektronen hat die größte Energie, welches hat die kleinste?

Welches Elektron hat die größte Frequenz, welches hat die kleinste?

Welches Elektron hat den größten Impuls, welches hat den kleinsten?



Der quantenmechanische Mess-Prozess

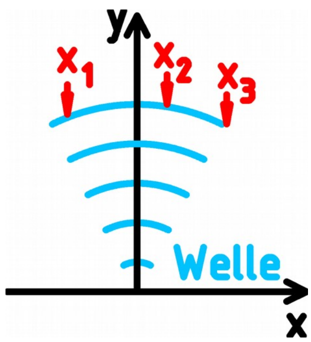
Die Wellenfunktionen selbst lassen sich nicht beobachten. Um irgendwelche Beobachtungen oder Messungen machen zu können, müssen wir unser Quantenobjekt zur Wechselwirkung mit unserer Messapparatur bringen. Wenn das zu messende Elektron nämlich unsere Messapparatur beeinflusst, so dass wir irgendwas ablesen können, dann beeinflusst die Messapparatur automatisch auch das Elektron (Newton III, Wechselwirkungsprinzip).

Durch die Wechselwirkung mit unserer Messapparatur verändert sich deshalb die Wellenfunktion des Elektrons. Die Wellenfunktion die vorher da war, ist nach der Messung nicht mehr da, statt dessen gibt es jetzt eine andere Wellenfunktion. Das bedeutet, die vorherige Wellenfunktion steht z.B. auch für ein folgendes Experiment nicht mehr zur Verfügung, die vorherige Wellenfunktion gibt's nicht mehr.

Beispiel: Ortsmessung

Will man wissen, wo sich ein Elektron befindet, dann muss man eine erhebliche Wechselwirkung mit Molekülen in der Nebelkammer, auf einem photographischen Film oder mit irgendeinem Detektor provozieren. Die Wellenfunktion verändert sich dabei in einem Ausmaß, dass sie nicht wiederzuerkennen ist. Man sagt:"Die Wellenfunktion kollabiert."

Wahrscheinlichkeits-Interpretation



Das vorhergehende wirft die Frage auf, wie die Ortsmessung mit der Wellenfunktion in Zusammenhang steht. Messen wir den Aufenthaltsort des Elektrons bei x_1, bei x_2 oder bei x_3 ?

Die Erfahrung zeigt, dass das Amplitudenquadrat $|\psi|^2$ der Wellenfunktion die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, das Teilchen an diesem Ort zu messen.

Man bezeichnet deshalb das Amplitudenquadrat der Wellenfunktion $|\psi|^2$ auch als Wahrscheinlichkeitsdichte oder Aufenthaltswahrscheinlichkeit.

☠ Die Bezeichnung ist allerdings irreführend, weil sich das Elektron ja gleichzeitig an verschiedenen Orten aufhält. Das Elektron ist teilweise bei x_1 und teilweise bei x_2 und an anderen Orten.

Identifikation geladener Teilchen

Bei Beugungsversuchen mit Elektronen möchte man sicher sein, dass die beobachteten Erscheinungen auch wirklich von den Elektronen herrühren und nicht von Licht oder EM-Wellen erzeugt werden. Dazu kann man einen Magneten in die Nähe des Beugungsbildes bringen. Wir das Beugungsbild entsprechend der Lenzschen Regel abgelenkt, kann es sich nicht um einen Lichteffekt handeln, da Licht von Magnetfeldern nicht abgelenkt wird.

Mit einem Magneten kann man nachweisen, dass ein Beugungsbild von elektronischen Wellenfunktionen erzeugt wird.

Schluss-Bemerkung: Unser Buch bietet eine andere (vereinfachte) Sichtweise und Beschreibung von Quantenobjekten. Sie können sich in allen schriftlichen Prüfungssituationen natürlich auch auf den Standpunkt unseres Buches zurückziehen.

Aufgabe 2.32:

Elektronen mit vernachlässigbarer Anfangsgeschwindigkeit werden durch eine Beschleunigungsspannung von 300V beschleunigt.

a) Bestimme die Wellenlänge der beschleunigten Elektronen.

b) Mit den Elektronen wird ein Doppelspalt-Versuch gemacht. Der Abstand von Spalt zu Schirm beträgt 20cm. Damit man das Maximum erster Ordnung vom Hauptmaximum unterscheiden kann müssen die beiden Maxima auf dem Schirm einen Abstand von mindestens 0,1mm haben. Wie muss dafür der Spaltabstand d beschaffen sein.

Lösung:

a)

$$U\cdot e=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \rightarrow v=\sqrt{\frac{2\cdot U\cdot e}{m}} \quad ; \qquad p=m\cdot v=m\cdot\sqrt{\frac{2\cdot U\cdot e}{m}}=\sqrt{2\cdot m\cdot U\cdot e}$$

$$p=\frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda=\frac{h}{p}=\frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,Js}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 300\,V\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C}}=\underline{7{,}1\cdot 10^{-11}\,m}$$

b)

Kleinwinkelnäherung: $1\cdot\lambda=d\cdot\frac{\Delta y}{l} \rightarrow d=\frac{\lambda\cdot l}{\Delta y}$; für $\Delta y\geqslant 0{,}0001\,m$ ist

$$d\leqslant\frac{7{,}1\cdot 10^{-11}\,m\cdot 0{,}2\,m}{0{,}0001\,m}=0{,}142\,\mu m$$

Der Spaltabstand darf höchstens 0,14µm betragen. Ein sehr kleiner Spalt, deshalb auch schwer herzustellen. Der Versuch gelang zu ersten mal 1961. Die Zahlen in der Aufgabe sind allerdings ausgedacht, die Werte vom Originalexperiment hab ich nicht.

Aufgabe 2.33:

Für relativistische Rechnungen mit Elektronen-Wellenlängen benutzt man geschickter weise die relativistische Energie-Impuls-Beziehung.

a) Berechne die Wellenlänge von Elektronen mit einer kinetischen Energie von 5keV.

b) Wie groß ist die kinetische Energie von Elektronen mit einer Wellenlänge von 1pm?

Lösung:

a)
$$E^2 = c^2 \cdot p^2 + E_0^2$$
$$\left(E_0 + E_{kin}\right)^2 = c^2 \cdot p^2 + E_0^2$$
$$c^2 \cdot p^2 = \left(E_0 + E_{kin}\right)^2 - E_0^2$$
$$p = \frac{\sqrt{\left(E_0 + E_{kin}\right)^2 - E_0^2}}{c}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h \cdot c}{\sqrt{\left(E_0 + E_{kin}\right)^2 - E_0^2}}$$

Wenn wir das h in eVs einsetzen müssen wir die Energien nicht umrechnen.

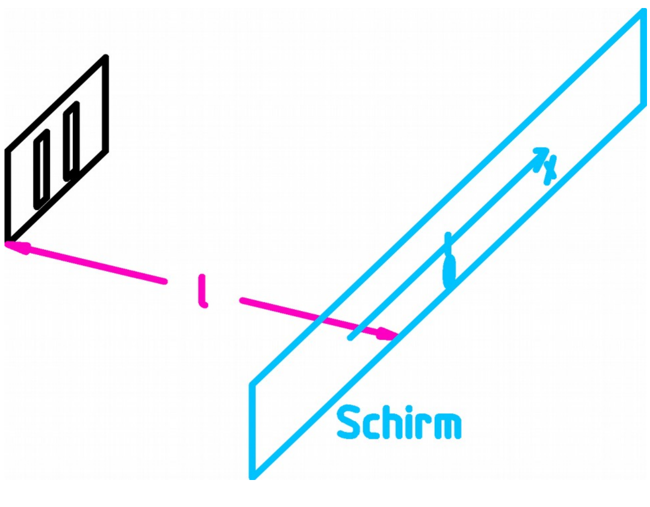
$$\lambda = \frac{4{,}1 \cdot 10^{-15}\, eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^8\, m/s}{\sqrt{(511 \cdot 10^3 eV + 5 \cdot 10^3 eV)^2 - (511 \cdot 10^3 eV)^2}} = \underline{1{,}7 \cdot 10^{-11} m}$$

b)
$$E^2 = c^2 \cdot p^2 + E_0^2$$
$$E = \sqrt{c^2 \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} + E_0^2} = \sqrt{\left(3 \cdot 10^8\, m/s\right)^2 \cdot \frac{(4{,}1 \cdot 10^{-15} eV \cdot s)^2}{(1 \cdot 10^{-12} m)^2} + (511 \cdot 10^3 eV)^2} = \underline{1332\, keV}$$

Von der Energie muss man noch die Ruheenergie abziehen, dann erhält man die kinetische Energie. Das wären dann 821keV. Man muss die Elektronen also mit 821kV beschleunigen, um diese Wellenlänge zu erreichen.

Aufgabe 2.34:

Elektronen werden mit 800V beschleunigt und auf einen Doppelspalt mit Spaltabstand 1,0µm geschossen. Im Abstand l = 80cm hinter dem Doppelspalt befindet sich der Beobachtungsschirm.



a) Berechne den Abstand des Maximums erster Ordnung vom Hauptmaximum auf dem Schirm.

b) Skizziere den Intensitätsverlauf der auf dem Schirm auftreffenden Elektronenstrahlung, also ein x-I-Diagramm.

c) Wie kann man nachweisen, dass das Beugungsbild auf dem Schirm von Elektronen erzeugt wird und nicht etwa von Lichtwellen, die im Verlauf des Versuchs entstehen?

Lösung:

$$U\cdot e=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \;\rightarrow\; v=\sqrt{\frac{2\cdot U\cdot e}{m}} \;\rightarrow\; p=m\cdot v=\sqrt{2\cdot m\cdot U\cdot e}$$

a) $$p=\frac{h}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2\cdot m\cdot U\cdot e}}=\frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s}{\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 800\mathrm{V}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C}}$$

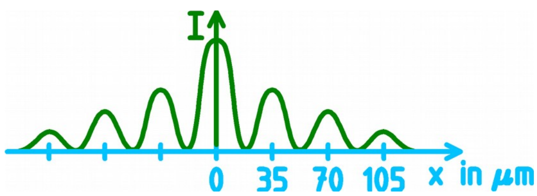
$$\underline{\lambda=4{,}32\cdot 10^{-11}\,m}$$

Kleinwinkelnäherung

$$1\cdot\lambda=d\cdot\frac{\Delta y}{l} \;\rightarrow\; \Delta y=\frac{\lambda\cdot l}{d}=\frac{4{,}32\cdot 10^{-11}\,m\cdot 0{,}8\,m}{1\cdot 10^{-6}\,m}=\underline{0{,}0346\,mm}$$

b) Die Intensität ist gleich dem Amplitudenquadrat der Welle. Bei einer Messung ist die Intensität gleich der Wahrscheinlichkeitsdichte für eine Messung am jeweiligen Ort.

Der Intensitätsverlauf ist derselbe, wie bei jeder anderen Welle, die an einem Doppelspalt gebeugt wird. Für kleine Winkel sind wegen



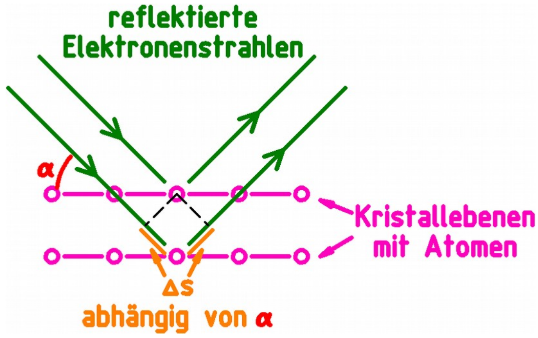
$$k\cdot\lambda=d\cdot\frac{\Delta y}{l} \;\rightarrow\; \Delta y=k\cdot\frac{l\cdot\lambda}{d}$$

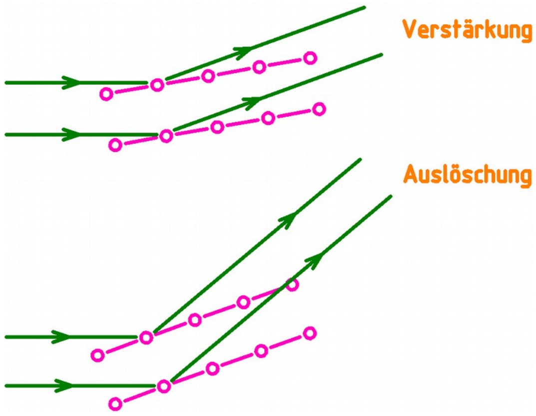
die Maxima äquidistant. Mit zunehmender Ordnung nimmt wie immer die Intensität der Maxima ab.

c) Man bringt einen Magneten in die Nähe des Beugugsbildes. Wird das Bild entsprechend der Lenzschen Regel abgelenkt, dann wird es von Elektronen erzeugt.

2.2 Beugung an Kristallen, Debye-Scherrer-Ringe

Elektronen treffen auf einen Kristall. Der Elektronenstrahl muss aber nicht an der obersten Kristallebene (Gitterebene) reflektiert werden, sonder kann auch an einer Ebene darunter reflektiert werden. Dadurch entsteht ein Laufwegunterschied, der vom Winkel Alpha unter dem die Elektronen auf den Kristall treffen abhängig ist.

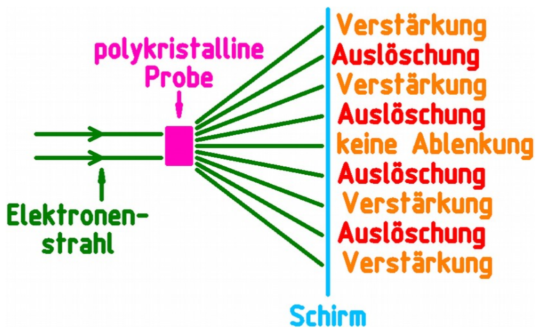




Dadurch kommt es für bestimmte Winkellagen des Kristalls zu Verstärkung und für andere Winkel zu Auslöschung.

In der Beugungsröhre schickt man die Elektronen auf eine polykristalline Probe, also eine Probe die aus vielen sehr kleinen Kristallen besteht (Pulver), die völlig wirr durcheinander liegen.

In einer solchen polykristallinen Probe kommen Kristalle in allen möglichen Winkellagen vor, es gibt also zu jedem denkbaren Winkel viele Kristalle, die in diesem Winkel liegen. Deshalb taucht im Beugungsbild jede mögliche Verstärkung und jede mögliche Auslöschung auf. Die Elektronen können allerdings nicht nur nach oben und unten abgelenkt werden, sondern auch nach links und rechts oder in alle anderen Richtungen.



Auf dem Schirm erscheinen die Maxima und Minima deshalb als Kreise verschiedener Helligkeit.

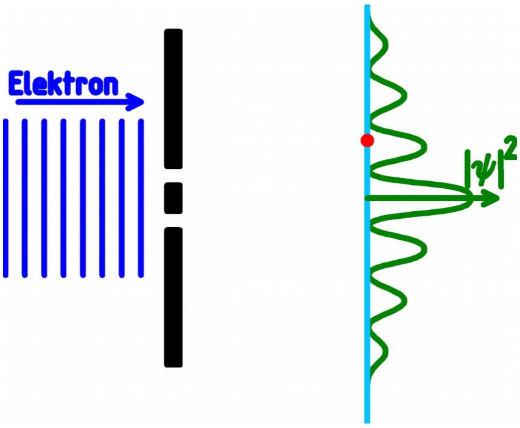
Im praktischen Versuch wird das Bild sehr verschwommen bzw. unscharf sein, da die Elektronen auch mehrmals an verschiedenen Kristallen reflektiert werden können und es andere schwerwiegende Störeffekte gibt.

2.3 Das Verhalten von Quantenobjekten

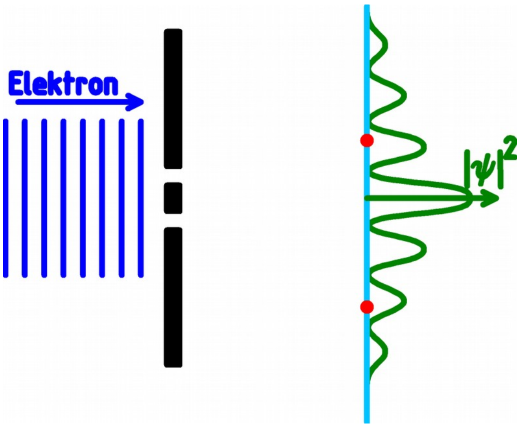
Ein Quantenobjekt ist kein kleines Kügelchen. Sobald sie sich ein Elektron wie eine kleine Kugel vorstellen bekommen sie logische Probleme. Wir müssen uns die Teilchen tatsächlich als Wellen (Wellenfunktionen) vorstellen.

Einzelne Elektronen am Doppelspalt

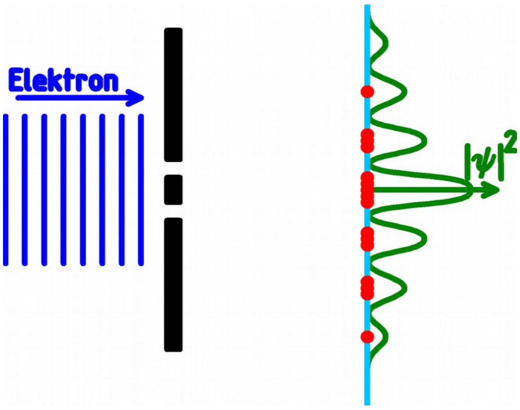
Wir schicken ein einzelnes Elektron gegen einen Doppelspalt, hinter dem sich ein Schirm mit einem photographischen Film befindet.



Die Elektronen-Welle dringt durch den Spalt und kann hinter dem Spalt interferieren, so dass sich das gezeichnete Amplitudenquadrat auf dem Schirm ergibt. Je größer das Amplitudenquadrat, desto größer die Wahrscheinlichkeit für eine Messung an diesem Punkt. Das Elektron verursacht also irgendwo auf dem Schirm einen schwarzen Punkt (dicker Punkt), wahrscheinlich (aber nicht sicher) an einer Stelle, an der das Amplitudenquadrat groß ist.

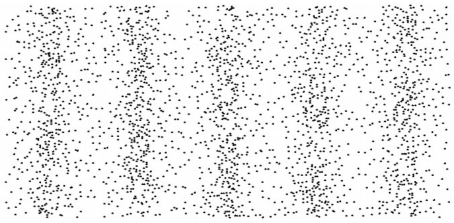


Das nächste Elektron genauso. Der nächste schwarze Punkt wird wahrscheinlich (aber nicht sicher) woanders sein, da ja auch andere Punkte eine große Aufenthaltswahrscheinlichkeit besitzen.



Wenn man den Versuch sehr oft durchführt, dann bekommt man sicher viele Treffer dort, wo das Amplitudenquadrat groß ist, und nur wenig Treffer dort, wo das Amplitudenquadrat klein ist. So entsteht das bekannte Interferenzbild.

Den Versuch kann man nicht nur mit einzelnen Elektronen durchführen. Ganz genau so geht's mit einzelnen Photonen oder irgendwelchen anderen Teilchen.

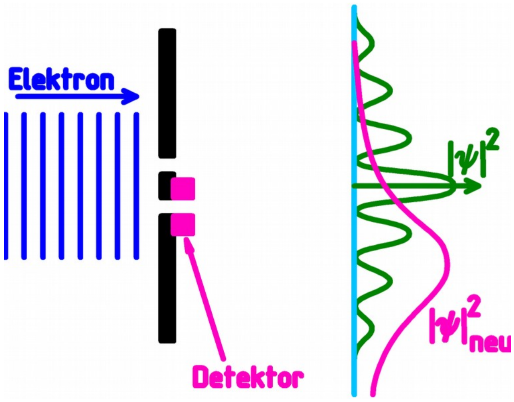


Die Darstellung links zeigt, wie das Ergebnis eines gelungenen Versuchs ungefähr aussieht. (Reale Aufnahmen finden sie zuhauf im Internet).

Falsche Frage: Durch welchen der beiden Spalte geht das Elektron

Eine beliebte Frage ist, ob das Elektron durch den oberen oder den unteren Spalt geht. Die Frage ist unsinnig, weil das Elektron (also die elektronische Welle) ja durch beide Spalte gehen muss, sonst könnte es ja hinter dem Spalt nicht interferieren und es würde kein Beugungsbild entstehen.

Komischer Versuch



Will man feststellen, durch welchen Spalt das Elektron geflogen ist (obwohl die Frage keinen Sinn ergibt), baut man einen Detektor an einen der Spalte. Diejenigen Elektronen, die am unteren Spalt detektiert werden, treten dann natürlich mit dem Detektor in Wechselwirkung und es entsteht eine völlig neue Wellenfunktion mit einer anderen Trefferwahrscheinlichkeit auf dem Schirm.

Man würde jetzt vielleicht erwarten, dass die nicht detektierten Elektronen trotzdem durch beide Spalte gehen und unser Interferenzbild wenigstens teilweise und schwach sichtbar ist. Tatsächlich verhalten sich die nicht detektierten Elektronen aber genauso, als ob sie nur durch den oberen Spalt gehen und man erhält bloß die Überlagerung der beiden Einzelspaltbilder.

☠ Die nicht detektierten Elektronen werden also anscheinend beeinflusst, ohne dass eine Wechselwirkung stattfindet.

Das ist nicht die einzige Situation, in der so was passiert. Hier wird das allerdings nicht vertieft. Bei Interesse finden Sie im Internet viel zu diesem Thema (Suchbegriffe: Verschränkte Zustände, Quantenmechanik, Beobachter, Doppelspaltexperiment, EPR-Paradoxon, ...).

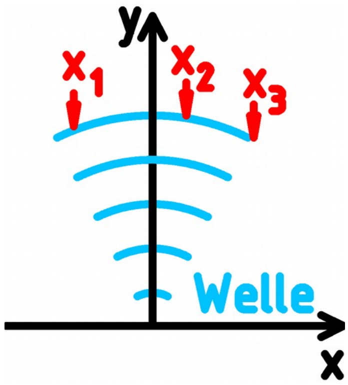
Determinismus

Determinismus heißt, dass völlig identische Ausgangsbedingungen zu identischen Ergebnissen führen. Dies scheint in der Quantenmechanik auf den ersten Blick nicht so zu sein, da eine Ortsmessung nicht mit Sicherheit sondern nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (Amplitudenquadrat) eintritt. Das bedeutet, dass bei mehrmaligem Experiment mit identischen Ausgangsbedingungen verschiedene Ergebnisse eintreten. Das liegt aber nur daran, dass wir bei unseren Überlegungen die Wellenfunktion der Experimentieranordnung und der ganzen Umgebung nicht mit einbeziehen.

Nach den Regeln der Quantenmechanik bildet das Elektron welches wir untersuchen zusammen mit den Elektronen in der Umgebung eine gemeinsame Wellenfunktion, die wiederum in Wechselwirkung steht mit der restlichen Umgebung. Diese Sichtweise in Strenge durchgeführt würde zu einem völlig deterministischen System aus Gleichungen und Wellenfunktionen führen, ist aber nicht durchführbar, weil zu kompliziert. Die Einschränkung auf die Betrachtung nur des zu untersuchenden Elektrons führt zu den Wahrscheinlichkeitsaussagen und auch zum Problem mit dem überraschenden Versuchsausgang oben.

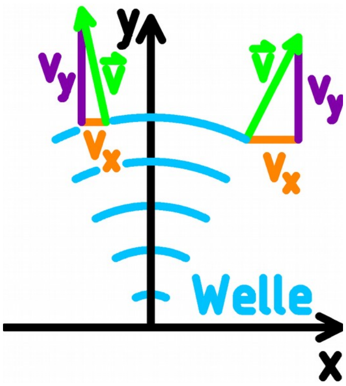
Es sind viele Versuche erdacht worden um zu zeigen, dass die quantenmechanische Beschreibung von Systemen falsch oder unvollständig ist. Jeder dieser Versuche hat die Quantenmechanik jedoch nur bestätigt, anstatt sie zu widerlegen.

2.4 Heisenbergsche Unschärferelation



Wir betrachten ein einzelnes Teilchen, also dessen Wellenfunktion am Beispiel der sich nach oben bewegenden Welle rechts. Will man die Position des Teilchens - also die x-Koordinate - auf der Höhe der letzten eingezeichneten Wellenfront messen, wird man bei Wiederholung des Versuchs mit identischer Wellenfunktion verschiedene Messwerte erhalten. Die Wahrscheinlichkeit für die verschiedenen Messwerte gibt das Amplitudenquadrat der Wellenfunktion $|\psi|^2$.

Im gezeichneten Beispiel wird der Mittelwert der Ortsmessungen x = 0 sein. Die mittlere Abweichung (genauer die Standardabweichung σ; siehe Mathematikunterricht) der Messwerte nennt man die Unschärfe der Ortsmessung in x-Richtung Δx. Diese Unschärfe resultiert nicht aus einer Ungenauigkeit unserer Messapparatur, die Unschärfe ist eine Eigenschaft der Wellenfunktion selbst.



Genau dasselbe passiert, wenn man die Geschwindigkeit eines Teilchens in der Höhe der letzten Wellenfront messen will. Die Ausbreitungsrichtung der Welle ist ja an jedem Punkt ein bisschen anders. Man erhält also eine Unschärfe Δv_x für die x-Komponente der Geschwindigkeit. Man benutzt zum Rechnen allerdings nicht die Geschwindigkeits-Unschärfe sondern die Impulsunschärfe Δp_x . Im Rahmen des mathematischen Modells der Quantenmechanik kann man nachweisen, dass jede beliebige Wellenfunktion eine gewisse Mindestunschärfe in Ort und Impuls besitzt. Und zwar:

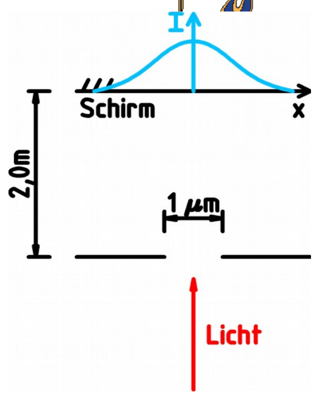
$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4 \cdot \pi}}$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Diese Unschärfe (Unbestimmtheit) hat auch nichts damit zu tun, dass die Messung das System beeinflusst, wie manchmal geschrieben wird. Die Unschärferelation ist eine Eigenschaft der Wellenfunktionen selbst.

☠ Die Heisenbergsche Unschärferelation liefert immer nur einen Mindestwert für das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p$! Der Wert kann für eine konkrete Wellenfunktion auch viel größer sein.

Aufgabe 2.35: Beugung durch Unschärfe



Wir schicken Licht der Wellenlänge 750nm auf einen einfachen Spalt der Breite 1µm. 2m hinter dem Spalt befindet sich ein Schirm. Wie wir wissen wird das Licht am Spalt gebeugt und wir erhalten auf dem Schirm einen breiten Streifen. Ziel ist es die Breite des Streifens abzuschätzen.

a) Bestimme den Impuls der Photonen im Licht.

b) Durch den Spalt wird die Ortsunschärfe auf der Höhe des Spalts auf ca. 0,5µm eingeschränkt. Bestimme die daraus resultierende Impulsunschärfe in x-Richtung.

c) Bestimme mit Hilfe von b) und der Heisenbergschen Unschärferelation die mittlere Breite des Beugungsbildes auf dem Schirm.

d) Zeichne die in c) berechnete Breite in die Intensitätsverteilung im Bild oben ein.

Lösung:

a) $$p=\frac{h}{\lambda}=\frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s}{750\cdot 10^{-9}\,m}=\underline{8{,}8\cdot 10^{-28}\,kg\cdot\frac{m}{s}}$$

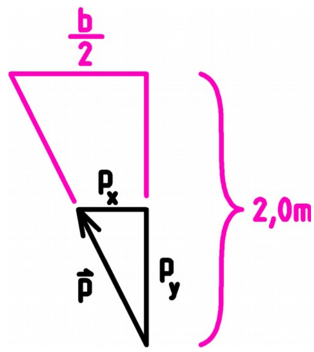
b) Wir betrachten die Unschärfe von Ort und Impuls in x-Richtung direkt auf der Höhe des Spalts. Die Unschärfe des Impulses am Spalt führt dann dazu, dass sich die Photonen vom Spalt aus in verschiedene Richtungen bewegen können. Der Impuls in x-Richtung muss nämlich mindestens so groß wie seine Unschärfe sein.

$$\Delta x\cdot\Delta p_x\geqslant\frac{h}{4\cdot\pi}\quad\rightarrow\quad\Delta p_x\geqslant\frac{h}{4\cdot\pi\cdot\Delta x}$$

$$\Delta p_x\geqslant\frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s}{4\cdot\pi\cdot 0{,}5\cdot 10^{-6}\,m}$$

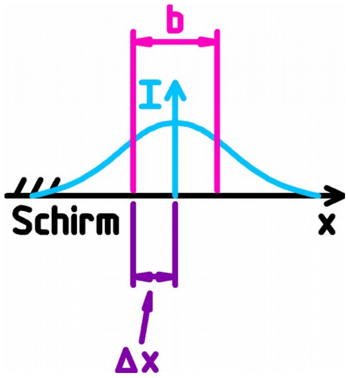
$$\underline{\Delta p_x\geqslant 1{,}05\cdot 10^{-28}\,kg\cdot\frac{m}{s}}$$

c) Wir benutzen die Planfigur und rechnen mit Strahlensatz.



$$\frac{\frac{b}{2}}{p_x}=\frac{2{,}0\,m}{p_0}\quad\rightarrow\quad b=\frac{2\cdot 2{,}0\,m\cdot p_x}{p_0}=\frac{2\cdot 2{,}0\,m\cdot 1{,}05}{8{,}8}=\underline{0{,}47\,m}$$

Zur Abweichung auf dem Schirm (b/2) müssten wir für die Breite des Beugungsbildes noch die Halbe Breite des Spalts addieren. Die Spaltbreite ist hier aber außerhalb des Bereichs der geltenden Ziffern, spielt also keine Rolle.



d) Wir haben nur den Mittelwert der Abweichung ausgerechnet, nicht die maximale Abweichung und auch davon haben wir nur eine Abschätzung gemacht.

Den Wert b/2 von oben kann man dann auch als neue Ortsunschärfe der Teilchen auf der Höhe des Schirms betrachten.

Aufgabe 2.36:

In einer Elektronenstrahlröhre werden Elektronen mit 800V beschleunigt und bewegen sich durch ein Loch in der Anode mit 0,2mm Durchmesser.

Schätze mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation die minimale Aufweitung des Elektronenstrahls auf einer Länge von 20cm ab. D.h. berechne den minimalen Durchmesser des Strahls nach einem Laufweg von 20cm.

Lösung:

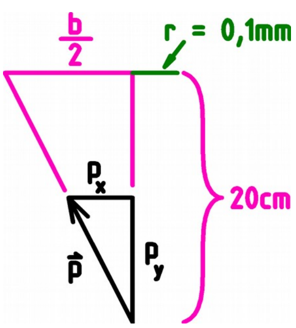
$$U\cdot e=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \quad\rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{2\cdot U\cdot e}{m}}$$

$$p=m\cdot v=\sqrt{2\cdot m\cdot U\cdot e}=\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 800\,V\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C}=\underline{1{,}53\cdot 10^{-23}\,kg\cdot\frac{m}{s}}$$

Wir betrachten wieder Orts- und Impulsunschärfe direkt an der Lochblende.

$$\Delta x=1\cdot 10^{-4}\,m \quad\rightarrow\quad \Delta p\geqslant\frac{h}{4\cdot\pi\cdot\Delta x}=\frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s}{4\cdot\pi\cdot 1\cdot 10^{-4}\,m}=\underline{5{,}25\cdot 10^{-31}\,kg\cdot\frac{m}{s}}$$

Die Impulsunschärfe ist im Vergleich zur Größe des Impulses der Elektronen vernachlässigbar. Schon daran sehen wir, dass es durch Unschärfe zu keiner merklichen Aufweitung des Strahls kommt.



Beim Radius des Strahls müssen wir deshalb sicher den Radius der Blende berücksichtigen. Wir rechnen wieder mit Strahlensatz.

$$\frac{\frac{b}{2}}{p_x}=\frac{0{,}2\,m}{p_0} \quad\rightarrow\quad \frac{b}{2}=\frac{0{,}2\,m\cdot p_x}{p_0}=\frac{0{,}2\,m\cdot\Delta p}{p_0}$$

$$\frac{b}{2}=\frac{0{,}2\,m\cdot 5{,}25\cdot 10^{-31}}{1{,}53\cdot 10^{-23}}=\underline{6{,}9\cdot 10^{-9}\,m}$$

Für den Radius des Strahls müssen wir noch den Radius der Blende addieren.

$$r_{Strahl}=0{,}1\cdot 10^{-3}\,m+6{,}9\cdot 10^{-9}\,m=\underline{0{,}1\,mm}$$

Der Durchmesser des Strahls ist also ungefähr gleich 0,2mm, dem Durchmesser der Blende. Allein durch Unschärfe kommt es nicht zu einer Aufweitung des Strahls.

- ☠ Das ist natürlich auch wieder nur eine Abschätzung. Durch die Geometrie von Glühkathode und Anode kann es zu einer zusätzlichen Aufweitung kommen.

Aufgabe 2.37:

Ein Neutron ist in einem Atomkern mit Durchmesser 10fm gebunden. Schätzen sie mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation den minimalen Impuls und damit die minimale kinetische Energie des gebundenen Neutrons ab. Wie groß muss dann die potentielle Energie des Neutrons sein?

Lösung:

$$\Delta x=5\cdot 10^{-15}\,m \;\rightarrow\; \Delta p\geqslant\frac{h}{4\cdot\pi\cdot\Delta x}=\frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s}{4\cdot\pi\cdot 5\cdot 10^{-15}\,m}=\underline{1{,}05\cdot 10^{-20}\,kg\cdot\frac{m}{s}}$$

$$\Rightarrow\; \underline{p\geqslant 1{,}05\cdot 10^{-20}\,kg\cdot\frac{m}{s}}$$

$$E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=\frac{m^2\cdot v^2}{2\cdot m}=\frac{p^2}{2\cdot m}\geqslant\frac{\left(1{,}05\cdot 10^{-20}\,kg\cdot\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{3{,}3\cdot 10^{-14}\,J=206\,keV}$$

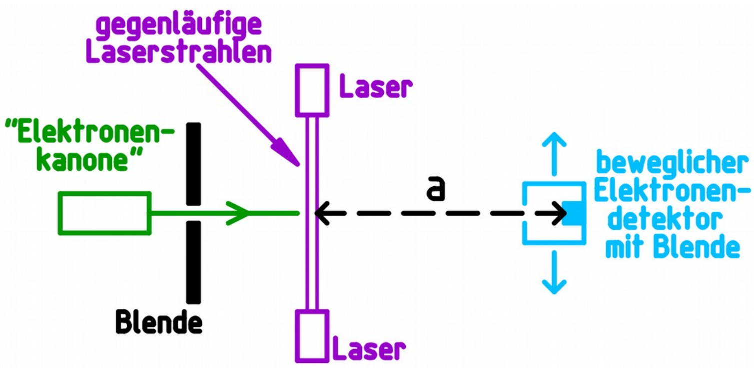
Die kinetische Energie ist also mindestens 206 keV. Damit das Neutron gebunden ist, muss die Gesamtenergie negativ sein, die potentielle Energie des Neutrons muss also deutlich kleiner als - 206 keV sein.

Bemerkung: Die Unschärferelation liefert auch hier nur eine Abschätzung. In Wirklichkeit ist die kinetische Energie eines Neutrons im Kern im Bereich von MeV, also mindestens um das 10-fache größer.

2.5 Abi mit Lösung

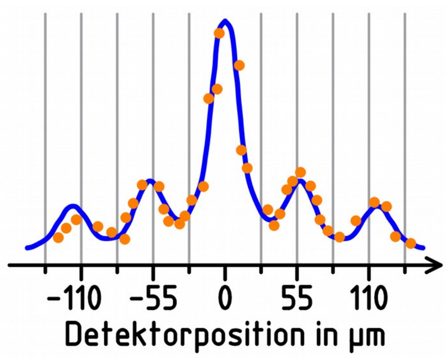
Aufgabe 2.38: Abi 2004 ; Lichtgitter

Die Beugung von Photonen beim Durchgang durch Materiegitter wurde im letzten Jahrhundert genau untersucht. Erst im Jahr 2001 gelang der Nachweis des umgekehrten Phänomens, der Beugung von Elektronen an einem "Lichtgitter", das durch gepulste Laser erzeugt wird.



Im skizzierten Versuchsaufbau erzeugen zwei sich überlagernde, gegenläufige Laserstrahlen (λ = 532 nm) ein "Lichtgitter" mit hoher Photonendichte. Ein Strahl von Elektronen mit der kinetischen Energie E = 380 eV trifft senkrecht auf die Laserstrahlen.

Mit einem beweglichen Elektronendetektor im Abstand a = 24 cm kann das entstehende Interferenzmuster abgetastet werden. Dabei erhält man nebenstehendes Diagramm.



a) Berechnen Sie die de-Broglie-Wellenlänge der Elektronen und bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms die Gitterkonstante des "Lichtgitters".

b) Erläutern Sie unter Berücksichtigung der Laserwellenlänge, wie man sich die Entstehung des "Lichtgitters" vorstellen kann.

Während der Pulsdauer Δt = 10 ns beträgt die von jedem der beiden Laser abgestrahlte Leistung 3,1 MW. Die Laserstrahlen überlagern sich in einem zylindrischen Raumbereich mit Durchmesser d = 125 μm.

c) Berechnen Sie, wie viele Photonen von einem Laser während der Pulsdauer emittiert werden. (Kontrolle: $N = 8{,}3 \cdot 10^{16}$)

d) Berechnen Sie die Länge eines Laserpulses von 10ns Dauer und damit die Photonendichte in Photonen pro Kubikmetern, die von den beiden Lasern bei der Überlagerung erzeugt wird.

Lösung:

a) $E_{kin} = \frac{p^2}{2 \cdot m} = \frac{h^2}{2 \cdot m \cdot \lambda^2} \rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot E_{kin}}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} Js}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg \cdot 380 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J}}$

$\underline{\underline{\lambda_e = 6{,}3 \cdot 10^{-11} m}}$

Maximum 1. Ordnung bei ca. Δy = 60 μm; Kleinwinkelnäherung

$$\lambda_e = d \cdot \frac{\Delta y}{a} \rightarrow d = \frac{\lambda_e \cdot a}{\Delta y} = \frac{6{,}3 \cdot 10^{-11} m \cdot 0{,}24 m}{60 \cdot 10^{-6} m} = \underline{\underline{252 nm}}$$

b) Die gegenläufigen Laserstrahlen erzeugen eine stehende Welle mit Schwingungsbäuchen im Abstand einer halben Wellenlänge, also 266 nm. Zwischen zwei Schwingungsbäuchen ist jeweils ein Schwingungsknoten (Interferenzminimum), also "Nichts". Die Schwingungsbäuche sind die Striche des Gitters.

c) $P \cdot \Delta t = \Delta E = N \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow N = \frac{P \cdot \Delta t \cdot \lambda}{h \cdot c} = \frac{3{,}1 \cdot 10^6 W \cdot 10 \cdot 10^{-9} s \cdot 532 \cdot 10^{-9} m}{6{,}63 \cdot 10^{-34} Js \cdot 3 \cdot 10^8 m/s} = \underline{\underline{8{,}3 \cdot 10^{16}}}$

d) $l = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 m/s \cdot 10 \cdot 10^{-9} s = \underline{3{,}0 m}$

Photonendichte eines einzelnen Laserpulses

$$\frac{N}{V} = \frac{N}{\pi \cdot r^2 \cdot l} = \frac{8{,}3 \cdot 10^{16}}{\pi \cdot (62{,}5 \cdot 10^{-6} m)^2 \cdot 3{,}0 m} = \underline{2{,}25 \cdot 10^{24} \frac{1}{m^3}}$$

Verdoppelung durch Überlagerung gibt Photonendichte: $\underline{\underline{4{,}5 \cdot 10^{24} \frac{1}{m^3}}}$

Aufgabe 2.39: Abi 1999

Elektronen treffen mit einheitlicher Geschwindigkeit senkrecht auf einen Doppelspalt. Auf einem Schirm dahinter entsteht ein Interferenzmuster, dessen Maxima 1. Ordnung den Abstand 10 μm voneinander haben. Der Abstand Doppelspalt-Schirm beträgt a = 0,48 m und der Mittenabstand der Spaltöffnungen b = 2,5 μm.

a) Berechnen Sie an Hand einer beschrifteten Skizze die Wellenlänge λ, die den Elektronen in diesem Versuch zugeordnet werden kann. (Kontrolle: λ = 26 pm)

Die verwendeten Elektronen wurden durch die Spannung U = 2,2 kV beschleunigt.

b) Berechnen Sie nicht-relativistisch die de-Broglie-Wellenlänge unter Verwendung der Beschleunigungsspannung U.

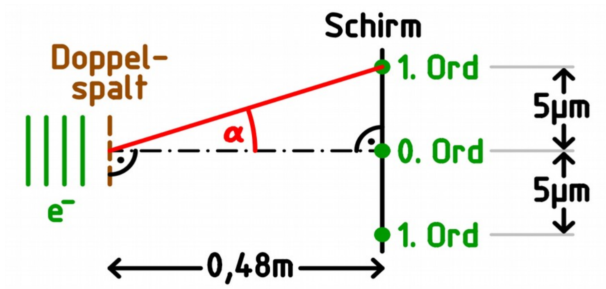
c) Nun wird die Beschleunigungsspannung vergrößert. Geben Sie qualitativ die Veränderung des Streifenmusters an.

Die Versuchsdurchführung wird so abgeändert, dass sich immer nur ein Elektron auf dem Weg zwischen Quelle und Schirm befindet.

d) Beschreiben Sie mit Hilfe von Skizzen, wie das Interferenzmuster im Laufe der Zeit entsteht.

<u>Lösung:</u>

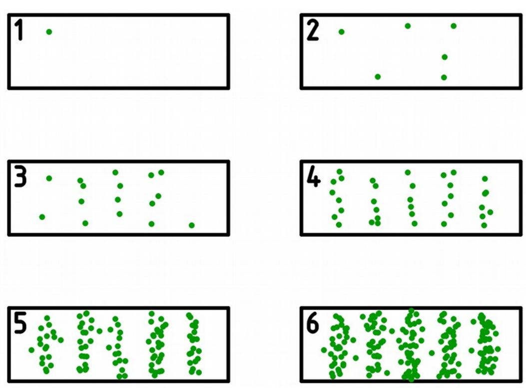
a)
$$1\cdot\lambda=\Delta s\approx b\cdot\sin\alpha\approx b\cdot\frac{5\,\mu m}{a}$$
$$\lambda=2{,}5\cdot10^{-6}\,m\cdot\frac{5\cdot10^{-6}\,m}{0{,}48\,m}=\underline{\underline{26\ pm}}$$



b)
$$U\cdot e=E_{kin}=\frac{p^2}{2\cdot m}=\frac{h^2}{\lambda^2\cdot 2\cdot m}$$
$$\lambda=\sqrt{\frac{h^2}{2\cdot m\cdot U\cdot e}}=\sqrt{\frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\,Js)^2}{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\,kg\cdot2200\,V\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,C}}=\underline{\underline{26\ pm}}$$

c) Das Maximum 0. Ordnung bleibt in der Mitte, die anderen Streifen wandern alle Richtung Mitte.

Bemerkung: Üben Sie auch das Begründen. U nimmt zu -> kinetische Energie nimmt zu -> wegen E = $p^2/(2m)$ nimmt der Impuls zu -> wegen p = h/λ wird die Wellenlänge kleiner -> wegen k·λ = Δs = b·sinα wird sinα also auch α kleiner -> die Maxima wandern nach innen



c) Das erste Elektron erzeugt irgendwo auf den Schirm einen Punkt; genauso alle weiteren; jedoch ist die Wahrscheinlichkeit für eine Wechselwirkung, also für einen Punkt gegeben durch das Amplitudenquadrat der Wellenfunktion, deshalb erscheinen mehr Punkte in der Nähe der Maxima wodurch langsam ein Streifenbild entsteht. Zwischen den Maxima sind nur wenige Punkte, weil dort das Amplitudenquadrat der Wellenfunktion, also auch die Wahrscheinlichkeit für einen Punkt klein ist.

Aufgabe 2.40: Abi 2001

Elektronen mit einheitlicher Geschwindigkeit v treffen auf einen Doppelspalt. Dahinter registriert man in genügend großem Abstand auf einem Beobachtungsschirm, der parallel zur Doppelspaltebene steht, ein äquidistantes Streifenmuster.

a) Zeigen Sie, dass für den Abstand Δd zweier benachbarter Maxima die Beziehung

$$\Delta d = \frac{a \cdot \lambda}{b}$$

gilt, wenn a den Abstand der beiden Spaltmitten und λ die de-Broglie-Wellenlänge der Elektronen bezeichnet. Hinweis: Verwenden Sie die Kleinwinkelnäherung!

b) Welchen Abstand haben die beiden Spaltmitten des Doppelspalts, wenn Elektronen mit der Geschwindigkeit v = 29 Mm/s au dem 0,80 m entfernten Schirm ein Interferenzmuster mit Δd = 10 μm erzeugen? Nichtrelativistische Rechnung!

Lösung:

a)
$$\Delta s_1 = k \cdot \lambda = b \cdot \frac{d_1}{a} \quad ; \quad \Delta s_2 = (k+1) \cdot \lambda = b \cdot \frac{d_2}{a}$$
$$\Delta d = d_2 - d_1 = \frac{(k+1) \cdot \lambda \cdot a}{b} - \frac{k \cdot \lambda \cdot a}{b} = \frac{\lambda \cdot a}{b}$$

b)
$$m \cdot v = p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$
$$b = \frac{\lambda \cdot a}{\Delta d} = \frac{h \cdot a}{m \cdot v \cdot \Delta d} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} J \cdot 0{,}8 m}{9{,}1 \cdot 10^{-31} kg \cdot 19 \cdot 10^6 m/s \cdot 10 \cdot 10^{-6} m} = \underline{\underline{2{,}0 \mu m}}$$

Versuchen Sie zum Training auch eine relativistische Rechnung:

$$p^2 \cdot c^2 + E_0^2 = E^2 = \frac{E_0^2}{1-(v/c)^2} \rightarrow p = \frac{E_0}{c} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-(v/c)^2} - 1}$$
$$p = \frac{511 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J}{3 \cdot 10^8 m/s} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-(0{,}29/3{,}0)^2} - 1} = \underline{2{,}65 \cdot 10^{-23} kg \cdot m/s}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} Js}{2{,}65 \cdot 10^{-23} kg \cdot m/s} = \underline{2{,}5 \cdot 10^{-11} m}$$

$$b = \frac{\lambda \cdot a}{\Delta d} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-11} m \cdot 0{,}8 m}{10 \cdot 10^{-6} m} = \underline{\underline{2{,}0 \mu m}}$$

Aufgabe 2.41: Abi 2003; Experimente mit bewegten Elektronen

In Anlehnung an den Doppelspaltversuch von Jönsson soll der Wellencharakter bewegter Elektronen experimentell nachgewiesen werden. Es steht ein Doppelspalt zur Verfügung, dessen Spaltmitten den Abstand 3,5 µm haben.

a) Die Interferenzfigur wird in einer Nachweisebene betrachtet, die 40 cm vom Doppelspalt entfernt ist. Durch optische Vergrößerung sind die Interferenzstreifen noch gut erkennbar, wenn das Maximum 2. Ordnung in der Nachweisebene einen Abstand von 6,5 µm vom zentralen Maximum hat. Welche De-Broglie-Wellenlänge haben in diesem Fall die Elektronen des verwendeten Elektronenstrahls? (Kontrolle: λ = 28 pm)

In der Bildröhre eines Fernsehgerätes werden Elektronen mit ca. 25 kV beschleunigt. Der Elektronenstrahl wird durch Lochblenden gebündelt, deren Durchmesser in der Größenordnung 1 mm liegt.

c) Erklären Sie, warum dabei keine störenden Beugungserscheinungen auftreten. Argumentieren Sie ohne Rechnung.

d) Beim Abbremsen der Elektronen am Bildschirm entsteht Röntgenstrahlung. Warum kann man - im Hinblick auf die jeweils auftretenden Energieumwandlungen - die Erzeugung der Röntgenbremsstrahlung grob vereinfacht als "Umkehrung des Photoeffekts" auffassen? <- Das können Sie erst beantworten, wenn wir Röntgenröhren im Unterricht gemacht haben.

e) Warum kann man mit einem Strichgitter, wie man es zur spektralen Zerlegung sichtbaren Lichts verwendet, kein Röntgenspektrum erzeugen? Was wäre nötig, um die Wellennatur von Röntgenstrahlung im Interferenzversuch nachzuweisen?

Lösung:

a) $2\cdot\lambda=\Delta s=d\cdot\frac{\Delta y}{l}$ → $\lambda=\frac{d\cdot\Delta y}{2\cdot l}=\frac{3{,}5\cdot10^{-6}m\cdot6{,}5\cdot10^{-6}m}{2\cdot0{,}4m}=\underline{\underline{28\,pm}}$

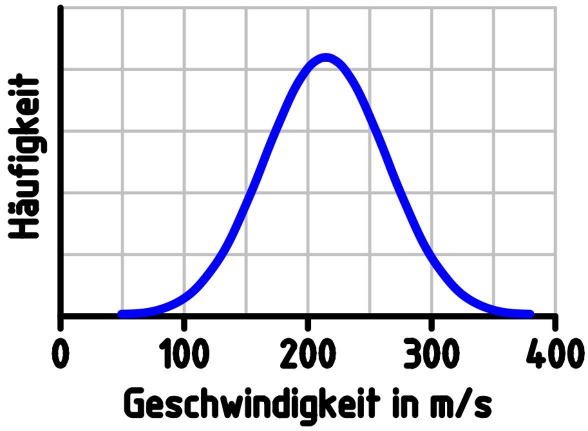
b) Wegen der größeren Beschleunigungsspannung ist die Wellenlänge dieser Elektronen noch viel kleiner als 28 pm, also insbesondere sehr klein im Vergleich zum Durchmesser der Lochblende (1 mm) -> nur wenig Beugung

c) Beim Photoeffekt wird Photonenenergie in Auslösearbeit (Bindungsenergie) und kinetische Energie des Photoelektrons umgewandelt. Bei der Röntgenbremsstrahlung wird die kinetische Energie plus die freiwerdende Bindungsenergie (die aber im Vergleich sehr klein ist) in Photonenenergie eines Röntgenquants umgewandelt.

e) Die Wellenlänge von Röntgenstrahlung ist um das tausend- bis millionenfache kleiner als die von sichtbarem Licht, deshalb wären die Maxima viel zu eng beieinander um sie getrennt wahrnehmen zu können. Man bräuchte ein Gitter dessen Gitterkonstante viel weniger über der Größenordnung der Wellenlänge von Röntgenstrahlung liegt, also eine viel kleinere Gitterkonstante.

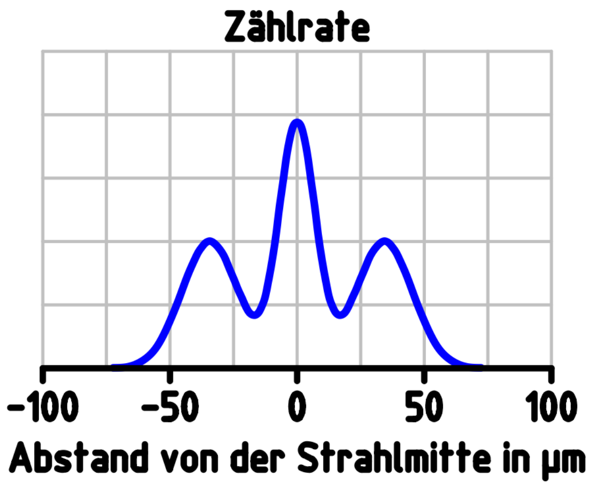
<u>Aufgabe 2.42: Abi 2006; Materiewellen bei Fullerenen</u>

Fullerene sind Moleküle, die in ihrer Struktur einem Fußball gleichen und aus jeweils 60 Kohlenstoffatomen bestehen. Durch das Erhitzen einer Fullerenprobe wird ein Fullerenstrahl erzeugt, der Moleküle unterschiedlicher Geschwindigkeiten enthält (vgl. nebenstehende Abb. mit idealisierter Messkurve).



a) Berechnen Sie näherungsweise die de-Broglie-Wellenlänge eines Fullerens, welches die Geschwindigkeit besitzt, die am häufigsten auftritt. (Nehmen Sie an, dass es sich ausschließlich um C12-Atome handelt.) (Kontrolle: $\lambda \approx 2{,}6$ pm)

Ein gebündelter Strahl aus Fullerenen trifft auf ein Gitter mit dem Spaltmittenabstand b = 100 nm. In einer Entfernung von a = 1,25 m hinter dem Gitter befindet sich ein Detektor, der die auftreffenden Moleküle registriert. Dabei ergibt sich näherungsweise der nebenstehende Kurvenverlauf für die Zählrate in Abhängigkeit vom Ort.



b) Erläutern Sie die Graphik. Berechnen Sie mit ihrer Hilfe die Wellenlänge der Materiewelle und zeigen Sie, dass deren Größenordnung mit der Theorie von de Broglie übereinstimmt.

c) Geben Sie aufgrund der experimentellen Gegebenheiten eine Begründung dafür an, dass die registrierte Zählrate bei den Minima nicht Null beträgt.

Lösung:

a)
$$v \approx 215\, m/s$$
$$m \cdot v = p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Js}{60 \cdot 12 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\, kg\, 215\, m/s} = \underline{\underline{2{,}58\, pm}}$$

b) Hinter dem Gitter kommt es zur Interferenz der Materiewelle, es bilden sich Minima und Maxima. In der Graphik sichtbar ist das Hauptmaximum 0. Ordnung in der Mitte, die Maxima 1. Ordnung bei ca. ±35 µm und die Minima bei ca. ±20 µm. Zum Rechnen benutzten wir die Maxima.

$$\lambda = \Delta s = d \cdot \frac{\Delta y}{l} = 100 \cdot 10^{-9}\, m \cdot \frac{35 \cdot 10^{-6}\, m}{1{,}25\, m} = \underline{\underline{2{,}8\, pm}}$$

Die Abweichung von dem aus der Geschwindigkeit ermittelten Wert beträgt 7,7%. D.h. die Übereinstimmung ist zwar nicht exakt, jedoch stimmt die Größenordnung, also Picometerbereich.

c) Da die Geschwindigkeit der Fullerene eine kontinuierliche Verteilung besitzt, gilt dies auch für die Wellenlängen. Die unterschiedlichen im Strahl vorkommenden Wellenlängen bilden ihr Minimum an verschiedenen Stellen aus, d.h. es gibt keinen Ort, an dem sich alle Wellenlängen auslöschen, also kein extrem stark ausgeprägtes Minimum.

Aufgabe 2.43: Abi 2010; Materiewellen

Bei einem Doppelspaltversuch treffen beschleunigte Elektronen mit der Materiewellenlänge λ = 30 pm auf einen Doppelspalt mit dem Spaltmittenabstand b = 6,2 µm.

a) Berechnen Sie für die Wellenlänge λ nichtrelativistisch die Geschwindigkeit v der Elektronen und die erforderliche Beschleunigungsspannung, welche die zu Anfang ruhenden Elektronen durchlaufen müssen, damit sie diese Geschwindigkeit erreichen. (Kontrolle: v ≈ 2400 km/s)

b) Der Abstand zwischen Schirm und Doppelspalt beträgt l = 1,00 m. Berechnen Sie den Abstand x zwischen dem 0. und 1. Interferenzmaximum.

Die Impulsunschärfe Δp_x senkrecht zur Flugrichtung lässt sich mithilfe der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$ abschätzen. Legen Sie als Ortsunschärfe Δx den Spaltmittenabstand b zugrunde.

c) Berechnen Sie die Impulsunschärfe Δpx und die dazugehörige Gechwindigkeitskomponente Δvx senkrecht zur Flugrichtung der Elektronen. (Kontrolle: Δvx ≈ 120 m/s)

d) Um die Konsequenzen der Unschärferelation für den Fall des Doppelspalts zu veranschaulichen, soll nun ein klassisches Teilchen betrachtet werden, das am Doppelspalt die in Teilaufgabe c) berechnete Geschwindigkeitskomponente Δvx besitzt. Berechnen Sie den Abstand eines Teilchens ohne eine solche Geschwindigkeitskomponente auf dem Schirm und vergleichen Sie mit den Abmessungen des Interferenzmusters.

e) Der Interferenzversuch wird mit so wenigen Elektronen durchgeführt, dass die Auftreffpunkte der einzelnen Teilchen auf dem Schirm nachweisbar sind. Dabei wird der Doppelspalt dam Elektronenstrahl so kurz ausgesetzt, dass praktisch alle verwendeten Elektronen gleichzeitig durch den Doppelspalt treten. Beschreiben Sie anhand einer Skizze das zu erwartende Schirmbild.

f) Nun wird der Versuch so durchgeführt, dass zwar die gleiche Elektronenzahl wie in Teilaufgabe e) auf dem Schirm auftrifft, allerdings über einen deutlich längeren Zeitraum verteilt, dass sich im Bereich des Doppelspalts stets nur ein Elektron befindet. Beschreiben Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten bei der Entstehung des zu erwartenden Schirmbilds im Vergleich zu Teilaufgabe e). Erläutern Sie, ob und ggf. wie sich die Schirmbilder nach Abschluss der beiden Versuche unterscheiden. Welchen Einfluss hat die Wechselwirkung der Elektronen untereinander auf das Schirmbild?

g) Man kann ein ähnliches Schirmbild wie in Teilaufgabe e) auch mit Licht erzeugen. Welche Bedingungen muss das dabei verwendete Licht erfüllen?

Lösung:

a) $\frac{h}{\lambda} = p = m \cdot v \rightarrow v = \frac{h}{m \cdot \lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 30 \cdot 10^{-12}\,m} = \underline{2{,}43 \cdot 10^{7}\,m/s}$

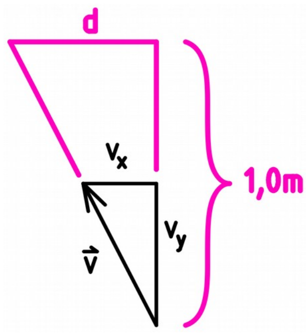
$$U \cdot e = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow U = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot e} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot \left(2{,}43 \cdot 10^{7}\,m/s\right)^2}{2 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,C} = \underline{\underline{1{,}68\,kV}}$$

b) $1 \cdot \lambda = \Delta s = b \cdot \frac{x}{l} \rightarrow x = \frac{l \cdot \lambda}{b} = \frac{1{,}00\,m \cdot 30 \cdot 10^{-12}\,m}{6{,}2 \cdot 10^{-6}\,m} = \underline{4{,}84\,\mu m}$

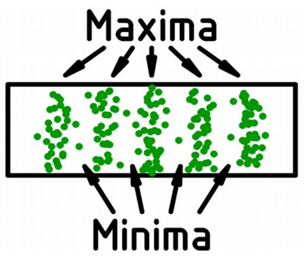
c) $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h \rightarrow \Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js}{6{,}2 \cdot 10^{-6}\,m} = \underline{1{,}07 \cdot 10^{-28}\,kg \cdot m/s}$

$$\Delta p_x = m \cdot \Delta v_x \;\rightarrow\; \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{1{,}07 \cdot 10^{-28}\, kg \cdot m/s}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg} = \underline{\underline{118\, m/s}}$$

d) $$\frac{d}{l} = \frac{v_x}{v_y} \;\rightarrow\; d = \frac{l \cdot v_x}{v_y} = \frac{1{,}0\, m \cdot 118\, m/s}{2{,}43 \cdot 10^{7}\, m/s} = \underline{\underline{4{,}86\, \mu m}}$$

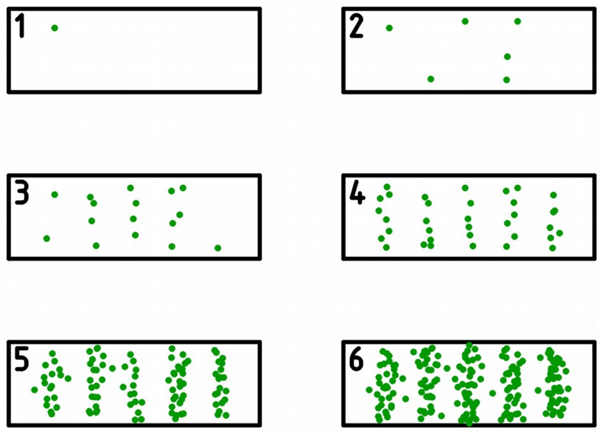


Das ist ziemlich genau der Abstand vom Maximum 1. Ordnung vom Hauptmaximum. D.h. falls die Ortsunschärfe sinnvoll eingesetzt ist, wirkt sich die Unschärfe deutlich auf die Sichtbarkeit des Interferenzmusters aus.



e) An den Stellen der Maxima treffen mehr Elektronen auf als an den Stellen der Minima. Die einzelnen Auftreffpunkte sind laut Angabe sichtbar. Das Interferenzmuster sollte laut den Überlegungen in d) recht verschmiert sein, also nicht besonders deutlich.

d) Entstehung: Bei e) entsteht das Bild auf einmal, bei d) dagegen entstehen die Auftreffpunkte erst nach und nach, so dass zu Anfang gar kein Muster erkennbar ist. Erst später, wenn genügend Elektronen registriert worden sind wird deutlich, dass die Auftreffwahrscheinlichkeit an den Stellen der Maxima größer ist, als anderswo.



Schirmbild: Es entsteht prinzipiell ein Muster derselben Struktur wie in e). Der einzige Unterschied resultiert aus der gegenseitigen Coulomb-Abstoßung der Elektronen untereinander, wodurch die Maxima etwas weiter auseinander liegen sollten.

g) 1. monochromatisches Licht, also Licht einer einheitlichen Wellenlänge

2. die Intensität des verwendeten Lichts muss so klein sein, dass einzelne Wechselwirkungen mit Photonen auf dem Schirm nachweisbar sind, also sehr klein
3. die Wellenlänge des Lichts muss kleiner als der Spaltabstand des Doppelspalts sein; wenn man dasselbe Bild erzeugen will muss die Wellenlänge des Lichts mit der der Elektronen übereinstimmen, also Röntgenstrahlung mit λ = 30 pm

Aufgabe 2.44: Abi 2013; Doppelspaltexperiment mit Heliumatomen

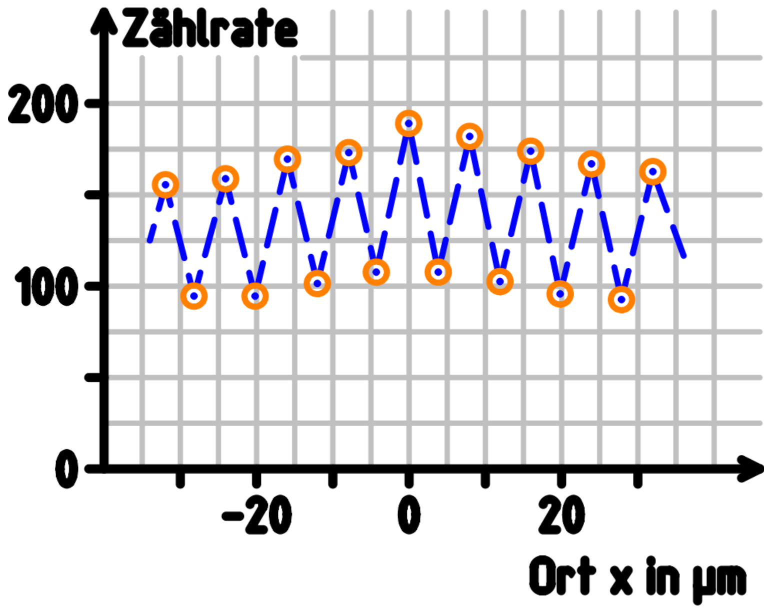
Anfang des 20. Jahrhunderts postulierte der Physiker de Broglie aufgrund theoretischer Überlegungen, dass auch Materieteilchen eine Wellenlänge zugeordnet werden kann.

a) Folgern Sie mit Hilfe der Masse-Energie-Beziehung $E = m \cdot c^2$, dass ein Photon den Impuls $p = h/\lambda$ besitzt. Führen Sie anschließend eine Analogiebetrachtung zwischen Photonen und Materieteilchen durch, aus der sich die Festlegung der so genannten De-Broglie-Wellenlänge ergibt.

Im Jahr 1991 wurde ein Doppelspaltexperiment mit Heliumatomen durchgeführt, das die Theorie von de Broglie auch für Atome bestätigt. Gehen Sie im Weiteren davon aus, dass sich im Experiment He4-Atome der Masse 4,002603 u mit einer Geschwindigkeit von $v = 970\ \text{m/s}$ auf einen Doppelspalt zubewegen.

b) Berechnen Sie die nach den Überlegungen von de Broglie zu erwartende Wellenlänge λ der He4-Atome.

Hinter dem Doppelspalt, der den Spaltmittenabstand $d = 8\ \mu\text{m}$ besitzt, ist im Abstand $a = 64\ \text{cm}$ ein Detektorschirm parallel zur Doppelspaltebene montiert. Auf dem Detektorschirm zeigt sich ein typisches Interferenzmuster. Das nebenstehende Diagramm stellt die Anzahl der in einer gewissen Zeit auf dem Detektorschirm registrierten Heliumatome in Abhängigkeit vom Ort x relativ zum Maximum 0. Ordnung dar.



c) Bestätigen Sie rechnerisch unter Verwendung des Diagramms die De-Broglie-Wellenlänge der He4-Atome aus Teilaufgabe b). Veranschaulichen Sie alle in Ihrer Rechnung verwendeten Größen in einer übersichtlichen Skizze.

d) Für die Durchführung des beschriebenen Experiments ist eine weitgehend einheitliche Geschwindigkeit der He4-Atome wichtig. Begründen Sie diese Forderung und erläutern Sie eine analoge Versuchsbedingung für einen Doppelspaltversuch mit Licht.

e) In einer Abwandlung des oben beschriebenen Doppelspaltversuchs wird die Teilchenzahl so stark reduziert, dass die He4-Atome auf dem Detektorschirm einzeln und nacheinander registriert werden können. Der Versuchsaufbau selbst bleibt unverändert. Nehmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen begründet Stellung:

i) Der Auftreffort eines Atoms auf dem Detektorschirm lässt sich nicht konkret vorhersagen.
ii) Jedes registrierte Atom hat genau einen der beiden Spalte passiert.
iii) Über die Verteilung der Auftrefforte auf dem Detektorschirm, die sich nach vielen Stunden zeigt, lässt sich keine Aussage machen.

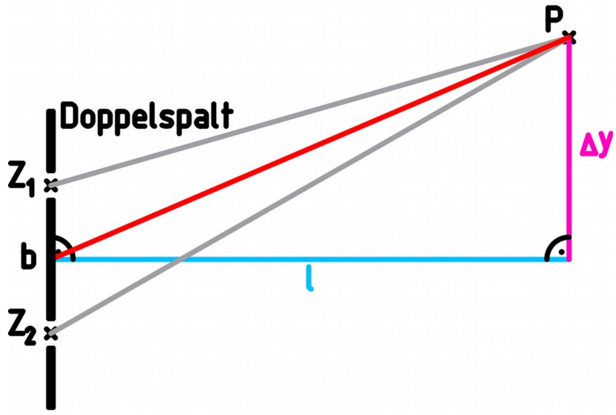
Lösung:

a) $h\cdot\frac{c}{\lambda}=h\cdot f=E=m\cdot c^2=(m\cdot c)\cdot c=p\cdot c$ → $\frac{h\cdot c}{\lambda}=p\cdot c$ → $\underline{p=\frac{h}{\lambda}}$

Wenn für Materieteilchen ebenfalls p = h/λ gilt, dann ist die De-Broglie-Wellenlänge gegeben durch λ = h/p.

b) $\lambda=\frac{h}{p}=\frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js}{4{,}00\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 9700\,m/s}=\underline{\underline{1{,}03\cdot 10^{-10}\,m}}$

c) Der Schirm befindet sich l = 0,64 m hinter dem Doppelspalt. Der Abstand der Maxima 4. Ordnung zum Hauptmaximum beträgt Δy = 32 µm. Der Spaltabstand beträgt b = 8 µm.



Kleinwinkelnäherung:

$$4\cdot\lambda=b\cdot\frac{\Delta y}{l} \rightarrow \lambda=\frac{b\cdot\Delta y}{4\cdot l}$$
$$\lambda=\frac{8\cdot 10^{-6}\,m\cdot 32\cdot 10^{-6}\,m}{4\cdot 0{,}64\,m}=\underline{\underline{1{,}0\cdot 10^{-10}\,m}}$$

d) Die Position der Maxima ist wegen $k\cdot\lambda=b\cdot\frac{\Delta y}{l}$ abhängig von der Wellenlänge der Atome und die Wellenlänge ist wegen $\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{m\cdot v}$ abhängig von der Geschwindigkeit der Teilchen. Wenn die Geschwindigkeitsverteilung zu breit ist, dann verschmieren die Maxima auf dem Schirm, und die Maxima verschiedener Ordnung lassen sich nicht mehr voneinander unterscheiden, so dass eine Messung unmöglich wird.

Die analoge Forderung für Licht wäre Licht einheitlicher Wellelänge, also monochromatisches Licht.

e) i) Richtig; es lassen sich nur Aussagen über Wahrscheinlichkeiten der Auftrefforte machen.

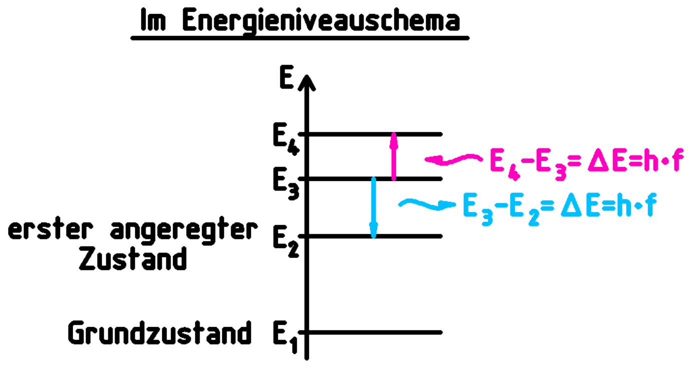
ii) Falsch; jedes Atom, das einen Beitrag zum Interferenzmuster liefert hat beide Spalte passiert, weil sonst die beiden Teilwellen gar nicht miteinander interferieren hätten können.

iii) Falsch; das Betragsquadrat der Wellenfunktion gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreffen an einem bestimmten Punkt des Schirms, deshalb zeigt sich nach vielen Stunden bei dem an Orten mit einer hohen Wahrscheinlichkeit viele Treffer sind und an Orten mit einer niedrigen Wahrscheinlichkeit nur wenige Treffer.

3 Elektron im Potentialtopf

Energie: Ein Elektron wird durch eine Wellenfunktion beschrieben. Für Wellenfunktionen schreibt man gerne Ψ oder φ. Zu jeder Wellenfunktion gehört eine bestimmte Energie E des Elektrons, die sich im allgemeinen aus potentieller und kinetischer Energie zusammensetzt.

Zustand: Besitzt das Elektron die Wellenfunktion φ_k mit der Energie E_k dann sagt man:"Das Elektron befindet sich im Zustand k mit der Energie E_k ." Bei gebundenen Elektronen sind nur ganz bestimmte (diskrete) Werte für die Energie möglich und keine dazwischen (Erinnere: 9te Klasse, diskrete Energieniveaus von Atomen).

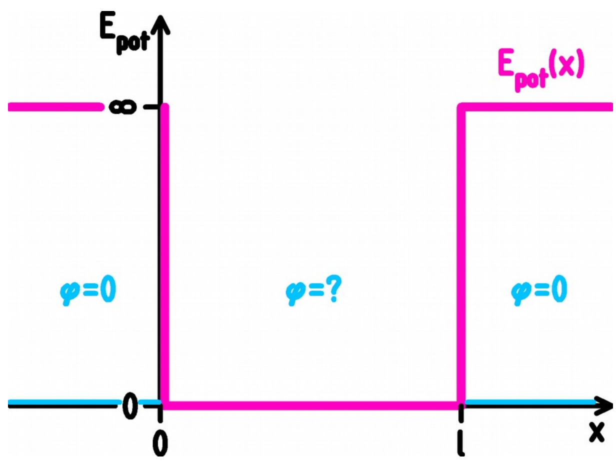


Grundzustand: Der Zustand mit der kleinstmöglichen Energie heißt der Grundzustand. Die Zustände mit höherer Energie heißen angeregte Zustände, also erster angeregter Zustand für den Zustand mit der zweitkleinsten Energie.

Übergang: Wenn das Elektron vom Zustand k in den Zustand m übergeht, gibt es die Energie $\Delta E = E_k - E_m$ ab, bzw. muss diese Energie aufnehmen. Häufig wird die Energie in Form von Photonen mit der Energie $E = h \cdot f$ umgesetzt.

3.1 Unendlich hoher Potentialtopf

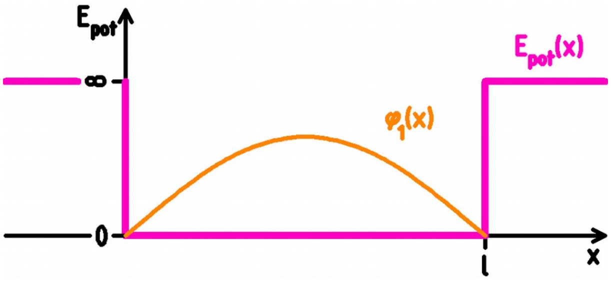
Unser Potentialtopf habe die Länge l. Innerhalb des Potentialtopfes ist die potentielle Energie gleich Null. Außerhalb des Topfes ist die potentielle Energie unendlich groß, deshalb kann sich das Elektron unmöglich außerhalb des Topfes aufhalten. Die Wellenfunktion muss deshalb außerhalb des Topfes gleich Null sein. Wie die Wellenfunktionen innerhalb des Topfes aussehen überlegen wir uns anschaulich.



➔ Die gesuchten Wellenfunktionen sind sinusförmige, stehende Wellen.

➔ Da die Wellenfunktion außerhalb des unendlich hohen Potentialtopfes bis zum Rand Topfes Null ist, muss die Wellenfunktion am Rand des Potentialtopfes jeweils eine Nullstelle haben (Stetigkeit der Wellenfunktion).

Die einfachste solche stehende Welle ist die im Bild gezeichnete. Im Lauf der Rechnung werden wir erkennen, dass dies der Grundzustand ist. Das Elektron hat im Topf die potentielle Energie Null, besitzt also nur kinetische Energie. Wir berechnen Wellenlänge und Energie:



$$l=\frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda=2\cdot l \Rightarrow E=E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2\cdot v^2}{m}=\frac{p^2}{2\cdot m}=\frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2\cdot m}=\frac{\left(\frac{h}{2\cdot l}\right)^2}{2\cdot m}=\frac{h^2}{4\cdot l^2\cdot 2\cdot m}=\frac{h^2}{8\cdot m\cdot l^2}$$

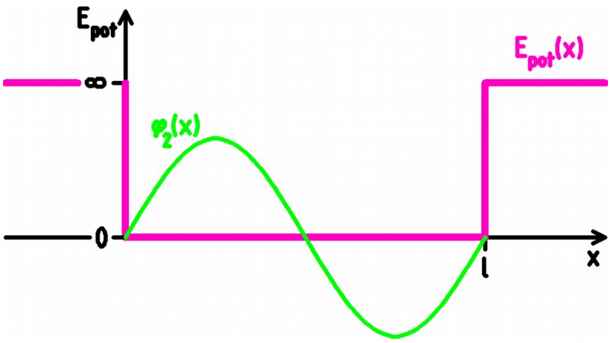
Grundzustand: $\lambda_1=2\cdot l \qquad E_1=\frac{h^2}{8\cdot m\cdot l^2}$

Die nächstmögliche Wellenfunktion ist im Bild gezeichnet. Für diese gilt:

$$l=\lambda \rightarrow \lambda=l$$

$$E=E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=\frac{m\cdot v^2}{2}=\frac{m^2\cdot v^2}{2\cdot m}$$

$$=\frac{p^2}{2\cdot m}=\frac{\left(\frac{h}{l}\right)^2}{2\cdot m}=\frac{h^2}{2\cdot m\cdot l^2}$$



Erster angeregter Zustand: $\lambda_2=l \qquad E_2=\frac{h^2}{2\cdot m\cdot l^2}$

Bei der k-ten Wellenfunktion passen k Stück halbe Sinuswellen in den Potentialtopf.

$$l=k\cdot\frac{\lambda_k}{2} \rightarrow \lambda_k=\frac{2\cdot l}{k} \Rightarrow E_k=E_{kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=\frac{m\cdot v^2}{2}=\frac{m^2\cdot v^2}{2m}=\frac{p^2}{2\cdot m}=\frac{\left(\frac{h}{\lambda_k}\right)^2}{2\cdot m}=\frac{\left(\frac{h\cdot k}{2\cdot l}\right)^2}{2\cdot m}=\frac{h^2\cdot k^2}{8\cdot m\cdot l^2}$$

k-ter Zustand im unendlich hohen Potentialtopf:

$$l = k \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \lambda_k = \frac{2 \cdot l}{k}$$

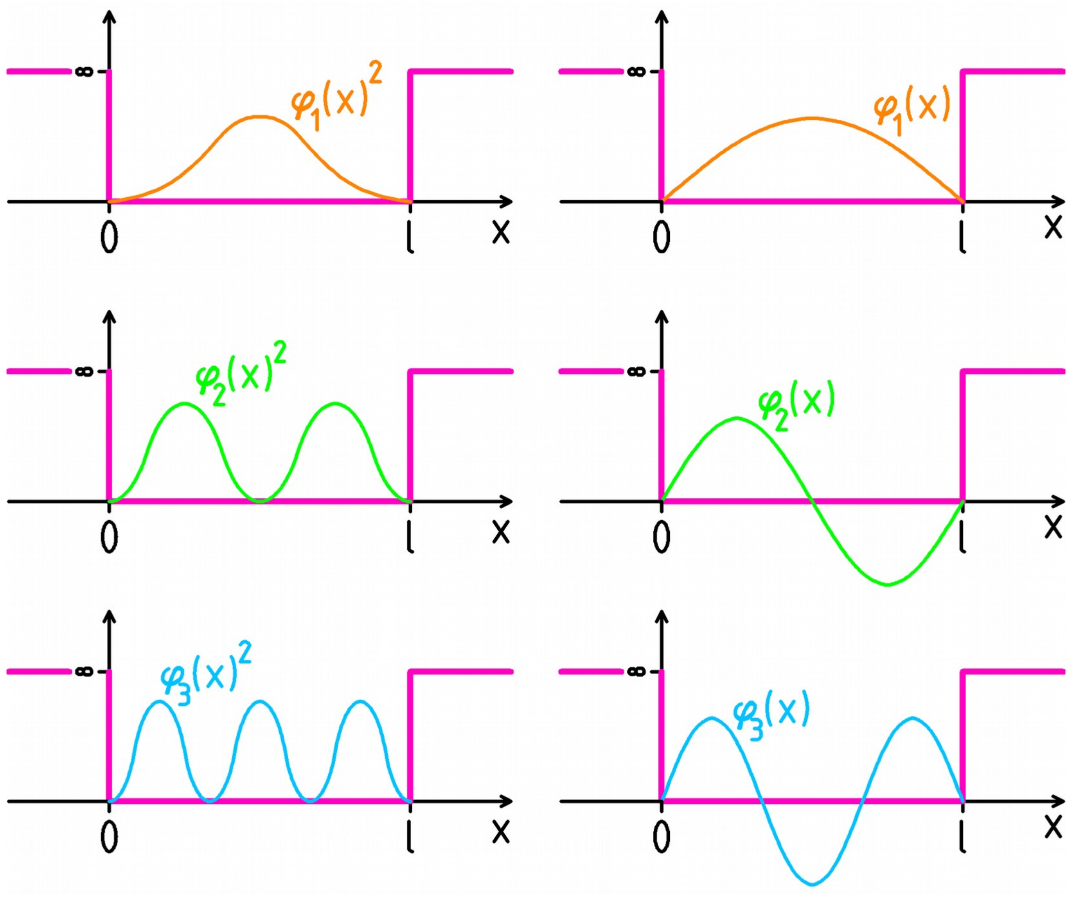
$$E_k = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot l^2} \cdot k^2$$

Dabei ist k = 1; 2; 3; ...   D.h. k darf nicht Null sein

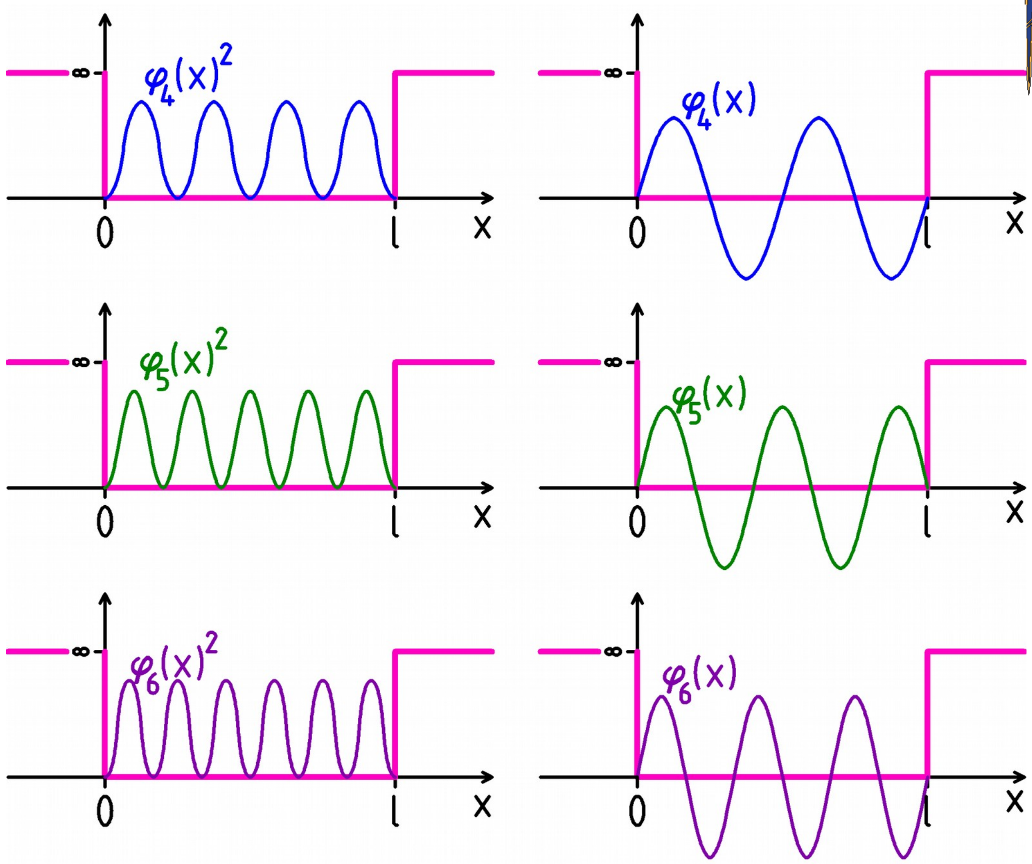
Der Zustand mit k = 1 ist der Grundzustand.

Beachte: Der dritte Zustand (mit k = 3) ist der zweite angeregte Zustand. Der vierte Zustand (mit k = 4) ist der dritte angeregte Zustand, usw..

Wenn man die Wellenfunktion quadriert erhält man die Wahrscheinlichkeitsdichte der Wellenfunktion in Abhängigkeit von x.



An den Knotenpunkten der stehenden Wellen sind die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten jeweils Null. Beim Zeichnen achten Sie darauf, dass solche Graphen keine Ecken haben sondern rund sind.



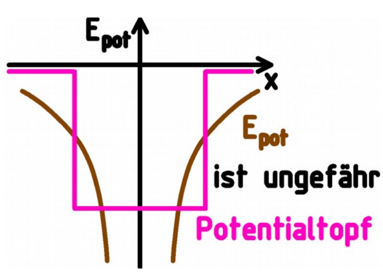
Bemerkungen:

➔ Im Grundzustand ist die kinetische Energie größer als Null. D.h. das Elektron kann nicht in Ruhe sein, das ist quantenmechanisch unmöglich.

➔ Je kleiner die Wellenlänge, desto größer ist die Energie des Teilchens.

➔ Das wir die potentielle Energie im Innern des Topfes gleich Null gesetzt haben ist keine Einschränkung. Bei einer potentiellen Energie kann man sich ja immer einen beliebigen Vergleichspunkt wählen.

Modell:



Der unendlich hohe Potentialtopf ist zwar nur ein Modell, das in der Natur gar nicht vorkommt. In der Physik benutzen wir aber gern solche Modelle, weil sie sehr leicht logisch zu untersuchen sind. Die Erkenntnisse kann man dann nutzen, um wenigstens näherungsweise Aussagen über tatsächlich existierende Systeme die dem Potentialtopf ähnlich sind machen zu können. Dem Potentialtopf ähnlich ist näherungsweise jedes anziehende Potential, deshalb ist der Potentialtopf so allgemein.

Aufgabe 3.45:

Ein Elektron befindet sich in einem Potentialtopf mit einer Länge von 0,8nm.

a) Bestimme die Energien des Grundzustands und der ersten zwei angeregten Zustände und zeichne damit ein maßstabsgetreues Energieniveauschema für die ersten drei Zustände.

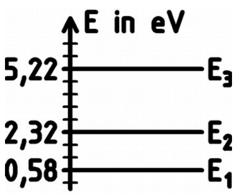
b) Zeichne alle möglichen Übergänge bei denen ein Photon emittiert wird in das Energieniveauschema oben ein und bestimme die dazugehörigen Energien der Photonen. Welche der Photonen liegen im sichtbaren Spektrum?

c) Durch den Potentialtopf wird die Ortsunschärfe des Elektrons stark eingeengt. Bestimme mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation das kleinstmögliche Impulsquadrat des Elektrons und damit seine kleinstmögliche Energie. Vergleiche mit der Energie des Grundzustands und begründe ob das Ergebnis plausibel ist.

Lösung:

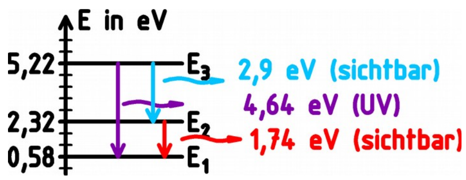
a) $$E_1 = \frac{h^2 \cdot 1^2}{8 \cdot m \cdot l^2} = \frac{\left(6{,}6 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s\right)^2}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg \cdot (0{,}8 \cdot 10^{-9}\, m)^2} = \underline{9{,}35 \cdot 10^{-20}\, J = 0{,}58\, eV}$$

$$E_2 = \frac{h^2 \cdot 2^2}{8 \cdot m \cdot l^2} = 0{,}58\, eV \cdot 4 = \underline{2{,}32\, eV} \quad ; \quad E_3 = \frac{h^2 \cdot 3^2}{8 \cdot m \cdot l^2} = 0{,}58\, eV \cdot 9 = \underline{5{,}22\, eV}$$



Wenn man so krumme Zahlen auf eine maßstabsgetreue Achse bringen will nimmt man einfach ein Kästchen für den kleinsten Wert, die anderen sind dann bei vier bzw. 9 Kästchen.

b) Im sichtbaren Spektrum liegen die Photonen zwischen 1,6eV und 3,2eV. Die Wellenlängengrenzen sind 390nm und 780nm.



c) $$\Delta p \geqslant \frac{h}{4 \cdot \pi \cdot \Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-9}\, m} = \underline{1{,}3 \cdot 10^{-25}\, kg \cdot \frac{m}{s}}$$

$$E \geqslant \frac{\Delta p^2}{2 \cdot m} = \frac{\left(1{,}3 \cdot 10^{-25}\, kg \cdot m/s\right)^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg} = \underline{9{,}3 \cdot 10^{-21}\, J = 0{,}058\, eV}$$

Die tatsächliche Energie im Grundzustand ist größer als die Mindestenergie, passt.

Diskrete Energiewerte, Linienspektren:

Die Tatsache, dass gebundene Elektronen nur ganz bestimmte Energieniveaus annehmen können ist die Ursache dafür, dass Systeme mit gebundenen Elektronen - z.B. auch Atome oder Moleküle - nur Photonen mit ganz bestimmten Energiewerten - also auch mit ganz bestimmten Wellenlängen - emittieren oder absorbieren können. Dies führt zur Entstehung der charakteristischen Linienspektren im Gegensatz zu kontinuierlichen Spektren. Buch S.44 und S.45 unbedingt nachlesen)

Aufgabe 3.46:

a) Skizziere einen Versuchsaufbau zur Aufnahme des Emissionsspektrums eines Leuchtenden Gases.

b) Eine meiner Lieblingsfragen: Ein Absorptionsspektrum entsteht dadurch, dass man Licht aus einem kontinuierlichen Spektrum, in dem alle Wellenlängen vorkommen, durch ein Gas schickt. Genau die Wellenlängen, welche das Gas emittieren kann, kann es auch absorbieren. Diese Wellenlängen fehlen dann im Spektrum und sind im ‚kontinuierlichen Spektrum als schwarze Striche sichtbar. Es ist aber so, dass die von den Photonen angeregten Elektronen sehr schnell ($\Delta t \approx 10$ns) wieder in den Grundzustand zurückfallen und dabei wieder Photonen von genau der Wellenlänge emittieren, von der sie angeregt wurden.

Weshalb fehlt dieses Licht dann trotzdem im Spektrum?

c) Auch eine meiner Lieblingsfragen: Eisen-Atome erzeugen ein charakteristisches Linienspektrum mit den Wellenlängen 431nm, 438nm, 468nm und 527nm im sichtbaren Bereich. Ein glühender Eisendraht erzeugt aber nicht diese Linien.

Weshalb ist das so?

Der glühende Draht erzeugt ein kontinuierliches Spektrum. Was lässt sich daraus für die möglichen Zustände der Elektronen im Eisendraht folgern?

Aufgabe 3.47:

Ein Elektron im Potentialtopf emittiert Photonen der Wellenlänge 492,3nm. Diese Photonen entstehen durch den Übergang vom zweiten angeregten Zustand in den ersten angeregten Zustand.

Berechne die Länge l des Potentialtopfes.

Lösung:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \quad ; \qquad E = E_3 - E_2 = \frac{h^2 \cdot 3^2}{8 \cdot m \cdot l^2} - \frac{h^2 \cdot 2^2}{8 \cdot m \cdot l^2} = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot l^2} \cdot (9-4) = \frac{5 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot l^2}$$

Gleichsetzen gibt: $h \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{5 \cdot h^2}{8 \cdot m \cdot l^2} \rightarrow l = \sqrt{\frac{5 \cdot h \cdot \lambda}{8 \cdot m \cdot c}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-34}\, J \cdot s \cdot 492{,}3 \cdot 10^{-9}\, m}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}} = \underline{0{,}86\, nm}$

3.2 Mehrelektronensysteme

Spin:

Wir haben schon gesehen, dass ein Elektron nicht ohne kinetische Energie sein kann. Das Elektron kann also nicht still stehen, das ist eine Quantenmechanische Unmöglichkeit (schon wegen der Unschärferelation). Ein Elektron kann außerdem auch nicht ohne Drehimpuls existieren, d.h. jedes Elektron muss sich gewissermaßen um sich selbst drehen. Man sagt, das Elektron besitzt einen Spin (genauso wie Protonen oder Neutronen). Bezüglich einer beliebig gewählten Blickrichtung kann sich das Elektron eher im Uhrzeigersinn drehen oder eher gegen den Uhrzeigersinn. Das Elektron kann also nur genau zwei verschiedene Spin-Zustände annehmen. Spin up (↑) oder Spin down (↓). Bei den Systemen die wir betrachten werden die beiden verschiedenen Wellenfunktionen, die sich nur durch ihren Spin unterscheiden, immer dieselbe Energie besitzen.

Pauli-Prinzip:

In einem System mit mehreren Elektronen kann jede mögliche Wellenfunktion nur von einem einzigen Elektron besetzt werden (das gilt auch für Systeme mit mehreren Protonen oder für Systeme mit mehreren Neutronen). Die Wellenfunktionen, die wir im Potentialtopf gefunden haben, waren aber noch nicht vollständig, es fehlt der Spin. Von jeder dieser Wellenfunktionen gibt es also zwei Typen, eine mit Spin up und eine mit Spin down. D.h. jeder energetische Zustand kann von zwei Elektronen besetzt werden. Im Grundzustand mit mehreren Elektronen werden die energetischen Zustände einfach von unten nach oben aufgefüllt, bis alle Elektronen einen Platz haben.

Aufgabe 3.48:

Berechne die Energie des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands für einen Potentialtopf der Länge 0,5nm der mit 6 Elektronen besetzt ist. Welche Wellenlänge haben die zu diesem Übergang gehörenden Photonen? Wo im EM-Spektrum lässt sich diese Strahlung einordnen?

Lösung:

$$E_1 = \frac{h^2 \cdot 1^2}{8 \cdot m \cdot l^2} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} J \cdot s \cdot 1^2}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg \cdot (0{,}5 \cdot 10^{-9} m)^2} = \underline{2{,}39 \cdot 10^{-19} J = 1{,}5\,eV}$$

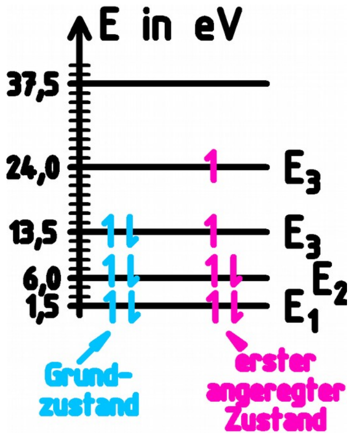
$$E_2 = 4 \cdot E_1 = \underline{6\,eV} \;\; ; \;\; E_3 = 9 \cdot E_1 = \underline{13{,}5\,eV} \;\; ; \;\; E_4 = 16 \cdot E_1 = \underline{24\,eV} \;\; ; \;\; E_5 = 25 \cdot E_1 = \underline{37{,}5\,eV}$$

Grundzustand:

$$E_G = 2 \cdot 1{,}5\,eV + 2 \cdot 6\,eV + 2 \cdot 13{,}5\,eV = \underline{42\,eV}$$

Angeregter Zustand:

$$E_A = 2 \cdot 1{,}5\,eV + 2 \cdot 6\,eV + 13{,}5\,eV + 24\,eV = \underline{52{,}5\,eV}$$



Photon beim Übergang:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{4{,}1 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{52{,}5\,eV - 42\,eV} = \underline{117\,nm}$$

Es handelt sich um UV-Strahlung.

Aufgabe 3.49: Arbeiten mit der Energieformel

a) Ein Potentialtopf der Länge 1,8 nm ist mit 10 Elektronen im Grundzustand besetzt. Berechne die Anregungsenergie vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand.

b) Ein mit 18 Elektronen besetzter Potentialtopf emittiert beim Übergang vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand ein Photon der Energie 1,8eV. Bestimme die Länge des Potentialtopfs.

c) Ein mit 12 Elektronen besetzter Potentialtopf emittiert beim Übergang vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand Licht der Wellenlänge 420 nm. Bestimme die Länge des Potentialtopfes.

d) Ein mit einem einzigen Elektron besetzter Potentialtopf emittiert beim Übergang vom zweiten angeregten Zustand in den Grundzustand Photonen der Wellenlänge 180nm. Bestimme die Länge des Potentialtopfs.

e) Ein mit 15 Elektronen besetzter Potentialtopf emittiert beim Übergang vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand Photonen der Wellenlänge 630 nm. Bestimme die Länge des Potentialtopfs.

Lösung:

a)
$$\Delta E = E_6 - E_5 = \frac{h^2}{8\cdot m_e \cdot l^2}\cdot(6^2-5^2)$$
$$\Delta E = \frac{(6{,}63\cdot10^{-34}\,Js)^2}{8\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\,kg\cdot(1{,}8\cdot10^{-9}\,m)^2}\cdot 11 = \underline{\underline{2{,}05\cdot10^{-19}\,J = 1{,}28\,eV}}$$

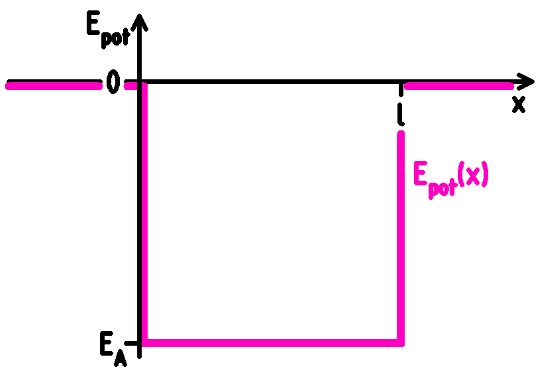
b)
$$\Delta E = E_{10} - E_9 = \frac{h^2}{8\cdot m_e \cdot l^2}\cdot(10^2-9^2)$$
$$l = \sqrt{\frac{19\cdot h^2}{8\cdot m_e\cdot\Delta E}} = \sqrt{\frac{19\cdot(6{,}63\cdot10^{-34}\,Js)^2}{8\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\,kg\cdot1{,}8\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\,J}} = \underline{\underline{2{,}0\,nm}}$$

c)
$$h\cdot\frac{c}{\lambda} = \Delta E = E_7 - E_6 = \frac{h^2}{8\cdot m_e\cdot l^2}\cdot(7^2-6^2)$$
$$l = \sqrt{\frac{13\cdot h^2\cdot\lambda}{8\cdot m_e\cdot h\cdot c}} = \sqrt{\frac{13\cdot6{,}63\cdot10^{-34}\,Js\cdot420\cdot10^{-9}\,m}{8\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\,kg\cdot3\cdot10^{8}\,m/s}} = \underline{\underline{1{,}29\,nm}}$$

d)
$$h\cdot\frac{c}{\lambda} = \Delta E = E_3 - E_1 = \frac{h^2}{8\cdot m_e\cdot l^2}\cdot(3^2-1^2)$$
$$l = \sqrt{\frac{8\cdot h^2\cdot\lambda}{8\cdot m_e\cdot h\cdot c}} = \sqrt{\frac{6{,}63\cdot10^{-34}\,Js\cdot180\cdot10^{-9}\,m}{9{,}1\cdot10^{-31}\,kg\cdot3\cdot10^{8}\,m/s}} = \underline{\underline{0{,}661\,nm}}$$

e)
$$h\cdot\frac{c}{\lambda} = \Delta E = E_8 - E_7 = \frac{h^2}{8\cdot m_e\cdot l^2}\cdot(8^2-7^2)$$
$$l = \sqrt{\frac{15\cdot h^2\cdot\lambda}{8\cdot m_e\cdot h\cdot c}} = \sqrt{\frac{15\cdot6{,}63\cdot10^{-34}\,Js\cdot630\cdot10^{-9}\,m}{8\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\,kg\cdot3\cdot10^{8}\,m/s}} = \underline{\underline{1{,}69\,nm}}$$

3.3 Endlich hoher Potentialtopf



Bei einem endlich hohen Potentialtopf, der ein realistischeres Modell für tatsächlich existierende Systeme ist, legt man meist das Nullniveau der potentiellen Energie außerhalb des Topfes. Das hat den Vorteil, dass gebundene Zustände immer eine negative Energie besitzen, und freie Zustände eine positive. D.h. in der klassischen Vorstellung können Teilchen mit einer negativen Gesamtenergie den Potentialtopf nicht verlassen. Die potentielle Energie im Innern des Topfes nennt man auch die Tiefe des Potentialtopfes.

Aufgabe 3.50:

Ein Teilchen mit einer kinetischen Energie von 4eV befindet sich in einem Potentialtopf mit einer Tiefe von 10eV.

a) Bestimme die Energie (Gesamtenergie) des Teilchens.

b) Weshalb ist das Teilchen im Potentialtopf gebunden?

c) Wie viel Energie müsste man dem Teilchen zuführen um es aus dem Potentialtopf rauszukriegen.

Lösung:

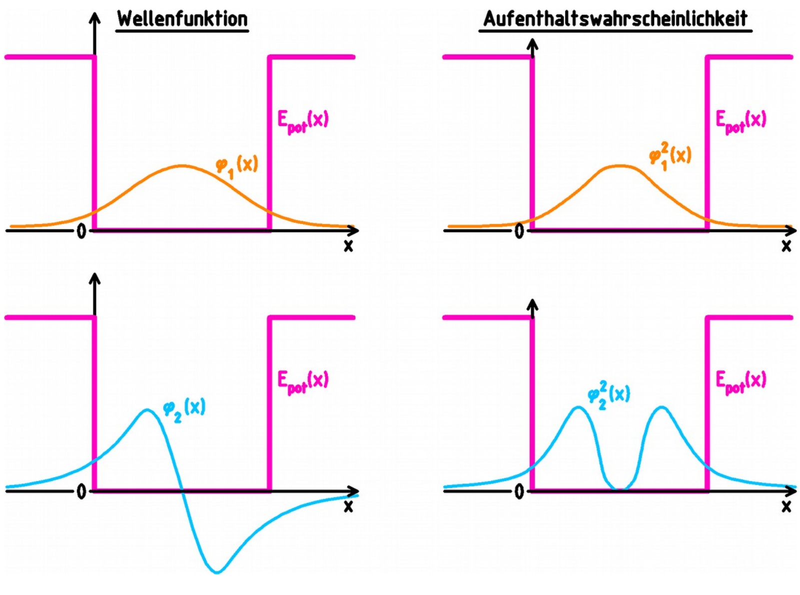
a) $E = E_{kin} + E_{pot} = 4\,eV - 10\,eV = -6\,eV$

b) Die Gesamtenergie ist negativ, deshalb ist das Teilchen im Potentialtopf gebunden.

Genauer: Außerhalb des Potentialtopfes hätte das Teilchen die potentielle Energie Null. Da die kinetische Energie, die das Teilchen eventuell auch noch hat nur positiv sein kann, muss außerhalb des Topfes die Gesamtenergie des Teilchens auch positiv sein. So viel Energie hat das Teilchen aber nicht.

c) Wenn man dem Teilchen eine Energie von 6eV zuführt hat es die Gesamtenergie Null und ist damit frei.

Wellenfunktionen im endlich hohen Potentialtopf



Tatsächlich in der Natur vorkommende Funktionen sind immer rund, die Natur kennt keine Ecken oder Kanten.

Deshalb sind die Wellenfunktionen im realistischen endlich hohen Potentialtopf auch rund und insbesondere außerhalb des Topfes nicht gleich Null. D.h. dass auch die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines gebundenen Teilchens außerhalb des Potentialtopfes nicht gleich Null ist. Das ist sehr merkwürdig, weil nämlich

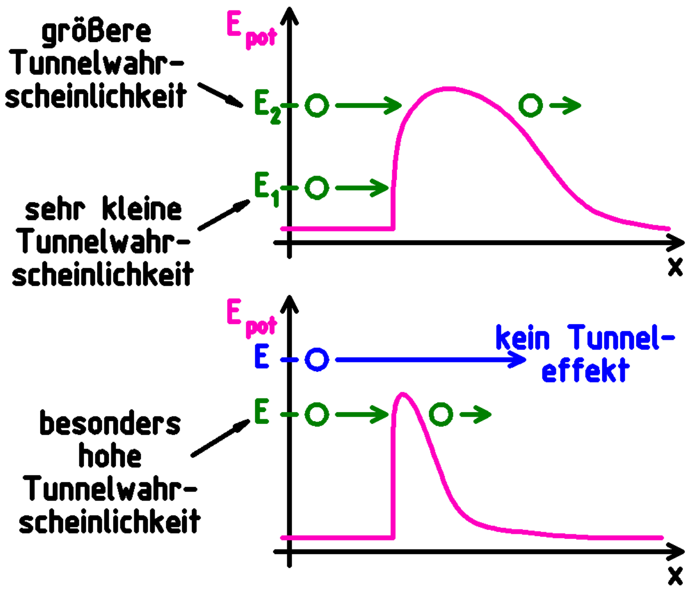
- das Teilchen gar nicht genug Energie hat, um den Potentialtopf zu verlassen. Allein die potentielle Energie des Teilchens wäre außerhalb des Topfes schon größer als die gesamte Energie, die das Teilchen überhaupt besitzt. Im klassischen physikalischen Modell ist so etwas völlig unmöglich. Das wäre so als würde ein Tischtennisball, der auf dem Boden liegt, plötzlich auf dem Tisch auftauchen.

Tunneleffekt

Es gibt eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, dass man das gebundene Teilchen außerhalb des Potentialtopfes beobachten kann.

Die Wahrscheinlichkeit für das Tunneln eines Teilchens durch eine Potentialbarriere ist dabei umso größer,

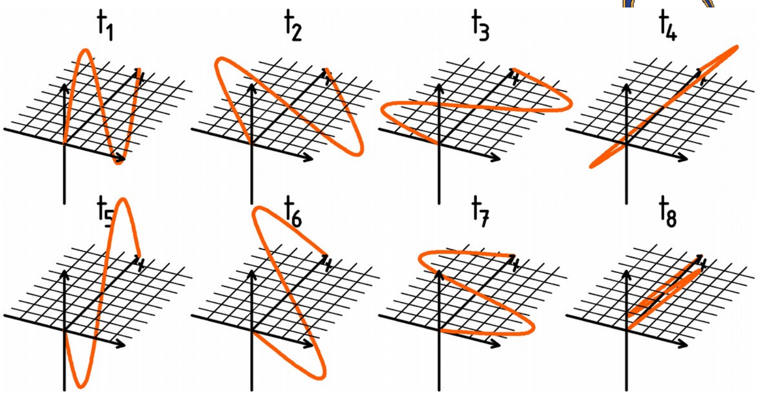
- ➔ je kleiner das Teilchen ist
- ➔ je größer die Energie des Teilchens ist
- ➔ je schmaler die Potentialbarriere ist.
- Wenn die Energie des Teilchens größer als die Höhe der Potentialbarriere ist, kann man nicht mehr von Tunneln sprechen!



Schlussbemerkung: Wellenfunktionen

Jeder Punkt der Welle hat eine momentane Auslenkung. Die maximale Auslenkung der Punkte der Welle heißt die Amplitude der Welle an diesem Punkt. Die Auslenkung der Punkte der Wellenfunktion hat keine geometrische Bedeutung. Die Auslenkung ist einfach eine Eigenschaft der Welle, die zu jeder Zeit an allen Punkte der Welle verschieden sein kann.

Die Auslenkung der Wellenfunktion eines Teilchens hat außerdem zwei Dimensionen, wodurch sie schwer darzustellen ist. Das Bild rechts ist der Versuch einer solchen Darstellung für eine eindimensionale Wellenfunktion wie wir sie im Potentialtopf angenommen haben.



3.4 Abi mit Lösung

Aufgabe 3.51: Abitur 2012

In einem Potentialtopf der Länge 1,44nm befinden sich 12 Elektronen.

a) Begründen Sie anschaulich und ohne Rechnung, warum ein im Potentialtopf eingesperrtes Elektron grundsätzlich nur diskrete Energien annehmen kann. Erläutern Sie, warum seine kinetische Energie im Grundzustand nicht Null sein kann.

b) Im Inneren des Topfes gilt $E_{pot}=0$; für die n-te Wellenlänge eines Elektrons im n-ten Quantenzustand ist $\lambda_n=\frac{2\cdot l}{n}$ $(n=1;2;3;...)$ bekannt.

Leiten Sie damit den Term $E_n=E_{n,kin}=\frac{h^2}{8ml^2}\cdot n^2$ für die Energie des Elektrons im n-ten Quantenzustand her.

Mit Ψ_n wird die Wellenfunktion eines Elektrons und mit $|\Psi_n|^2$ die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte des n-ten Quantenzustands bezeichnet.

c) Geben Sie die Quantenzahlen n an, für welche die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi_n|^2$ in der Mitte des Potentialtopfes gleich Null ist.

Im Absorptionsspektrum des Topfes findet man experimentell bei der Wellenlänge 500nm eine Linie, die dem Übergang vom Grundzustand des Moleküls in den ersten angeregten Zustand entspricht.

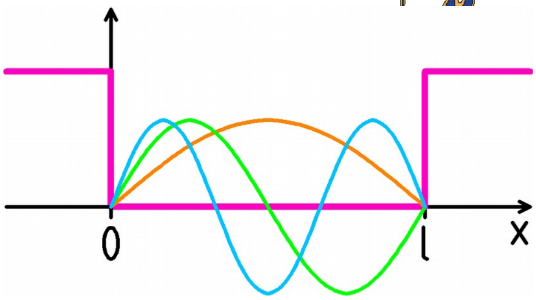
d) Begründen Sie, warum im Grundzustand des Topfes die Energieniveaus von E_1 bis E_6 besetzt sind.

e) Berechnen Sie mit Hilfe des Potentialtopfmodells die Wellenlänge der Absorptionslinie. Um wie viel Prozent weicht dieser berechnete Wert vom experimentell bestimmten Wert ab?

f) In Wirklichkeit ist der Potentialtopf nur endlich hoch. Skizzieren Sie für einen solchen Potentialtopf die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Elektrons im Quantenzustand n = 2 und erläutern Sie den wesentlichen Unterschied bezüglich des Elektronenverhaltens zum unendlich hohen Potentialtopf.

Lösung:

a) Am Rand des Topfes muss die Wellenfunktion gleich Null sein, deshalb passen nur ganz bestimmte Wellenlängen in den Topf die dann auch ganz bestimmte (diskrete) Energien haben.



Auch im Grundzustand muss eine Wellenfunktion da sein, sonst gibt es kein Elektron. Diese Wellenfunktion hat dann auch eine Wellenlänge und wegen $p=\frac{h}{\lambda}$ auch einen Impuls, also auch eine kinetische Energie. Es gibt also gar kein Elektron ohne kinetische Energie.

b)

$$E_n=E_{n,kin}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2=\frac{m\cdot v^2}{2}=\frac{m^2\cdot v^2}{2\cdot m}=\frac{p^2}{2\cdot m}=\frac{\left(\frac{h}{\lambda_n}\right)^2}{2\cdot m}$$

$$E_n=\frac{\left(\frac{h\cdot n}{2\cdot l}\right)^2}{2\cdot m}=\frac{h^2\cdot n^2}{8\cdot m\cdot l^2}=\underline{\frac{h^2}{8\cdot m\cdot l^2}\cdot n^2}$$

c) Dafür muss die Wellenfunktion in der Mitte eine Nullstelle haben. Die stehende Welle muss also in der Mitte einen Schwingungsknoten haben. Das sind genau die Wellenfunktionen mit geraden Quantenzahlen: n = 2; 4; 6; 8; ...

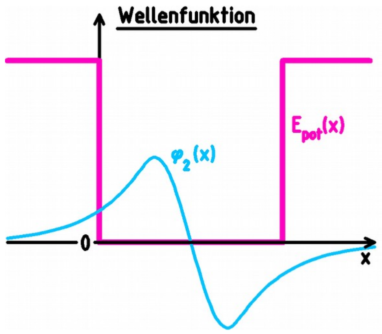
d) Jede Wellenfunktion kann wegen des Pauli-Prinzips nur von einem Elektron besetzt werden. Weil jedes Elektron aber Spin up oder Spin down haben kann, kann jeder Energiezustand von zwei Elektronen besetzt werden. Im Grundzustand befinden sich die 12 Elektronen auf den niedrigst möglichen Energiezuständen, also auf den ersten sechs (jeder mit Spin up und mit Spin down, also zweimal besetzt).

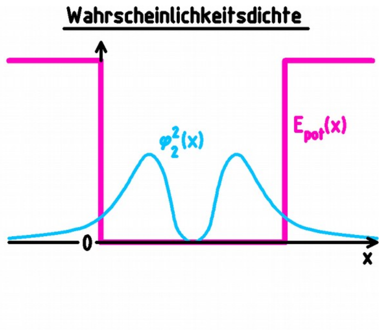
e) Durch Anregung geht ein einziges Elektron von n=6 auf n=7

$$\Delta E=E_7-E_6=\frac{h^2}{8\cdot m\cdot l^2}\cdot\left(7^2-6^2\right)=\frac{(6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s)^2}{8\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot(1{,}44\cdot 10^{-9}\,m)^2}\cdot 13=3{,}75\cdot 10^{-19}\,J$$

$$E=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda}\;\rightarrow\;\lambda=\frac{h\cdot c}{E}=\frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\,J\cdot s\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{3{,}75\cdot 10^{-19}\,J}=\underline{528\mathrm{nm}}$$

Abweich: $\frac{528\,nm}{500\,nm}=1{,}056$. Der berechnete Wert weicht vom Experiment um 5,6% ab.





f) Wesentlicher Unterschied:

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist außerhalb des Topfes nicht gleich Null. D.h. das Elektron kann mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit außerhalb des Topfes festgestellt (gemessen) werden (Tunneleffekt).

<u>Aufgabe 3.52:Abi 2000; eindimensionaler Potentialtopf</u>

In dem organischen Molekül β-Carotin können sich 22 Elektronen praktisch frei entlang einer Kohhlenwasserstoffkette bewegen, das Molekül aber nicht verlassen. Das Verhalten dieser Elektronen kann näherungsweise durch das quantenmechanische Modell des eindimensionalen Potentialtopfs der Länge a beschrieben werden.

a) Leiten Sie einen Ausdruck für die möglichen Energien eines Elektrons in einem solchen Potentialtopf her und erklären Sie den Begriff Nullpunktsenergie.

(Kontrolle: $E_n = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot n^2$)

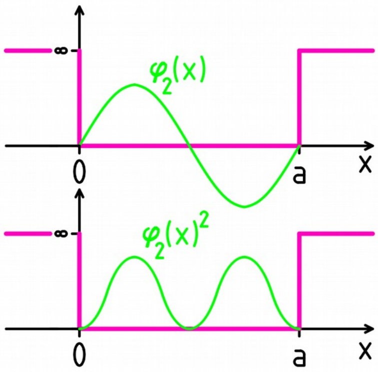
b) Beschreiben Sie mit einer Skizze den Verlauf der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons im Zustand n = 2.

c) Im Grundzustand sind die tiefsten der in Teilaufgabe 2a berechneten Energieniveaus mit jeweils zwei Elektronen besetzt. Im Absorbtionsspektrum von β-Carotin findet man eine Linie mit der Wellenlänge λ = 451 nm. Diese Linie entspricht dem Übergang vom Grundzustand des Moleküls in den ersten angeregten Zustand. Berechnen Sie die Länge der Kohlenwasserstoffkette.

<u>Lösung:</u>

a) Rechnung siehe Skript

Auch im Grundzustand muss eine Wellenfunktion da sein, die eine Wellenlänge und deshalb einen Impuls also eine Energie (kinetische Energie) größer Null besitzt. Die kleinstmögliche Energie liegt bei der größtmöglichen Wellenlänge vor, die zwei Potentialtopflängen beträgt. Diese Energie heißt die Nullpunktsenergie.



b) Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist das Betragsquadrat der Wellenfunktion (unteres Bild). An den Rändern (des unendlich hohen Potentialtopfs) und genau in der Mitte ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit gleich Null. Exakt in der Mitte zwischen zwei Nullstellen ist sie maximal.

c)
$$\Delta E = E_{12} - E_{11} = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot (12^2 - 11^2) \;\rightarrow\; a^2 = \frac{h^2 \cdot 23}{8 \cdot m_e \cdot \Delta E} = \frac{h^2 \cdot 23}{8 \cdot m_e \cdot h \cdot (c/\lambda)}$$
$$a = \sqrt{\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 23 \cdot 451 \cdot 10^{-9}\,m}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s}} = \underline{\underline{1{,}77\,nm}}$$

Aufgabe 3.53: Abi 2008; Leuchtstoffe

Leuchtstoffröhren sind Niederdruck-Gasentladungslampen, häufig mit Quecksilberdampf als Füllgas. Ihr Funktionsmechanismus entspricht einer Elektronenstrahlröhre, die mit wenig Quecksilberdampf gefüllt ist. Im Betrieb emittieren die Quecksilberatome u.a. Ultraviolettstrahlung.

a) Erklären Sie kurz, wie es zur Entstehung dieser Strahlung kommt.

b) In der Beschichtung von Leuchtstoffröhren befinden sich Moleküle, die die UV-Strahlung der Quecksilberatome in sichtbares Licht umwandeln. Die Anregungszustände eines solchen Leuchtstoffmoleküls können näherungsweise durch das Modell eines eindimensionalen Potentialtopfs beschrieben werden.

b) Erläutern Sie die Modellvorstellung eines Elektrons im unendlich tiefen, eindimensionalen Potentialtopf und zeigen Sie, dass sich in diesem Modell die Energiestufen durch die Beziehung

$$E_n = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot L^2} \cdot n^2$$

beschreiben lassen, wobei L die Länge des Potentialtopfs ist.

Ultraviolettstrahlung mit der Wellenlänge 253 nm soll das Leuchtstoffmolekül vom Grundzustand in den zweiten angeregten Zustand bringen.

c) Bestätigen Sie, dass der Potentialtopf 0,783 nm lang sein muss.

d) Zeichnen Sie für das Leuchtstoffmolekül ein Energieniveauschema (Energie in eV) bis zum 2. Anregungszustand und zeigen Sie, dass eine Umwandlung in sichtbares Licht möglich ist.

Lösung:

a) In der Röhre werden Elektronen von einem Ende zum Anderen hin beschleunigt. Wenn so ein Elektron auf ein Quecksilberatom stößt, kann es das Atom anregen oder ionisieren. Beim Zurückfallen in den Grundzustand (oder beim Rekombinieren) wird Energie frei, die in Form eines Photons abgegeben wird -> Strahlung.

b) Im unendlich tiefen Potentialtopf kann sich das Elektron nicht außerhalb des Topfes aufhalten, weil es nicht unendlich viel Energie haben kann. Deshalb muss die Wellenfunktion an den Rändern des Potentialtopfes gleich Null sein. Im Innern des Topfes ist die potentielle Energie überall gleich groß. Setzt man das Nullniveau der potenielle Energie auf das Niveau im Innern des Topfes, dann besitzt das Elektron nur kinetische Energie, die sich aus der Wellenlänge ergibt.

Rechnung siehe Skript

c)

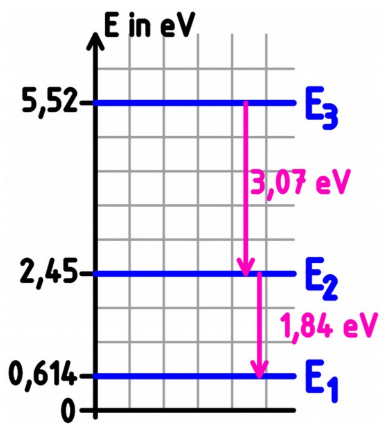
$$h\cdot\frac{c}{\lambda}=\Delta E=E_3-E_1=\frac{h^2}{8\cdot m_e\cdot L^2}\cdot(3^2-1^2)$$

$$L=\sqrt{\frac{8\cdot h\cdot\lambda}{8\cdot m_e\cdot c}}=\sqrt{\frac{8\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js\cdot 253\cdot 10^{-9}\,m}{8\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}}=\underline{7{,}84\cdot 10^{-10}\,m}$$

d)

$$E_1=\frac{1}{8}\Delta E=\frac{1}{8}\cdot 4{,}14\cdot 10^{-15}\cdot\frac{3\cdot 10^{8}\,m/s}{253\cdot 10^{-9}\,m}=\underline{0{,}614\,eV}$$

$$E_2=4\cdot E_1=2{,}45\,eV\ ;\quad E_3=9\cdot E_1=5{,}52\,eV$$



Das sichtbare Spektrum geht von ca. 1,6 eV bis 3,4 eV. Das heißt, dass die eingezeichneten Übergänge sichtbares Licht emittieren.

Aufgabe 3.54: Abi 2001

Bei einem Teilchen der Masse m, das sich nur eindimensional in einem Bereich der Länge l kräftefrei bewegen kann, beobachtet man eine Quantisierung der Energie.

a) Berechnen Sie die möglichen Wellenlängen der zugeordneten de-Broglie Wellen und zeigen Sie, dass nur die Energiestufen

$$E_n=\frac{h^2}{8\cdot m\cdot l^2}\cdot n^2\ ;\quad n\in\mathbb{N}$$ möglich sind.

Elektromagnetische Strahlung mit einem kontinuierlichen Spektrum trifft auf Einelektronensysteme der beschriebenen Art. Man beobachtet im Spektrum des durchgelassenen Lichts Absorptionslinien, deren langwelligste bei λ = 1,0 µm liegt.

b) Drücken Sie für ein Elektron die Energiedifferenz zwischen dem ersten angeregten Zustand und dem Grundzustand aus und berechnen Sie die Länge l.

Lösung:

a) $n \cdot \frac{\lambda}{2} = l \rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot l}{n} \;;\quad n \in \mathbb{N}$

Energie ist ausschließlich kinetische:

$$E_n = \frac{p^2}{2 \cdot m} = \frac{h^2}{\lambda^2 \cdot 2 \cdot m} = \frac{h^2}{\frac{4 \cdot l^2}{n^2} \cdot 2 \cdot m} = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot l^2} \cdot n^2 \;;\quad n \in \mathbb{N}$$

b) $E_2 - E_1 = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot l^2} \cdot (2^2 - 1^2) = \frac{h^2}{8 \cdot m \cdot l^2} \cdot 3$ und $E_2 - E_1 = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$ gibt

$$l = \sqrt{\frac{3 \cdot h \cdot \lambda}{8 \cdot m \cdot c}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Js \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6}\, m}{8 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}} = \underline{\underline{0{,}95\, nm}}$$

Aufgabe 3.55: Abi 2007; Eindimensionaler Potentialtopf

Das Zustandekommen von diskreten Energieniveaus (charakterisiert durch die Quantenzahl n) für ein in der Atomhülle gebundenes Elektron kann am Modell des eindimensionalen, unendlich hohen Potenzialtopfs veranschaulicht werden. Hier soll sich das Elektron in einem Potenzialtopf der Länge l = 0,14 nm kräftefrei bewegen.

a) Zeige, dass für den Impuls des Elektrons im Potentialtopf nach de Broglie gilt:

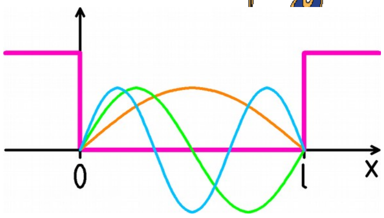
$$p_n = \frac{h}{2 \cdot l} \cdot n \;;\quad (n \in \mathbb{N})$$

b) Berechnen Sie damit den kleinstmöglichen Energiewert des Elektrons im Potenzialtopf und erläutern Sie, inwiefern das Ergebnis einen Widerspruch zur klassischen Physik darstellt.

c) Bestimmen Sie die Werte der Quantenzahl n, bei denen von einer nichtrelativistischen Bewegung des Elektrons im Potenzialtopf der angegebenen Länge ausgegangen werden darf.

Lösung:

a) Da die Wellenfunktion am Rand des Topfes Null sein muss (unendlich hoher Potentialtopf), muss die Länge des Topfes ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge der Wellenfunktion sein.



$$p=\frac{h}{\lambda} \rightarrow \lambda=\frac{h}{p} \quad ; \quad l=n\cdot\frac{\lambda}{2}=n\cdot\frac{h}{2\cdot p} \rightarrow p_n=\frac{n\cdot h}{2\cdot l}=\frac{h}{2\cdot l}\cdot n \quad ; \quad n\in\mathbb{N}$$

b) $$E_1=\frac{p_1^2}{2\cdot m}=\frac{h^2\cdot 1^2}{2\cdot m\cdot 4\cdot l^2}=\frac{(6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js)^2\cdot 1}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 4\cdot(0{,}14\cdot 10^{-9}\,m)^2}=\underline{\underline{3{,}08\cdot 10^{-18}\,J=19\,eV}}$$

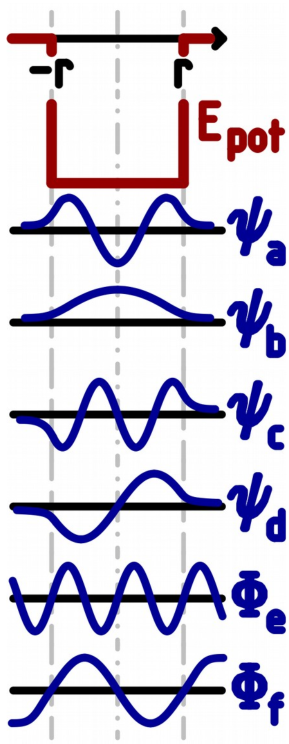
Da die berechnete kleinstmögliche Energie eine rein kinetische Energie ist, bedeutet das Ergebnis, dass das Elektron nicht in Ruhe sein kann, was einen Widerspruch zur klassischen Vorstellung darstellt.

c) Bis zu v = 0,1c darf klassisch gerechnet werden.

$$m\cdot v_n=p_n=\frac{h\cdot n}{2\cdot l} \rightarrow n=\frac{2\cdot l\cdot m\cdot v_n}{h}=\frac{2\cdot 0{,}14\cdot 10^{-9}\,m\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot 0{,}1\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js}=\underline{\underline{11{,}5}}$$

D.h. bis zu n = 11 darf von einer nichtrelativistischen Bewegung ausgegangen werden.

Aufgabe 3.56: G8 Muster-Abi 2010; Wellenfunktionen



Im Diagramm ist der Verlauf eines eindimensionalen, endlich tiefen Potentialtopfs skizziert; darunter sind die Wellenfunktionen des Grundzustands und der ersten drei angeregten Zustände für ein gebundenes Elektron gezeichnet.

a) Begründen Sie, dass die Funktionen Φe und Φf keine Wellenfunktionen eines gebundenen Elektrons sein können.

b) Die Werte der Wellenfunktionen ψa bis ψd sind am Rand und außerhalb des Potentialtopfs nicht Null. Was bedeutet das für das betreffende Elektron? Inwiefern unterscheidet sich hier das quantenmechanische Weltbild von unserer klassischen Vorstellung?

c) Nun wird das Potential so verändert, dass der Potentialtopf tiefer ist. Wie verändern sich dadurch die Werte der Wellenfunktionen außerhalb des Potentialtopfes? Begründen Sie ihre Antwort!

d) Sortieren Sie die Wellenfunktionen ψa bis ψd nach der zugehörigen Energie. Begründen Sie die Wahl ihrer Reihenfolge.

e) Das Elektron befinde sich in dem Zustand, der durch ψa beschrieben wird. Kennzeichne in der Zeichnung die Stellen zwischen -r und r, an denen die Wahrscheinlichkeit, das Elektron anzutreffen, am größten bzw. am kleinsten ist. Begründe!

Lösung:

a) Der Betrag der Wellenfunktionen (und deshalb auch das Betragsquadrat der Wellenfunktionen) nimmt hier außerhalb genauso große Werte wie innerhalb des Potentialtopfes an. Die Wellenfunktionen gehen außerhalb auch nicht gegen Null, sondern scheinen sich periodisch bzw. konstant fortzusetzen. Deshalb haben diese Elektronen außerhalb des Topfes eine größere Aufenthaltswahrscheinlichkeit als innerhalb des Topfes und es kann sich nicht um gebundene Zustände handeln.

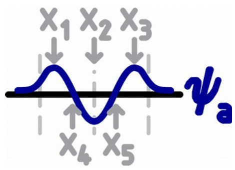
b) Da diese Wellenfunktionen am Rand und außerhalb nicht Null sind, haben die dazugehörigen Elektronen von Null verschiedene Aufenthaltswahrscheinlichkeiten außerhalb des Potentialtopfes, d.h. man kann ein solches Elektron auch außerhalb des Topfes vorfinden bzw. detektieren.

Die betreffenden Elektronen haben nicht genug Energie, um den Potentialtopf zu verlassen. Deshalb ist es nach klassischer Vorstellung nicht möglich, ein solches Elektron außerhalb des Topfes vorzufinden.

c) Je größer die Differenz zwischen der Gesamtenergie eines Elektrons und der potentiellen Energie an einem bestimmten Punkt, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit dieses Elektron an dem bestimmten Punkt vorzufinden. Deshalb müssen die Beträge der Wellenfunktionen am Rand und außerhalb des Potentialtopfes kleiner werden, wenn der Potentialtopf tiefer wird.

d) Wegen $p = h/\lambda$ ist die kinetische Energie umso größer, je kleiner die Wellenlänge ist. Die potentielle Energie ist bei allen gleich, weil sie ja im Potentialtopf sind. Deshalb hat die größte Wellenlänge die kleinste Energie -> Eb < Ed < Ea < Ec.

e) Betragsquadrat der Wellenfunktion ist Aufenthaltswahrscheinlichkeit; bei x4 und x5 ist der Betrag der Wellenfunktion gleich Null und man wird das Elektron niemals hier antreffen; bei x1 bis x3 ist der Betrag maximal und man wird das Elektron mit maximaler Wahrscheinlichkeit hier antreffen.



4 Atome

Wenn wir von Atomphysik sprechen, meinen wir die Physik der Atomhülle, also das Verhalten der Elektronen in der Atomhülle. Die Physik des Verhaltens der Protonen und Neutronen im Kern bezeichnet man als Kernphysik.

4.1 Das Wasserstoffatom: Wellenfunktionen

Im einfachsten Atom überhaupt (ein Proton und ein Elektron) gibt es für jedes Energieniveau des Elektrons mehrere Wellenfunktionen (man spricht von k-facher Entartung, wenn es zu einem Energieniveau k verschiedene Wellenfunktionen gibt), die man durch sogenannte Quantenzahlen charakterisiert.

<u>Orbital</u>

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons $|\psi|^2$ an den verschiedenen Punkten im Raum bezeichnet man als Orbital. Sie lässt sich graphisch darstellen (Beispiele siehe Buch S.65). Verschiedene Wellenfunktionen haben verschiedene Orbitale.

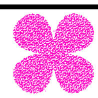
<u>Hauptquantenzahl, n = 1; 2; 3; ...</u>

Das Energieniveau des Elektrons ist nur von der Hauptquantenzahl abhängig. Je größer das n, desto weiter ist das Elektron vom Atomkern entfernt. Man sagt deshalb auch:"Das Elektron befindet sich auf der n-ten Schale." Die Schalen werden auch mit Großbuchstaben bezeichnet.

n =	1	2	3	4	5
Schale	K	L	M	N	O

<u>Banhdrehimpulsquantenzahl (Nebenquantenzahl), l = 0; 1; ... ;(n-1)</u>

Die Wellenfunktion dreht sich um den Atomkern. Wie stark diese Drehung ist, gibt die Bahndrehimpulsquantenzahl an. Sie beeinflusst am stärksten die geometrische Gestalt des Orbitals, deshalb benennt man die Orbitale nach ihrer Nebenquantenzahl mit Kleinbuchstaben. Genauere Form: siehe Buch S. 63 und S.66 (die Bilder der s-Orbitale auf S.63 sind aber leider falsch!). An den Bildern erkennt man, dass die Gestalt der Orbitale auch stark von der Hauptquantenzahl n abhängt.

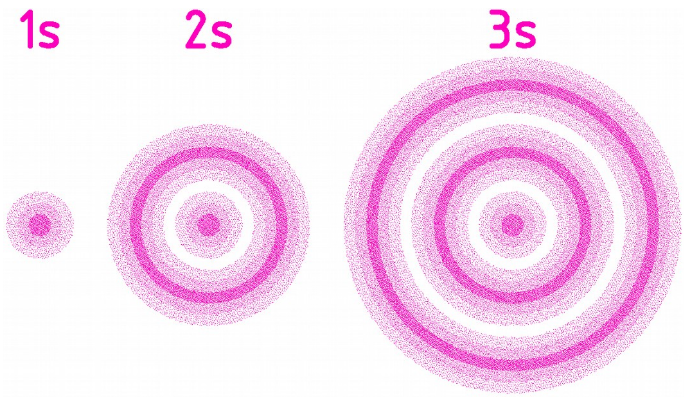
l =	0	1	2	3
Orbital	s	p	d	f
ungefähre Gestalt	 Kugel	 Doppelkeule	 aufgeblasenes Kleeblatt	siehe Buch

Grundsätzlich gilt: Je größer die Hauptquantenzahl n,

1) desto größer ist die räumliche Ausdehnung der Orbitale. D.h. das Elektron hält sich bei größerem n auch weiter weg vom Kern auf.

2) desto mehr strukturelle Details haben die Orbitale.

Das Bild zeigt grob die ungefähre Gestalt der ersten drei s-Orbitale. Je größer die Hauptquantenzahl n, desto mehr Kugelschalen besitzt das Orbital. Beachte, dass das 3s-Orbital die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines einzelnen Elektrons zeigt, nicht von mehreren Elektronen. Direkt am Kern ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit übrigens immer groß, auch für höhere Hauptquantenzahlen.



Magnetquantenzahl, m = -l; ... ; -1; 0; 1; ... ; l

Gibt die Orientierung des Orbitals im Raum an, also in welche Richtung die Keule des p-Orbitals zeigt. Die Kugel eines s-Orbitals kann man nicht verschieden ausrichten, es hier also auch keine verschiedenen Magnetquantenzahlen, sondern nur m = 0.

Spinquantenzahl, s = $-\frac{1}{2}$; $+\frac{1}{2}$

Bei jeder der bisher beschriebenen Wellenfunktionen hat das Elektron noch die Möglichkeiten Spin up (↑ ; s = $+\frac{1}{2}$) oder Spin down (↓ ; s = $-\frac{1}{2}$).

Mögliche Zustände

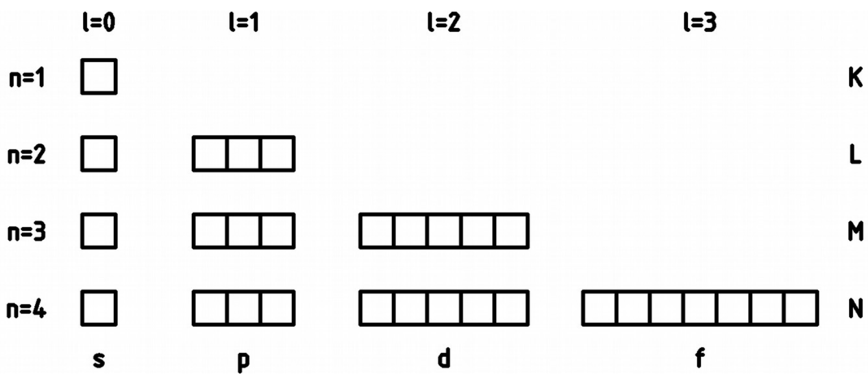
Ohne Berücksichtigung des Spins gibt es dann mit der Bezeichnung (n;l;m) folgende möglichen Zustände.

(1;0;0)

(2;0;0) ; (2;1;-1) ; (2;1;0) ; (2;1;1)

(3;0;0) ; (3;1;-1) ; (3;1;0) ; (3;1;1) ; (3;2;-2) ; (3;2;-1) ; (3;2;0) ; (3;2;1) ; (3;2;2)

und so weiter.



Die möglichen Zustände kann man auch in einem Baumdiagramm (siehe Buch S.68) oder - was ich am übersichtlichsten finde in einem Kästchendiagramm darstellen. Hier bekommt jede neue Schale ein neues Orbital und jedes neue Orbital hat zwei Kästchen mehr als das vorherige Orbital. In einem Mehrelektronensystem kann dann jedes Kästchen mit zwei Elektronen gefüllt werden (Spin up oder Spin down).

Man kann zeigen, dass es für jedes Energieniveau, also für jedes n ohne Berücksichtigung des Spins n^2 verschiedene Zustände und mit Berücksichtigung des Spins $2 \cdot n^2$ verschiedene Zustände gibt.

n=1: $2 \cdot 1^2 = 2$ verschiedene Zustände in der ersten Schale (K-Schale)
n=2: $2 \cdot 2^2 = 8$ Zust. in der L-Schale ; n=3: $2 \cdot 3^2 = 18$ Zust. in der M-Schale, usw.

4.2 Energieniveaus im Wasserstoffatom

Die Energie einer elektronischen Wellenfunktion ist nur abhängig von der Hauptquantenzahl n. Alle Elektronen auf einer bestimmten Schale haben also dieselbe Energie. Legt man das Nullniveau der potentiellen Energie ins Unendliche (wie üblich) gilt für die Energie eines Elektrons mit Hauptquantenzahl n die Gleichung:

$$\boxed{E_n = -R_H \cdot h \cdot c \cdot \frac{1}{n^2} \quad ; \quad \text{mit } R_H \text{ der Rydbergkonstante}}$$

Die Energie besteht aus potentieller Energie (negativ) und kinetischer Energie (positiv). Die Gesamtenergie ist negativ, da es sich um gebundene Zustände handelt.

➔ Erinnerung: Die Bindungsenergie ist die Größe der Energie, die man einem Elektron zuführen muss, um es aus dem Atom zu befreien. Weil dabei ein Ion entsteht, also ein Atom ionisiert wird nennt man diese Energie auch Ionisierungsenergie.

☺ Legt man das Nullniveau der potentiellen Energie ins Unendliche - so wie üblich - , dann ist die Bindungsenergie (Ionisierungsenergie) gleich dem Betrag der Energie des Elektrons im Grundzustand.

Begriff: Ionisierungsenergie

Erste Ionisierungsenergie -> Die Energie, welche notwendig ist, um ein Elektron aus dem Atom zu entfernen

Zweite Ionisierungsenergie -> Die Energie, welche notwendig ist, um ein zweites Elektron aus einem bereits ionisierten Atom zu entfernen

Aufgabe 4.57:

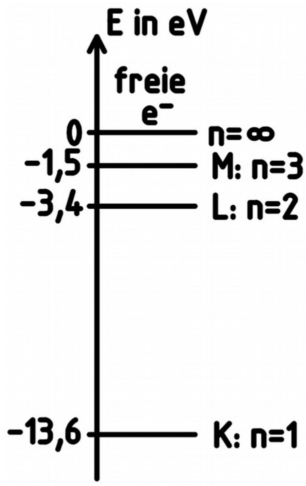
a) Bestimme für das Elektron im Wasserstoffatom die Energie auf den Schalen K, L und M und trage sie maßstabsgetreu in ein Energieniveauschema ein. Trage zusätzlich die Grenzenergie für ein freies Elektron $(n = \infty)$ ein.

b) Photonen, die durch zurückfallen auf die K-Schale aus einer höheren Schale entstehen, bilden im Linienspektrum des Wasserstoffs die sogenannte Lyman-Serie. Berechne die Wellenlänge für den Übergang von L nach K und begründe damit, dass die gesamte Lyman-Serie nicht im sichtbaren Bereich liegt.

c) Photonen, die durch zurückfallen auf die M-Schale aus einer höheren Schale (nicht aus einem ungebundenen Zustand) entstehen, bilden im Linienspektrum die sogenannte Paschen-Serie. Berechne die Wellenlänge für den Übergang eines freien Elektrons ohne kinetische Energie auf die M-Schale und begründe damit, dass die gesamte Paschen-Serie nicht im sichtbaren Bereich liegt.

d) Können Wasserstoffatome im Grundzustand durch Wechselwirkung zum einen mit Photonen, zum anderen mit Elektronen jeweils der Energie 11 eV zur Emission von Strahlung angeregt werden? Begründe deine Antwort und berechne gegebenenfalls die Wellenlänge der emittierten Strahlung.

Lösung:



a)
$$E_1 = -R_H \cdot h \cdot c \cdot \frac{1}{1^2}$$
$$E_1 = -1{,}097 \cdot 10^7 \frac{1}{m} \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15} \cdot Js \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} = \underline{-13{,}6\,eV}$$

$$E_2 = E_1 \cdot \frac{1}{2^2} = -13{,}6\,eV \cdot \frac{1}{2^2} = \underline{-3{,}4\,eV} \qquad E_3 = E_1 \cdot \frac{1}{3^2} = \underline{-1{,}5\,eV}$$

Ein freies Elektron braucht mindestens die Gesamtenergie Null.

Anders als für die gebundenen Elektronen gibt es für die freien Elektronen keine diskreten Energiewerte. Ein freies Elektron kann jede beliebige Energie größer gleich Null einnehmen.

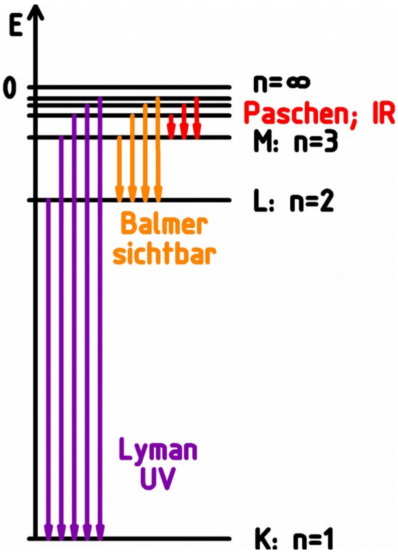
$$\Delta E = h\cdot f \;\rightarrow\; f = \frac{\Delta E}{h} \;;\; c = \lambda\cdot f \;\rightarrow\; \lambda = \frac{c}{f}$$

b) $$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{\frac{\Delta E}{h}} = \frac{c\cdot h}{\Delta E} = \frac{3\cdot 10^{8}\,m/s\cdot 4{,}1\cdot 10^{-15}\,eV\cdot s}{-3{,}4\,eV + 13{,}6\,eV} = \underline{121\,nm}$$

Die Linie ist im UV-Bereich. Alle anderen Übergänge auf die K-Schale haben größere Energieunterschiede, also kürzere Wellenlängen und liegen deshalb auch im UV-Bereich.

c) $$\lambda = \frac{c\cdot h}{\Delta E} = \frac{4{,}1\cdot 10^{-15}\,eV\,s\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{0-(-1{,}5\,eV)} = \underline{820\,nm}$$

Die Linie ist im IR-Bereich. Die Übergänge von einem gebundenen Zustand (höhere Schale) auf die M-Schale haben alle eine kleinere Energie, also eine größere Wellenlänge und liegen deshalb auch im IR-Bereich.



Bemerkung:

Die Balmer-Serie, mit den Übergängen auf die L-Schale, liegt komplett im sichtbaren Bereich.

➔ Merken: Für die freien Elektronen gibt es keine diskreten Energie-Werte. Für den Einfang von freien Elektronen durch einen Atomrumpf gibt es deshalb auch keine Linien in den Spektren.

d) Photonen mit 11 eV können keine Wasserstoffatome anregen, weil sie ihre ganze Energie abgeben müssten. Elektronen können das schon, sie geben dann nur 10,2 eV Energie ab und heben das Wasserstoffatom in den ersten angeregten Zustand. Beim Zurückfallen in den Grundzustand emittieren die Atome dann wieder die 10,2 eV.

$$E = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda = \frac{h\cdot c}{E} = \frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{10{,}2\,eV} = \underline{\underline{122\,nm}}$$

4.3 Atome mit mehr Elektronen, Periodensystem

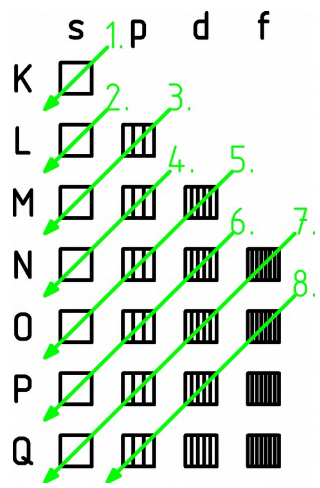
Bei Atomen mit mehr Elektronen entsteht unter anderem folgendes neue Problem.

- ☠ Jedes Elektron ist nicht nur dem Kernpotential sonder dem elektrischen Potential der anderen Elektronen ausgesetzt, von magnetischen Wechselwirkungen ganz abgesehen.

Wenn man also die Wellenfunktion des letzten Elektrons bestimmen will, muss man das von den wirren Wellenfunktionen der anderen Elektronen erzeugte Potential kennen. Die Wellenfunktionen der anderen Elektronen kann man aber erst bestimmen, wenn man das von der Wellenfunktion des letzten Elektrons erzeugte Potential kennt. Die Katze beißt sich in den Schwanz. Man hat also keine andere Wahl, als sich eine Methode zu überlegen, wie man die Wellenfunktion aller Elektronen unter Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Wechselwirkung in einem einzigen Rechenverfahren gleichzeitig rauskriegt.

- ☺ Zum Glück sind die Wellenfunktionen der Elektronen größerer Atome den Wasserstoff-Wellenfunktionen ähnlich genug, so dass wir die vom Wasserstoff bekannten Quantenzahlen (n;l;m) benutzen können um die Wellenfunktionen zu charakterisieren.
- ☹ Die Energie hängt jetzt aber nicht mehr nur von der Hauptquantenzahl n sondern auch noch stark von der Bahndrehimpulsquantenzahl (Nebenquantenzahl) l ab.
- ☺ Zum Glück gibt es ein einfaches Schema für die Reihenfolge in der die Orbitale mit Elektronen besetzt werden.

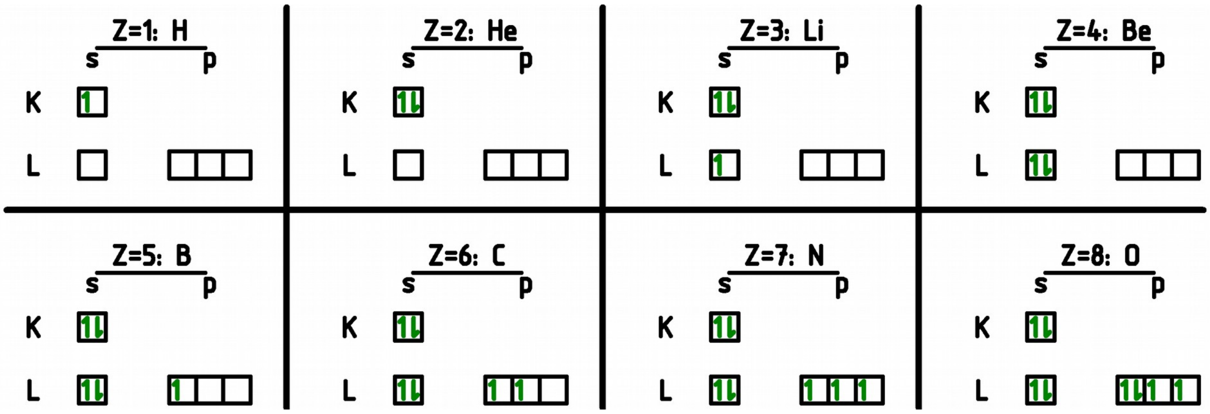
Es werden die Zustände entlang jeder Diagonalen immer von rechts oben nach links unten besetzt. Die Diagonalen von oben nach unten.



Jedes Orbital wird zuerst vollständig besetzt, bevor das nächste angefangen wird.

Innerhalb der Orbitale werden zuerst die einzelnen Magnetquantenzahlen mit jeweils einem Elektron besetzt bevor dann überall noch ein zweites (mit dem anderen Spin) dazukommt.

Ich mach die ersten Paar vor, dann kapiert man's besser.



☹ Es gibt leider ein Paar Elemente, die diesem schönen, einfachen Schema nicht folgen. Es weicht aber immer nur eins oder höchstens zwei Elektronen vom Schema ab. Deshalb bekommt man mit dem Schema trotzdem eine sehr gute Näherung für die Elektronenkonfiguration.

☠ Die bösen Elemente sind die Nummern: 24, 29, 41 — 47, 57, 64, 78, 79, 89 — 93. Das sind nur 18 von insgesamt 94 Stück.

Wir tun im weiteren einfach so, als gäb's diese separatistischen Abweichler nicht.

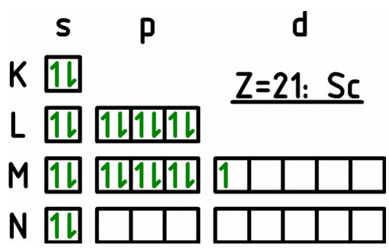
Hauptgruppe

Die Elemente, die zuletzt ein s- oder p-Orbital besetzt haben, sind Hauptgruppenelemente. Diejenigen mit der selben Konfiguration auf den äußersten s- und p-Orbitalen haben ähnliche chemische Eigenschaften und bilden eine Hauptgruppe.

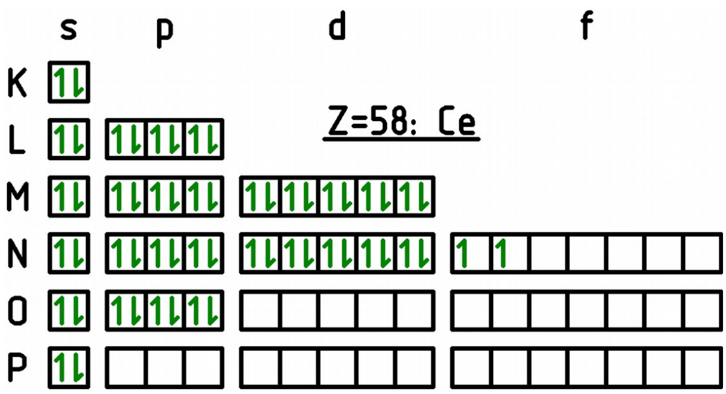
Die Hauptgruppen werden mit römischen Ziffern nummeriert. Die Nummer gibt die Anzahl der Elektronen auf der äußersten Schale (größte Hauptquantenzahl n) an.

Nebengruppe

Die Elemente, die zuletzt ein d-Orbital besetzt haben, nennt man Nebengruppenelemente. Das erste Nebengruppenelement ist die Nummer 21.



Lanthanoide



Die Elemente, die zuletzt ein f-Orbital besetzt haben, heißen Lanthanoide oder Actinoide. Das erste brave Lanthanoid ist die Nummer 58, Cerium. (Nummer 57, Lanthan ist leider ein Abweichler).

Die wenigen natürlichen Actinoide sind mit Ausnahme vom Plutonium allesamt Abweichler.

Periode

Die Nummer der Periode (arabische Ziffern) gibt die Nummer der äußersten besetzten Schale an.

Beispiele:

Gemeint sind immer nur Hauptgruppenelemente.

a) Das Element mit mit 6 Elektronen auf der äußersten dritten Schale ist in der 3. Periode und in der VI. Hauptgruppe und besitzt die Elektronenkonfiguration

$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$ bzw. $[Ne]3s^2 3p^4$

b) Das Element mit 4 Elektronen auf der äußersten zweiten Schale ist in der 2. Periode und in der IV. Hauptgruppe und besitzt die Elektronenkonfiguration

$1s^2 2s^2 2p^2$ bzw. $[He]2s^2 2p^2$

c) Das Element mit 2 Elektronen auf der äußersten vierten Schale ist in der 4. Periode und in der 2. Hauptgruppe und besitzt die Elektronenkonfiguration

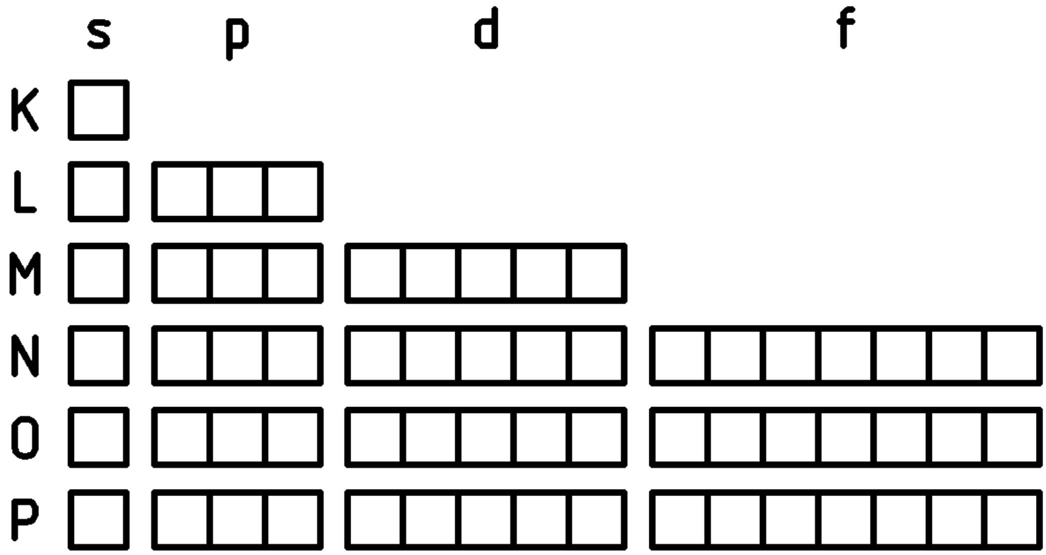
$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$ bzw. $[Ar]4s^2$

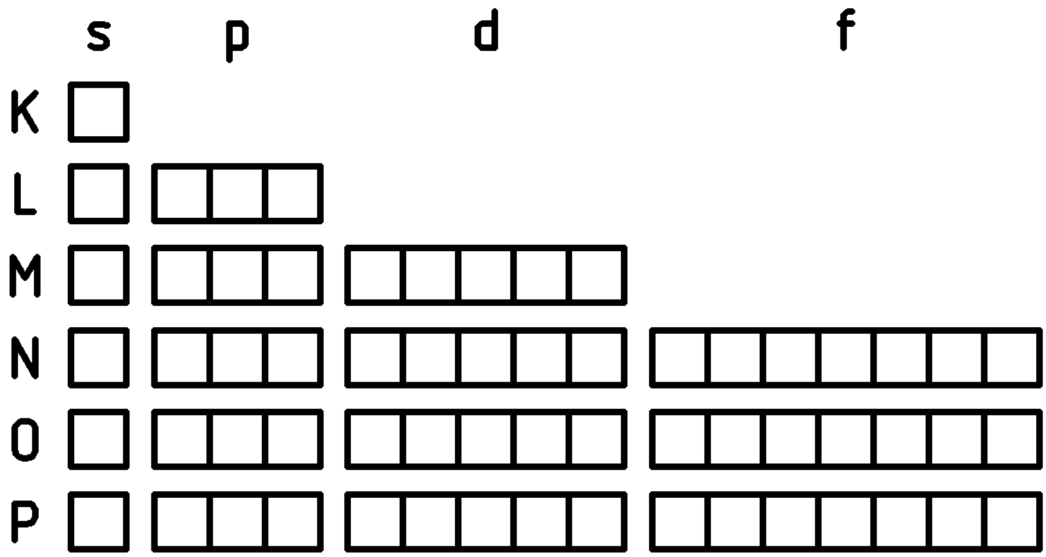
Aufgabe 4.58:

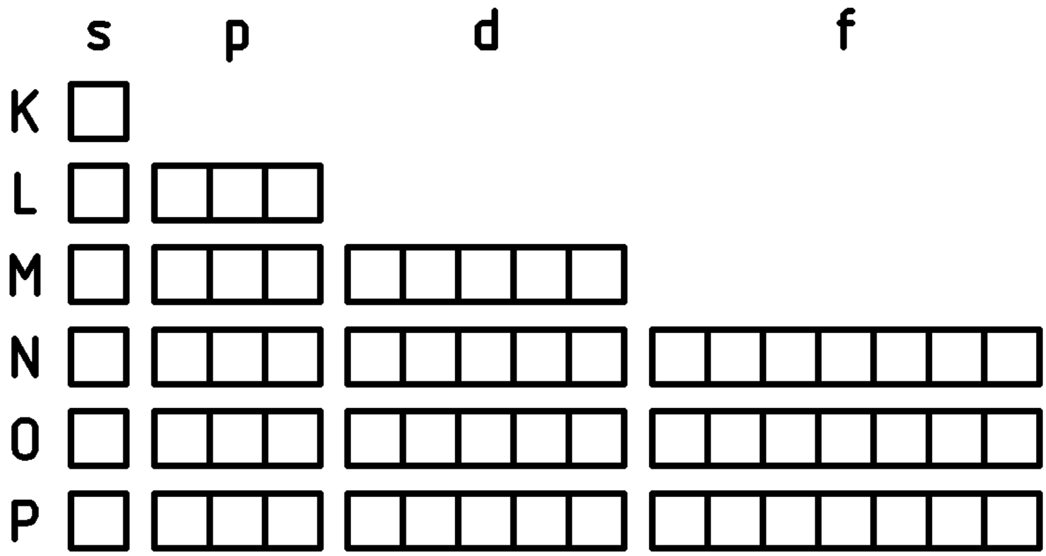
Bestimme mit dem Besetzungsschema oben die Hauptgruppe und die Periode folgender Elemente:

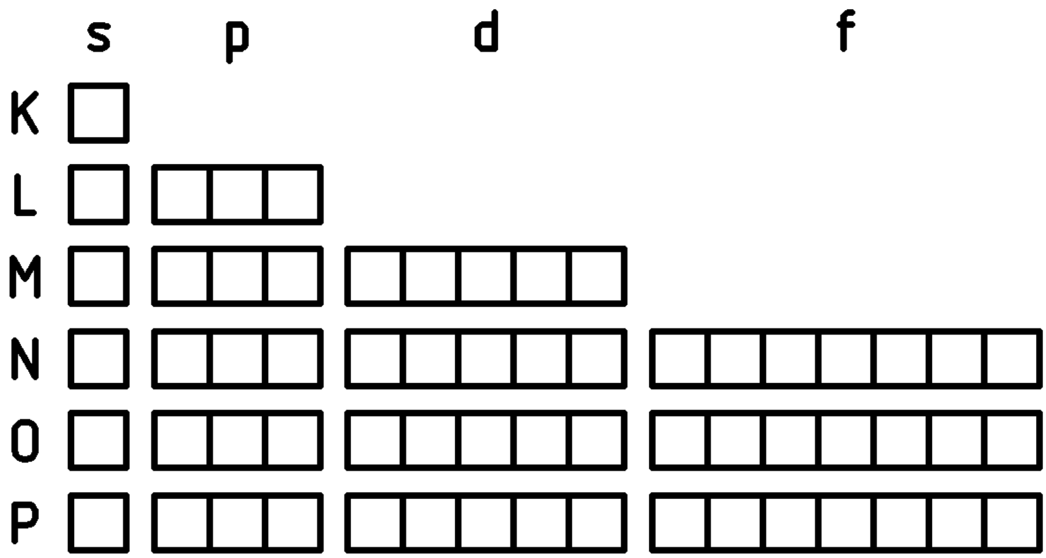
Nummer 16 (Schwefel); Nummer 37 (Rubidium); Nummer 52 (Tellur); Nummer 86 (Radon)

Damit's schneller geht, ein paar Besetzungsschemata.









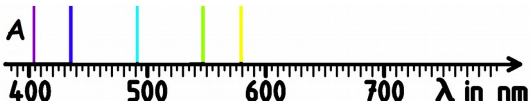
Aufgabe 4.59:

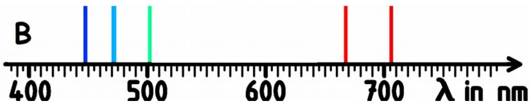
Beim Auffüllen eines Orbitals (z.B. eines p-Orbitals mit drei verschiedenen Magnetquantenzahlen) werden zuerst die verschiedenen Magnetquantenzahlen nur einfach besetzt. Erst wenn alle Magnetquantenzahlen einfach besetzt sind, kommt in jedes noch ein zweites Elektron mit anderem Spin.

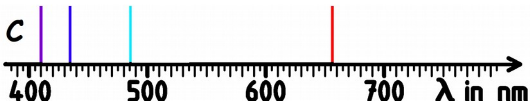
Gib eine anschauliche Begründung, weshalb zwei Elektronen mit verschiedenen Magnetquantenzahlen eine niedrigere Energie haben als mit derselben Magnetquantenzahl.

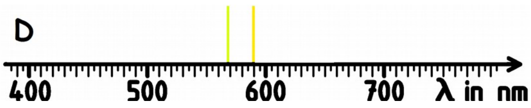
Aufgabe 4.60:

Ordne mit Hilfe von Formelsammlung S.50 die Spektren den richtigen Elementen zu.









Aufgabe 4.61:

Ein System mit einem Elektron liefert im Spektrum die Wellenlängen 364nm, 695nm und 765nm.

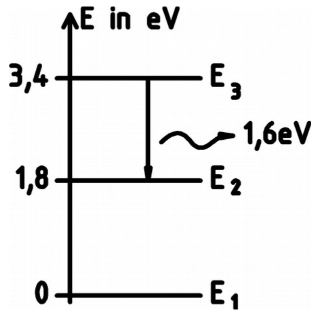
a) Bestimme die Energiedifferenzen für die dazugehörigen Übergänge.

b) Zeichne mit Hilfe von a) ein skaliertes und beschriftetes Energieniveauschema für dieses System.

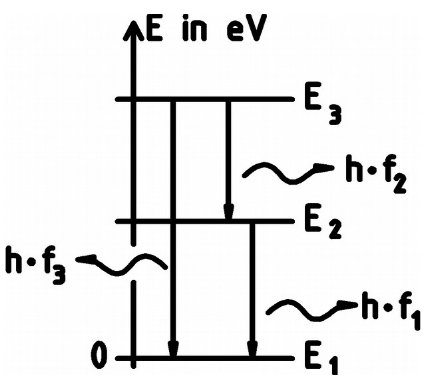
Lösung:

a) $$\Delta E_1 = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{4{,}1357 \cdot 10^{-15} eVs \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{364 \cdot 10^{-9} m} = \underline{3{,}4\,eV}$$
$$\Delta E_2 = \underline{1{,}8\,eV} \quad ; \quad \Delta E_3 = \underline{1{,}6\,eV}$$

b) siehe rechts

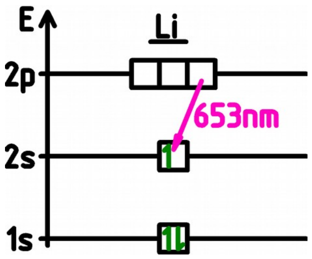


Aufgabe 4.62:



Photonen im sichtbaren Spektrum haben Energien zwischen 1,6eV und 3,2eV. Ein System mit einem Elektron habe den Grundzustand mit Energie Null und zwei angeregte Zustände. Alle drei hier möglichen Übergänge führen zu Photonen im sichtbaren Spektrum.

Gib die Energien der beiden angeregten Zustände an. Begründe deine Antwort.



Das Besetzungsschema oben kann man auch benutzen, um ein qualitatives Energieniveauschema für die einzelnen Elektronen in einem Atom anzugeben. Im Bild ist noch der Übergang vom ersten angeregten in den Grundzustand eingezeichnet.

Aufgabe 4.63:

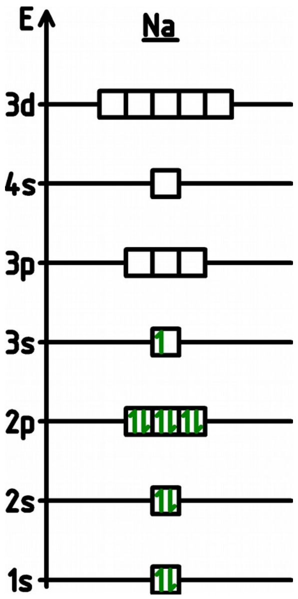
Das Element mit der Ordnungszahl 11 heißt Natrium. Bei den angeregten Zuständen gehen wir davon aus, dass immer nur das oberste Elektron seinen Zustand wechselt. Die anderen Elektronen verbleiben in ihren Zuständen.

a) Fertige ein qualitatives Energieniveauschema inklusive der ersten drei angeregten Zustände für die Elektronen im Natrium-Atom an.

Der Übergang von ersten angeregten Zustand in den Grundzustand erzeugt Photonen der Wellenlänge 589nm (gelb Farbe von Na-Dampflampen), der vom zweiten angeregten Zustand in den ersten angeregten Zustand Photonen der Wellenlänge 1140nm. Im Grundzustand hat das äußerste Elektron eine Bindungsenergie von 5,1eV.

b) Berechne die Energien der ersten beiden angeregten Zustände.

Lösung:



a) siehe Bild

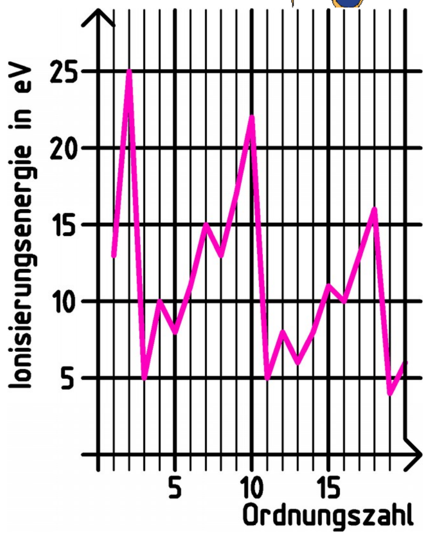
b) $$\Delta E_{3p\to 3s} = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} = 4{,}1\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot 10^{8}\,m/s}{589\cdot 10^{-9}\,m} = \underline{2{,}1\,eV}$$

$$\Delta E_{4s\to 3p} = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} = 4{,}1\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot 10^{8}\,m/s}{1140\cdot 10^{-9}\,m} = \underline{1{,}1\,eV}$$

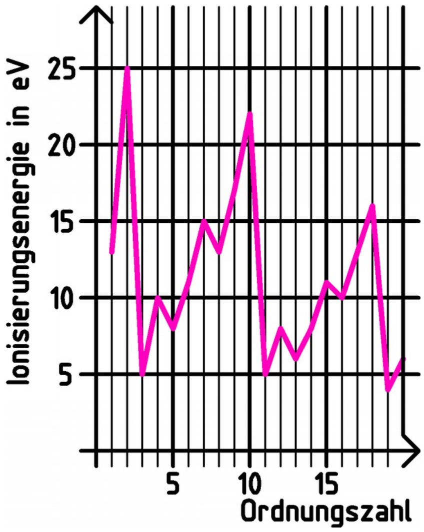
$$\Rightarrow E_{3p} = -5{,}1\,eV + 2{,}1\,eV = \underline{-3\,eV}$$
$$\Rightarrow E_{4s} = -3\,eV + 1{,}1\,eV = \underline{-1{,}9\,eV}$$

4.4 Stabilität von voll besetzten Orbitalen

Voll besetzte Orbitale sind stabiler als nur teilweise besetzte. Besonders stabil sind die Elektronenhüllen von Atomen, die als letztes ein p-Orbital voll besetzt haben. Diese Elemente nennt man Edelgase.



Das Bild zeigt den Verlauf der Ionisierungsenergie (die Energie, die man braucht, um dem Atom ein Elektron zu entreißen) in Abhängigkeit der Ordnungszahl. Die Elemente welche zuletzt ein Orbital voll besetzt haben, haben im Vergleich zu ihren Nachbarn besonders hohe Ionisierungsenergien, da ihre Elektronenhüllen besonders stabil sind. Am Diagramm erkennt man auch, dass der Effekt mit zunehmender Ordnungszahl abnimmt.



Aufgabe 4.64:

Am Diagramm erkennt man, dass die Elemente mit den Ordnungszahlen 2, 4, 10, 12 und 18 im Vergleich zu ihren Nachbarn höhere Ionisierungsenergien besitzen.

a) Gib die Bezeichnung der Elemente an und gib die Elektronenkonfiguration auf der jeweils äußersten Schale an. Welche Orbitale auf der äußersten Schale sind jeweils voll besetzt?

b) Begründe, weshalb die Ionisierungsenergie mit zunehmender Ordnungszahl tendenziell kleiner wird.

4.5 Abi mit Lösung

Aufgabe 4.65: Abi 1998; Quantenhafte Emission und Absorption von Energie

Durchstrahlt man Na-Dampf, dessen Atome sich im Grundzustand befinden, mit Glühlicht, so stellt man im Spektrum es durchgelassenen Lichtes eine dunkle Linie fest. Die zugehörige Wellenlänge ergibt sich zu ca. 590 nm.

a) Erklären Sie das Zustandekommen dieser dunklen Linie und zeigen Sie, dass die zugehörige Anregungsenergie 2,1 eV beträgt.

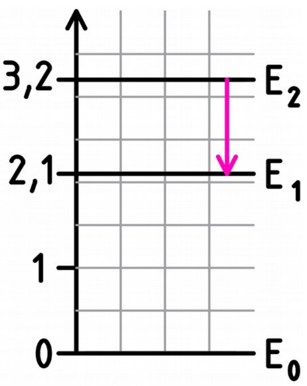
Die Anregung der Na-Atome, die stets vom Grundzustand aus erfolgt, werden nun durch Beschuss mit Elektronen durchgeführt. Erreicht die maximale kinetische Energie der Elektronen 3,2 eV, so treten im zugehörigen Emissionsspektrum neben der Linie mit der Wellenlänge 590 nm erstmals weitere Linien auf.

b) Zeichne auf der Grundlage der bisherigen Informationen ein Energieniveauschema und berechne die größte im Emissionsspektrum zu erwartende Wellenlänge.

Lösung:

a) Nur Photonen deren Energie genau der Anregungsenergie vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand gleich ist, können von den Na-Atomen absorbiert werden. Beim Zurückfallen in den Grundzustand werden zwar wieder Photonen derselben Wellenlänge emittiert, aber die Emission geschieht in alle Richtungen. Nur die allerwenigsten dieser Photonen werden genau in Durchstrahl-Richtung emittiert, deshalb fehlen die Photonen dieser Wellenlänge -> dunkle Linie

$$E = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} = 4{,}14\cdot10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot10^{8}\,m/s}{590\cdot10^{-9}\,m} = \underline{\underline{2{,}1\,eV}}$$



b) Schema siehe Bild;

Die größte Wellenlänge gehört zur kleinsten Energie, das ist der markierte Übergang

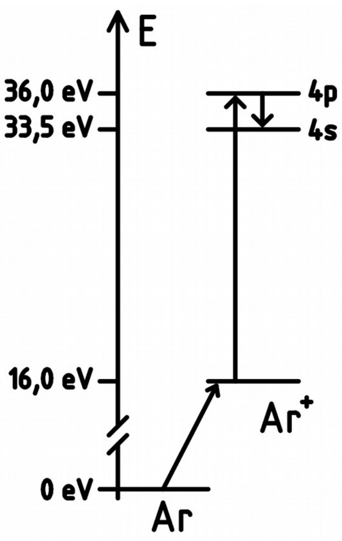
$$\Delta E = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h\cdot c}{\Delta E} = \frac{4{,}14\cdot10^{-15}\,eVs\cdot3\cdot10^{8}\,m/s}{1{,}1\,eV} = \underline{\underline{1129\,nm}}$$

Aufgabe 4.66: Abi 2006; Argon-Ionen-Laser

Angeregte Argon-Ionen-Zustände werden zum Erzeugen von Laserlicht verwendet.

a) Welche Geschwindigkeit müssen Elektronen mindestens haben, um ein Argon-Atom zu ionisieren, wenn dafür eine Energie von 16,0 eV notwendig ist?

Das Laserlicht entsteht beim Übergang der Argon-Ionen vom Zustand 4p in den Zustand 4s (siehe Bild). Um das obere Laserniveau 4p zu erreichen, ist zusätzlich zur Ionisierung noch eine Anregung des Ions durch einen Elektronenstoß erforderlich.



b) Ein Elektron der Geschwindigkeit $4{,}2\cdot 10^6\,m/s$ verliert bei der Ionisation von Argon-Atomen 30% seiner Geschwindigkeit. Untersuchen Sie durch Rechnung, ob dieses Elektron anschießend noch in der Lage dazu ist, ein Argon-Ion in das obere Laserniveau 4p anzuregen.

c) Berechnen Sie die Wellenlänge des Laserlichts.

d) Vom unteren Laserniveau 4s fallen die angeregten Argon-Ionen in kürzester Zeit wieder in den Grundzustand Ar^+ zurück. Hierbei wird ungenutzte Energie frei. Welcher Wirkungsgrad ergibt sich hiermit höchstens für den Laser? Die Anfängliche Ionisierungsarbeit soll unberücksichtigt bleiben.

e) Geben Sie eine mögliche Ursache dafür an, dass der Wirkungsgrad in Wirklichkeit unter dem in Teilaufgabe d errechneten Wert liegt.

Lösung:

a) $E=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \rightarrow v=\sqrt{\frac{2\cdot E}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 16\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg}}=\underline{\underline{2{,}37\cdot 10^6\,m/s}}$

b) $E_{Rest}=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v_{Rest}^2=\frac{1}{2}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot(0{,}7\cdot 4{,}2\cdot 10^6\,m/s)^2=\underline{\underline{3{,}9\cdot 10^{-18}\,J=24{,}6\,eV}}$

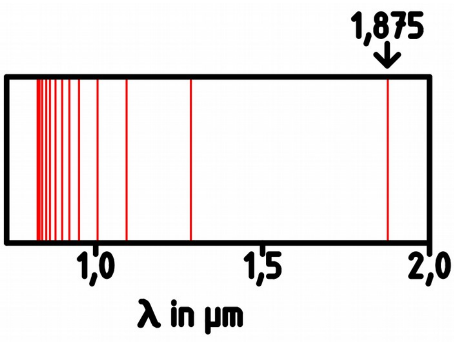
Mehr als die nötigen 20 eV. Das Elektron kann also noch ein Argon-Ion anregen.

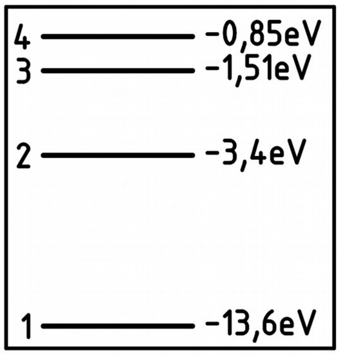
c) $E=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda=\frac{h\cdot c}{E}=\frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{2{,}5\,eV}=\underline{\underline{497\,nm}}$

d) $\eta = \frac{E_{nutz}}{E_{ges}} = \frac{2{,}5\,eV}{20\,eV} = \underline{\underline{0{,}125 = 12{,}5\,\%}}$

e) Die Elektronen, welche die Argon-Ionen in den Zustand 4p anheben sollen können auch noch viele andere Dinge machen, zum Beispiel Argon-Atome anregen, Argon-Ionen in andere als den 4p-Zustand anregen oder nach elastischen Stößen mit Argon-Teilchen auf die Gehäusewand treffen und dort Energie abgeben. Außerdem müssen wegen der ständigen Rekombinationen von Argon-Ionen immer wieder neue Argon-Atome ionisiert werden. All das ist zusätzlicher "Energieverlust". (Nur ein Grund gefragt!)

Aufgabe 4.67: Abi 1999





Das Linienspektrum eines Atoms steht in engem Zusammenhang mit dessen Energiestufen-Schema. Das erste Bild zeigt Emissionslinien einer bestimmten Serie des Wasserstoff-Spektrums, das zweite Bild zeigt einen Ausschnitt aus dem Energiestufen-Schema des Wasserstoffatoms.

a) Welcher Übergang im Energiestufen-Schema führt zur Emission der Linie mit der Wellenlänge 1,875 μm?

b) Erklären Sie qualitativ das Zustandekommen der übrigen Linien dieser Serie.

c) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Wellenlänge der kurzwelligen Seriengrenze dieser Serie 0,82 μm beträgt.

Ein positiv geladenes Wasserstoff-Ion fängt ein freies Elektron mit geringer kinetischer Energie (kleiner 0,1 eV) ein, wobei ein Photon mit λ = 800 nm entsteht.

d) Ermitteln Sie durch Rechnung und Vergleich mit den Bildern oben, auf welchem Energieniveau sich das Elektron unmittelbar nach dem Einfang durch das Wasserstoff-Ion befindet. (Kontrolle: n = 3)

e) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Elektrons vor dem Einfang.

Lösung:

a) $\Delta E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{1{,}875 \cdot 10^{-6}\, m} = \underline{0{,}66\, eV = 1{,}51\, eV - 0{,}85\, eV}$

Die Linie gehört zum Übergang von 4 nach 3 also vom dritten angeregten Zustand in den zweiten angeregten Zustand.

b) Die anderen Linien dieser Serie entstehen genau wie diese durch Zurückfallen des Elektrons in die M-Schale (n = 3), nur aus höheren Energieniveaus mit n ≥ 5 also aus höheren Schalen.

c) Die Seriengrenze entspricht dem Einfang eines freien Elektrons ohne kinetische Energie.

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^8\, m/s}{1{,}51\, eV} = \underline{\underline{0{,}82\, \mu m}}$$

d) $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{800 \cdot 10^{-9}\, m} = \underline{1{,}55\, eV}$

Die abgegebene Energie ist wegen der geringen kinetischen Energie des freien Elektrons etwas größer als die Bindungsenergie für n = 3.

e) $E_{kin} = 1{,}55\, eV - 1{,}51\, eV = 0{,}04\, eV$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}04 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\, kg}} = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^5\, m/s}}$$

Aufgabe 4.68: Abi 2001

Mit einfachen atomphysikalischen Modellen lässt sich eine Reihe von Experimenten erklären:

a) In die Flamme eines Bunsenbrenners wird Kochsalz gebracht. Warum färbt sie sich dabei intensiv gelb?

b) Das Licht einer Natriumdampflampe fällt auf einen Schirm. Bringt man eine mit Kochsalz beschickte Bunsenbrennerflamme in den Strahlengang, so erscheint ein deutlich sichtbarer Schatten der Flamme. Erklären Sie diesen Sachverhalt.

c) Beschreiben Sie, was zu beobachten ist, wenn ein schmales Lichtbündel einer Natriumdampflampe auf einen mit Natriumdampf gefüllten Glaskolben trifft.

d) Erklären Sie, weshalb der in c) beschrieben Effekt nicht eintritt, wenn man das Lichtbündel der Natriumdampflampe auf ein Gefäß mit einer Kochsalzlösung (NaCl) richtet.

e) Nun durchsetzt das Licht einer Kohlebogenlampe mit kontinuierlichem Spektrum den mit Natriumdampf gefüllten Glaskolben und wird anschließend mittels eines optischen Gitters spektral zerlegt. Beschreiben und erklären Sie das entstehende Spektrum.

Lösung:

a) Durch die Energie der Flamme werden Natriumatome in den ersten angeregten Zustand angehoben. Beim Zurückfallen auf den Grundzustand geben sie die freiwerdende Energie in Form eines Photons ab. Deshalb haben alle so entstandenen Photonen dieselbe Energie also auch dieselbe Wellenlänge, wodurch das monochromatische gelbe Licht entsteht.

b) Die Photonen aus der Natriumdampflampe haben genau die richtige Energie, um Natriumatome anregen zu können, werden also vom Natrium in der Flamme absorbiert. Beim Zurückfallen in den Grundzustand emittieren die Natriumatome zwar wieder Photonen derselben Wellenlänge, allerdings in alle möglichen Richtungen, weshalb auf dem Schirm deutlich weniger ankommen -> Schatten.

c) Die Natriumatome, welche sich im Bereich des Lichtbündels befinden, können von den Photonen angeregt werden. Beim Zurückfallen in den Grundzustand emittieren sie wieder Photonen derselben Wellenlänge. Der vom Lichtbündel getroffene Bereich beginnt also gelb zu leuchten.

d) In einer Kochsalzlösung befinden sich keine Natriumatome sondern Natrium in anderer Form (als Ionen). Es gibt also keine Atome, die von den Photonen der Natriumdampflampe angeregt werden können.

e) Die Photonen der richtigen Wellenlänge (das gelb von oben) können wieder Natriumatome anregen und fehlen deshalb auf dem Schirm. Auf dem Schirm erscheint also ein Spektrum in dem diese Wellenlängen fehlen. Die Wellenlängen, welche keiner Anregungsenergie des Natriums entsprechen werden nicht beeinflusst. Deshalb erscheint im so erzeugten kontinuierlichen Spektrum an den Stellen dieser Wellenlänge eine schwarze Linie - kein Licht -> Absorbtionslinien-Spektrum

Aufgabe 4.69: Abi 2002

Elektronen mit der kinetischen Energie 10,0 eV treffen auf ein Gas aus Wasserstoffatomen, die sich zum größten Teil im Grundzustand, zum kleinen Teil im ersten angeregten Zustand befinden.

a) Weisen Sie nach, dass die Wasserstoffatome im Grundzustand von den Elektronen nicht angeregt werden können.

b) Zeigen Sie, dass die Wasserstoffatome im ersten angeregten Zustand von den Elektronen in jeden beliebigen höheren Zustand angeregt und auch ionisiert werden können.

c) Geben Sie ein mögliches Verfahren an, um die kinetische Energie der Elektronen zu messen, nachdem sie durch das Wasserstoffgas geflogen sind.

d) Erklären Sie, wie die drei Werte 10,0 eV, 8,1 eV und 7,5 eV im Energiespektrum dieser Elektronen zustande kommen.

Ein Wasserstoffatom kann ein zusätzliches Elektron an sich binden, so dass ein negativ geladenes H^--Ion entsteht. Bei diesem Vorgang wird ein Photon emittiert. Im Grundzustand des H^--Ions ist das überzählige Elektron mit 0,75 eV an das Wasserstoffatom gebunden.

e) Erklären Sie, weshalb das bei der Bildung von H^--Ionen im Grundzustand auftretende Emissionsspektrum kontinuierlich mit einer langwelligen Grenze λg ist, und berechnen Sie λg.

Durch Photonenabsorbtion können die H^--Ionen wieder in Wasserstoffatome und freie Elektronen zerlegt werden. Dabei zeigt die Absorption elektromagnetischer Strahlung durch die Ionen bei λ = 850 nm ein Maximum.

f) Berechnen Sie die kinetische Energie des frei gesetzten Elektrons, wenn ein H^--Ion im Grundzustand elektromagnetische Strahlung der Wellenlänge 850 nm absorbiert.

Lösung:

a) Energieniveaus im Wasserstoff

$$E_1 = -R_H \cdot h \cdot c \cdot \frac{1}{n^2} = -1{,}097 \cdot 10^7 m^{-1} \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15} eVs \cdot 3 \cdot 10^8 m/s \cdot 1 = \underline{-13{,}6\,eV}$$

$$E_2 = E_1 \cdot \frac{1}{2^2} = -13{,}6\,eV \cdot \frac{1}{4} = \underline{-3{,}4\,eV}$$

Minimale Anregungsenergie: $\Delta E_{min} = 13{,}6\,eV - 3{,}4\,eV = 10{,}2\,eV$

Die Elektronen bräuchten zur Anregung also mindestens 10,2 eV, sie haben aber nur 10eV und das ist zu wenig.

b) Wie in a) berechnet ist die Ionisierungsenergie aus dem ersten angeregten Zustand 3,4 eV und das ist kleiner als die 10 eV der Elektronen. Deshalb können's die Elektronen.

c) Man erzeugt mit einer Bremsspannung ein Gegenfeld und misst die von den Elektronen, welche das Gegenfeld durchqueren können, erzeugte Stromstärke. Anschließend regelt man die Gegenspannung beginnend mit 0 V langsam hoch. Jedes mal, wenn die Stromstärke sprunghaft sinkt, hat man eine vorkommende kinetische Energie gefunden. Die kinetische Energie derjenigen Elektronen, die plötzlich das Gegenfeld nicht mehr durchqueren können, ist genauso groß wie der Zugewinn an elektrischer Energie beim Durchqueren des Gegenfeldes; Ekin = U·e.

d) Wasserstoffenergieen: -13,6 eV; -3,4 eV; -1,5 eV; -0,85 eV; -0,54 eV; ...

10,0 eV: Diese Elektronen haben keine Energie abgegeben, sondern nur elastische Stöße mit den Wasserstoffatomen ausgeführt

8,1 eV: Diese Elektronen haben 1,9 eV = 3,4 V - 1,5 eV abgegeben, also Wasserstoffatome vom ersten in den zweiten angeregten Zustand angehoben.

7,5 eV: Diese Elektronen haben 2,5 eV ≈ 3,4 eV - 0,85 eV abgegeben, also Wasserstoffatome vom ersten angeregten Zustand in den dritten angeregten Zustand angehoben.

e) Bei der Bildung des H-Ions wird die Bindungsenergie (0,75 eV) und die kinetische Energie des Elektrons - welche größer gleich Null ist - frei. Es wird also mindestens die Bindungsenergie frei, was einer minimalen Frequenz also einer maximalen Wellenlänge der entstehenden Photonen entspricht.

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda_g} \rightarrow \lambda_g = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s}{0{,}75\,eV} = \underline{1{,}66\,\mu m}$$

f) $E_{Ph} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\,m/s}{850 \cdot 10^{-9}\,m} = \underline{1{,}46\,eV}$

Die überschüssige Energie also 1,46 eV - 0,75 eV = 0,71 eV wird vom Elektron als kinetische Energie abtransportiert.

Aufgabe 4.70: Abi 2004

Im Folgenden soll die Anregung von Neon-Atomen durch Elektronenstöße betrachtet werden. Hierbei wird bevorzugt die Energie 18,9 eV aus dem Grundzustand heraus absorbiert.

a) Zeigen Sie, dass die Strahlung beim Übergang des so angeregten Neonatoms in den Grundzustand nicht im sichtbaren Bereich liegt.

b) Tatsächlich fällt das angeregte Neoatom zunächst in einen Zwischenzustand, wobei orangefarbenes Licht der Wellenlänge 585 nm emittiert wird. Berechnen Sie die Energie dieses Zwischenzustands bezüglich des Grundzustands.

c) Nun durchlaufen zunächst ruhende Elektronen in einer mit Neongas gefüllten Röhre zwischen zwei Elektroden die Spannung U = 40 V. Man kann zwei schmale orangefarbene leuchtende Bereiche beobachten. Erklären Sie das Zustandekommen dieser Bereiche und geben Sie ihre ungefähre Lage zwischen den Elektroden an. Welchen Einfluss hat eine Erhöhung der Beschleunigungsspannung? Begründen Sie ihre Antwort.

Atome können auch durch Photonen angeregt werden.

d) Beschreiben Sie einen Versuch, mit dem sich die Anregung von Atomen durch Photonen demonstrieren lässt. Fertigen Sie dazu eine beschriftete Skizze an und beschreiben Sie die Durchführung und die Beobachtung.

Lösung:

a) $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}{18{,}9\, eV} = \underline{65{,}7\, nm < 390\, nm}$

also nicht sichtbar sonder UV

b) $\Delta E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\, m/s}{585 \cdot 10^{-9}\, m} = \underline{2{,}1\, eV}$

Die Energie des Zwischenzustands liegt also bei 18,9 eV - 2,1 eV = 16,8 eV.

c) Beim Durchqueren der Beschleunigungsspannung nimmt die kinetische Energie der Elektronen zu. Sobald die kinetische Energie 18,9 eV erreicht können Sie Neonatome anregen und tun dies - bei hinreichender Dichte des Neongases - sehr schnell. Die angeregten Atome emittieren das oben erwähnte Licht und erzeugen so die leuchtenden Bereiche.

Ausgehend von einem homogenen E-Feld zwischen den Elektroden ist die gewonnene kinetische Energie proportional zum zurückgelegten Weg, deshalb entstehen die Leuchtschichten nach ca. 19/40 bzw. 38/40 der Beschleunigungsstrecke.

Eine Erhöhung der Beschleunigungsspannung bewirkt, dass die Elektronen die zur Anregung erforderliche kinetische Energie bereits früher besitzen, die leuchtenden Bereiche wandern also in Richtung der positiv geladenen Elektrode.

d) Zum Beispiel Absorptionsspektrum durch Bestrahlen einer mit Kochsalz (Natrium) beschickten Flamme mit weißem Licht und anschließender Zerlegung mit einem optischen Gitter -> Absorptionslinien

<u>Aufgabe 4.71: Abi 2005; Spektren von He</u>

Das Edelgas Helium wurde 1868 durch seine Fraunhofer-Linien im Sonnenspektrum entdeckt und erst 1895 in Erdgasquellen auf der Erde gefunden.

a) Zum Spektrum von atomarem Helium (He) gehört u.a. eine Linie mit der Wellenlänge 588 nm. Berechnen Sie die zugehörige Photonenenergie.

Daneben lassen sich aber auch andere Linien nachweisen, die von einfach ionisiertem Helium ($He^{+}-Ionen$) stammen. Ein solches Ion ist ein Einelektronensystem wie das H-Atom. Der Wert der Bindungsenergie des Elektrons auf der n-ten Energiestufe berechnet sich durch:

$$E_n = -\frac{Z^2 \cdot R \cdot h \cdot c}{n^2}$$

Dabei ist R die Rydbergkonstante und Z die Ordnungszahl. Gehen Sie zunächst davon aus, dass die Rydbergkonstante des Wasserstoffatoms und des Helium-Ions gleich groß sind.

b) Berechnen Sie die Ionisierungsenergie von He^{+} , das sich im Grundzustand befindet. (Kontrolle: 54,4 eV)

c) Zeigen Sie, dass die 2., 4. und 6. Energiestufe des Helium-Ions mit den ersten drei Stufen des H-Atoms übereinstimmen.

d) Die Hα-Linie hat die größte Wellenlänge in der Balmerserie des Wasserstoffatoms. Welcher Übergang im Helium-Ion führt zur Emission einer Strahlung mit dieser Wellenlänge? Begründen Sie ihre Antwort.

e) Tatsächlich ist die Rydbergkonstante des Helium-Ions geringfügig größer als die des H-Atoms. Was folgt daraus für die Wellenlänge der Helium-Ion-Linie aus Teilaufgabe d) im Vergleich zur Hα-Linie?

Lösung:

a) $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\, m/s}{588 \cdot 10^{-9}\, m} = \underline{\underline{2{,}11\, eV}}$

b) Die Ionisierungsenergie entspricht der Bindungsenergie im Grundzustand n = 1.

$$E_1 = -\frac{2^2 \cdot 1{,}1 \cdot 10^7\, m^{-1} \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^8\, m/s}{1^2} = \underline{\underline{-54{,}6\, eV}}$$

Also ist die Ionisierungsenergie 54,6 eV.

c) Helium: $E_2 = -R \cdot h \cdot c$; $E_4 = -\frac{4}{16} \cdot R \cdot h \cdot c = -\frac{1}{4} \cdot R \cdot h \cdot c$; $E_6 = -\frac{4}{36} \cdot R \cdot h \cdot c = -\frac{1}{9} \cdot R \cdot h \cdot c$

Wasserstoff: $E_1 = -R \cdot h \cdot c$; $E_2 = -\frac{1}{4} \cdot R \cdot h \cdot c$; $E_3 = -\frac{1}{9} \cdot R \cdot h \cdot c$

Die genannten Energiestufen stimmen überein.

d) Balmerserie -> Übergang nach n = 2; größte Wellenlänge -> kleinste Energie, also Übergang von n = 3 nach n = 2 im Wasserstoff; dieser Übergang hat nach c) dieselbe Energie wie der von n = 6 nach n = 4 im Helium-Ion, also ist dies auch der Übergang mit derselben Wellenlänge

e) R größer -> alle Energien betragsmäßig größer -> Energiedifferenzen größer -> Wellenlängen kleiner; die Wellenlänge im Helium-Ion-Spektrum ist als geringfügig kleiner als die der Hα-Linie.

Aufgabe 4.72: Abi 2008; Der Atomaufbau

Vor 100 Jahren haben Johannes Rydberg und Walter Ritz die Serienformel des Wasserstoffatoms aufgestellt:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$; mit $n_2 > n_1$ und R_H der Rydbergkonstante

a) Zeigen Sie, dass man bei geeigneter Wahl des Energienullpunkts aus der Serienformel die n-te Energiestufe $E_n = R_H \cdot h \cdot c \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$ des Wasserstoffatoms erhält.

b) Berechnen Sie die Energiewerte der drei niedrigsten Energieniveaus und die Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms.

Im sichtbaren Bereich des Lichts (380 nm bis 750 nm) sind nur Linien der Balmer-Serie ($n_1=2$) zu beobachten.

c) Bestimmen Sie rechnerisch, zwischen welchen Wrten die Wellenlängen der Linien der Balmer-Serie liegen.

d) Zeigen Sie, dass alle Linien der Lyman-Serie ($n_1=1$) im ultravioletten Bereich des Lichts liegen.

Lösung:

a) Die Serienformel gibt die Wellenlänge eines emittierten Photons beim Übergang zwischen zwei Energiestufen. Damit erhält man die Energiedifferenz zwischen zwei Energiestufen zu:

$$\Delta E = h\cdot f = h\cdot c\cdot \frac{1}{\lambda} = h\cdot c\cdot R_H\cdot\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

Wählt man den Energienullpunkt bei $n_1=1$, dann ist die Energie des n-ten Zustands gleich der Energiedifferenz zum Zustand mit n = 1 :

$$E=\Delta E_{n\to 1}=h\cdot c\cdot R_H\cdot\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)=h\cdot c\cdot R_H\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

b)

n = 1: $E_1=R_H\cdot h\cdot c\cdot\left(1-\frac{1}{1^2}\right)=\underline{0}$

n = 2: $E_2=R_H\cdot h\cdot c\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=1{,}097\cdot 10^7(1/m)\cdot 4{,}136\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^8\,m/s\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\underline{10{,}2\,eV}$

n = 3: $E_2=R_H\cdot h\cdot c\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)=1{,}097\cdot 10^7(1/m)\cdot 4{,}136\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^8\,m/s\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)=\underline{12{,}1\,eV}$

Ionisierungsenergie für n gegen Unendlich:

$$\lim_{n\to\infty} E_n=\lim_{n\to\infty} R_H\cdot h\cdot c\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=R_H\cdot h\cdot c=1{,}097\cdot 10^7(1/m)\cdot 4{,}136\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^8\,m/s=\underline{13{,}6\,eV}$$

c) $\Delta E_{min}=E_3-E_2=12{,}1\,eV-10{,}2\,eV=\underline{1{,}9\,eV}$

$$\Delta E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda_{max} = \frac{h \cdot c}{\Delta E_{min}} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}{1{,}9\, eV} = \underline{654\, nm}$$

$$\Delta E_{max} = 13{,}6\, eV - 10{,}2\, eV = \underline{3{,}4\, eV} \rightarrow \lambda_{min} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}{3{,}4\, eV} = \underline{365\, nm}$$

Die Wellenlängen der Balmer-Serie liegen zwischen 365 nm und 654 nm.

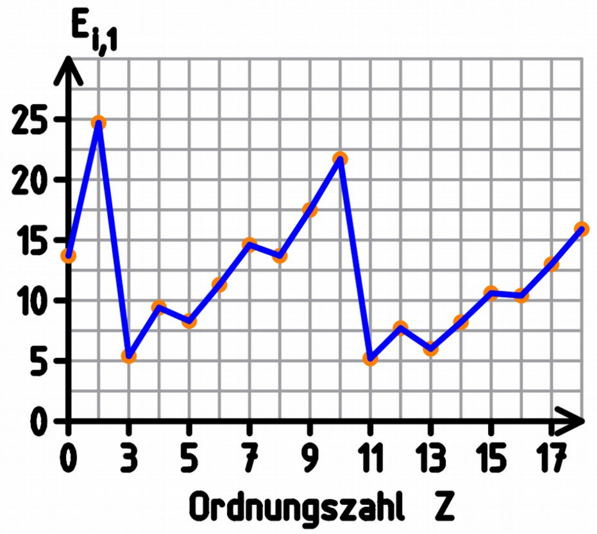
d) $\Delta E_{min} = 10{,}2\, eV - 0\, eV = \underline{10{,}2\, eV}$

$$\lambda_{max} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}{10{,}2\, eV} = \underline{122\, nm}$$

Alle anderen Übergänge erzeugen größere Energien also kleinere Wellenlängen. Deshalb sind alle Wellenlängen kleiner gleich 122 nm, also kleiner 380 nm, also im UV-Bereich.

Aufgabe 4.73: Abi 2008; Aufbau des Periodensystems

Einen Hinweis auf den Aufbau der Atomhülle mit mehreren Elektronen gibt die so genannte erste Ionisierungsenergie $E_{i,1}$ in Abhängigkeit von der Ordnungszahl Z (siehe nebenstehende Abb.). Dabei handelt es sich um die Energie, die man aufwenden muss, um von einem Atom im Grundzustand ein Elektron zu entfernen.



a) Erläutern Sie, welche Hinweise das Diagramm über den Aufbau der Elektronenhülle gibt. Gehen Sie dabei auf die lokalen Maxima (Z = 2 und Z = 10) und die darauf folgenden Minima des Diagramms ein.

b) Die zweite Ionisierungsenergie ist die Energie, die man aufwenden muss, um dem einfach positiv geladenen Ion im Grundzustand ein weiteres Elektron zu entreißen. Beschreiben Sie (für Z > 1) qualitativ den Verlauf dieser zweiten Ionisierungsenergie im Vergleich zur ersten.

Lösung:

a) Die Elemente mit Z = 2 und Z = 10 haben sehr hohe Ionisierungsenergien, besitzen also anscheinend nur sehr stark gebundene Elektronen, was darauf zurückzuführen ist, dass die äußerste Elektronenschale voll besetzt ist.

Die Elemente mit Z = 3 und Z = 11 haben sehr niedrige Ionisierungsenergien, besitzen also anscheinend ein Elektron, welches nur sehr schwach gebunden ist, was darauf zurückzuführen ist, dass das äußerste Elektron als einziges Elektron auf der äußersten Schale ist.

b) Voll besetzte Elektronenschalen besitzen jetzt die Ionen mit Z = 3 und Z = 11, hier liegen die neuen Maxima. Einzelne Elektronen auf der äußersten Schale besitzen die Ionen mit Z = 4 und Z = 12, hier liegen die neuen Minima. Die ganze Kurve wird also um eins nach rechts verschoben, wobei die Werte für die zweite Ionisierungsenergie höher sind als jene für die erste, weil das Ion ja positiv geladen ist, und deshalb das äußerste Elektron stärker bindet als das neutrale Atom.

Aufgabe 4.74: Abi 2008; Anregung von Natriumatomen

Das Licht einer Glühbirne soll durch ein optisches Gitter spektral zerlegt und auf einen Schirm projiziert werden.

a) Schildern Sie an Hand einer Skizze den Versuchsaufbau zur Erzeugung eines Gitterspektrums.

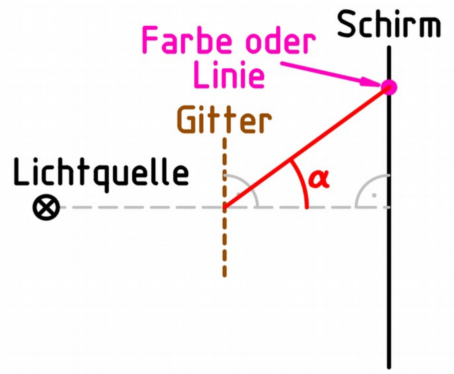
Nun durchquert das Licht vor seiner Zerlegung ein mit Natriumdampf gefülltes Glasgefäß, wobei sich die Natriumatome im Grundzustand befinden. Ein Natriumatom gibt beim Übergang vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand ein Photon mit der Wellenlänge 589 nm ab.

b) Vergleichen Sie das ursprüngliche Spektrum des Glühlampenlichts mit dem Spektrum nach Durchqueren des Natriumdampfs und erklären Sie das Zustandekommen des Unterschieds.

Trifft ein Elektron mit der kinetischen Energie 3,0 eV auf ein Natriumatom im Grundzustand, so kann es das Natriumatom anregen.

c) Berechnen Sie unter der Vereinfachenden Annahme, dass das ruhende Natriumatom keinen Rückstoß erhält, die Geschwindigkeit des Elektrons nach dem Stoß für den Fall, dass sich das Natriumatom nach dem Stoß im ersten angeregten Zustand befindet. Erläutern Sie ihren Ansatz.

Lösung:



a) Man schickt das zu zerlegende Licht durch ein Gitter, hinter dem sich ein Schirm befindet. Je nach Laufwegunterschied der Wellen aus den Gitterspalten kommt es auf dem Schirm für bestimmte Wellenlängen zu Verstärkung also zu einer sichtbaren Linie bzw. Farbe im Spektrum.

Bemerkung: In Wirklichkeit braucht man mindestens noch eine Linse um ein scharfes Bild auf dem Schirm zu erzeugen. Meiner Meinung nach ist das von einem G8-Schüler aber zu viel verlangt.

b) Ohne das Natrium erhält man auf dem Schirm ein kontinuierliches, lückenloses Spektrum (oder mehrere links und rechts höherer Ordnung) von violett bis rot. Nach Durchqueren des Natriumdampfs fehlt im Spektrum das Licht mit der Wellenlänge 589 nm. An dieser Stelle erscheint in jedem neuen Spektrum eine schwarze Linie, also gar nichts mehr.

Die Natriumatome können genau das Licht absorbieren, deren Photonenenergie gleich einer Energiedifferenz zum Grundzustand ist. Das sind unter anderem Photonen der Wellenlänge 589 nm. Beim Zurückfallen in den Grundzustand werden zwar wieder genauso viele Photonen derselben Wellenlänge emittiert, jedoch in alle möglichen Richtungen, weshalb in Richtung Schirm fast keine solchen Photonen mehr kommen. Auch weitere Wellenlängen, welche dem Energieunterschied zu höheren angeregten Zustanden entsprechen (kleinere Wellenlängen) können absorbiert werden, was zu weiteren schwarzen Linien im neuen Spektrum führt.

c) Das Elektron gibt die zur Anregung notwendige Energie an das Natriumatom ab, und behält den Rest als kinetische Energie.

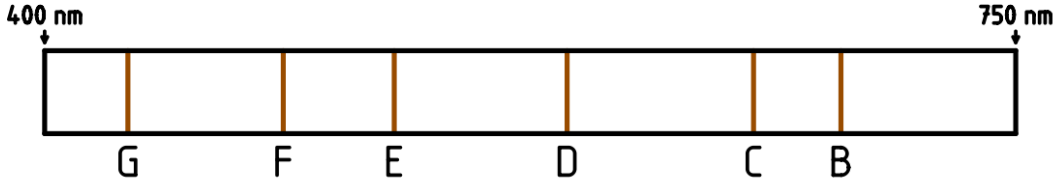
$$E' = 3{,}0\,eV - h \cdot \frac{c}{\lambda} = 3{,}0\,eV - 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\,m/s}{589 \cdot 10^{-9}\,m} = \underline{0{,}89\,eV}$$

$$E' = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2 \cdot E'}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}89 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg}} = \underline{\underline{5{,}6 \cdot 10^{5}\,m/s}}$$

Aufgabe 4.75: Abi 2010; Sonnenspektrum

Im Jahre 1814 entdeckte Joseph Fraunhofer im Sonnenspektrum dunkle Linien. Diese Linien entstehen durch Absorption von Licht bestimmter Wellenlängen.

a) Erläutern Sie dieses Phänomen anhand eines Demonstrationsversuchs.



In der nebenstehenden Abbildung ist die Lage einiger Fraunhofer'scher Linien in einem linearen Maßstab dargestellt. Fraunhofer hat die wichtigsten Linien mit Großbuchstaben gekennzeichnet.

b) Bestimmen Sie aus der Abbildung die Wellenlänge für die B-Linie. In welchem Farbbereich liegt sie?

c) Die B-Linie findet man bei der Untersuchung des Sonnenlichts auf der Erdoberfläche, nicht aber in der Raumstation ISS. Geben Sie hierfür einen möglichen Grund an.

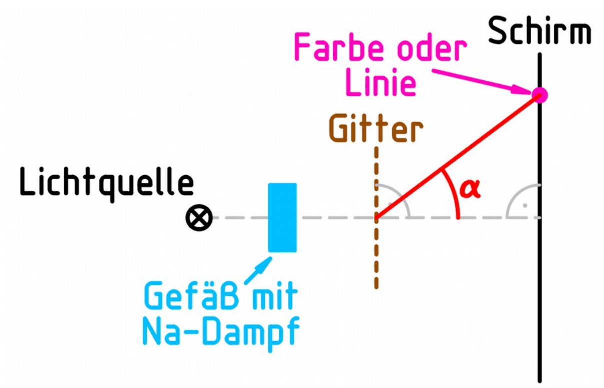
Man findet im Sonnenspektrum auch dunkle Linien, die der Balmerserie des Wasserstoffs zuzuordnen sind.

d) Berechnen Sie die zwei Wellenlängen der Balmerserie, die zum energieärmsten Licht dieser Serie gehören, und ordnen Sie diese den entsprechenden Fraunhoferlinien in der Abbildung zu.

e) Welche Aussage können Sie aufgrund der Existenz der Balmer-Absorptionslinien über die Wasserstoffatome auf der Sonnenoberfläche treffen?

Lösung:

a) Schickt man das Licht einer Glühbirne durch ein Gitter, dann erhält man ein kontinuierliches Spektrum auf dem Schirm. Schickt man das Licht der Glühbirne jedoch zuvor durch ein Gefäß mit Natriumdampf (siehe Abb.), dann fehlen im Licht hinter dem Na-Dampf genau die Wellenlängen, welche von den Natriumatomen absorbiert werden. auf dem Schirm erscheinen



an den Stellen, an denen genau diese Wellenlängen sich verstärken würden dunkle Linien -> es entsteht ein Absorbtionsspektrum.

Die Natriumatome absorbieren dabei genau die Photonen, deren Energie gleich einer Anregungsenergie aus dem Grundzustand ist. Die wieder emittierten Photonen gehen in alle Richtungen, weshalb in Richtung Gitter (bzw. Schirm) nur noch sehr wenige kommen.

b) Dreisatz von 400 nm aus gemessen; als Referenzpunkt dient der 750 nm - Punkt.

:12,8	350 nm ≙ 12,8 cm	:12,8
·10,5	27,3 nm ≙ 1,0 cm	·10,5
	287 nm ≙ 10,5 cm	

$$\lambda_B = 400\,nm + 287\,nm = \underline{\underline{687\,nm}}$$

Die Wellenlänge liegt nahe am langwelligen Ende des sichtbaren Spektrums, also ist die Farbe rot (Bemerkung: Das rot ist ziemlich breit.).

c) Die Absorption der B-Linie geschieht durch Atome eines Elements, das in der Sonnenoberfläche nicht vorkommt, aber in der Atmosphäre der Erde schon. Deshalb wird diese Wellenlänge erst in der Atmosphäre der Erde absorbiert.

d) Balmer: Übergang von n>2 nach n = 2

$$E_2 = -R_h \cdot h \cdot c \cdot \frac{1}{n^2} = -1{,}097 \cdot 10^7 (1/m) \cdot 4{,}136 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s \cdot \frac{1}{2^2} = --13{,}6 \cdot \frac{1}{4}\,eV = \underline{-3{,}4\,eV}$$

$$E_3 = -13{,}6\,eV \cdot \frac{1}{3^2} = \underline{-1{,}5\,eV}$$

$$E_4 = -13{,}6\,eV \cdot \frac{1}{4^2} = \underline{0{,}85\,eV}$$

Damit findet man die Energieunterschiede zu 1,9 eV und 2,55 eV .

$$\Delta E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda_{23} = \frac{h \cdot c}{\Delta E} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s}{1{,}9\,eV} = \underline{\underline{654\,nm}}$$

$$\lambda\,24 = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s}{2{,}55\,eV} = \underline{\underline{487\,nm}}$$

Mit Dreisatz findet man die Lage der Linien zu 9,3 cm und 3,2 cm, das sind die Linien C und F .

e) Damit die Balmer-Wellenlängen absorbiert werden können müssen in der Sonnenoberfläche viele Wasserstoffatome im Zustand mit n = 2 vorhanden sein, also im ersten angeregten Zustand.

Aufgabe 4.76: Abi 2011 G9; Anregung von Atomen

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel $E_n = -\frac{13{,}6\,eV}{n^2}$ die ersten fünf Energiestufen des Wasserstoffatoms und zeichnen Sie damit maßstabsgetreu das Energieniveauschema.

Im Folgenden wird atomares Wasserstoffgas betrachtet, das neben Atomen im Grundzustand einen erheblichen Anteil an Atomen, die sich im ersten angeregten Zustand (n = 2) befinden, enthält. Das Gas wird mit Elektronen der Energie 2,70 eV beschossen, wobei angenommen wird, dass jedes Atom höchstens eine Wechselwirkung erfährt.

b) Welche Energieniveaus können die Atome durch die Stöße mit den Elektronen erreichen?

Die derart angeregten Atome emittieren kurz darauf ihre Energie als Strahlung.

c) Geben Sie alle möglichen Übergänge des Emissionsspektrums an, zeichnen Sie diese in das Energieniveauschema aus Teilaufgabe a) ein und berechnen Sie die Energiewerte der emittierten Photonen. Ordnen Sie die Photonen den jeweiligen Spektralbereichen zu.

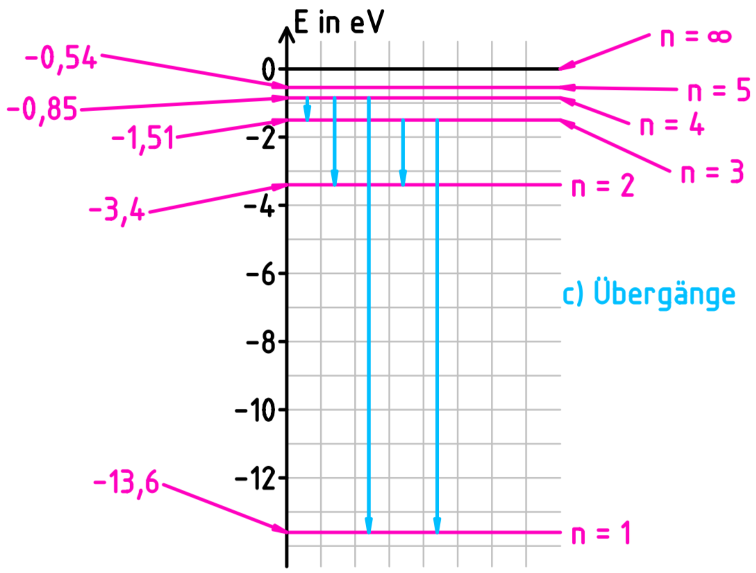
d) Beschreiben Sie anhand einer beschrifteten Skizze eine Versuchsanordnung, mit deren Hilfe die im sichtbaren Bereich der Strahlung auftretenden Wellenlängen bestimmt werden können. Berechnen Sie diese Wellenlängen.

Im Spektrum eines Sterns beobachtet man u.a. die so genannte Hβ-Linie, eine Absoptionslinie des Wasserstoffs mit λ = 486 nm.

e) Erklären Sie kurz, wie ein Absorptionsspektrum prinzipiell entsteht.

f) Erläutern Siekurz, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit die oben genannte Linie als Absorptionslinie auftreten kann.

Lösung:



a) Für n die Zahlen von 1 bis 5 eingesetzt gibt die Werte und das Diagramm links.

b) -3,4 eV + 2,70 eV = -0,70 eV

Die Atome können also höchstens -0,7 eV erreichen, d.h. sie können die Zustände mit n = 3 (-1,51 eV) und n = 4 (-0,85 eV) erreichen.

c) siehe auch Bild oben;

4 -> 3: ΔE = 0,66 eV Infrarot

4 -> 2: ΔE = 2,55 eV sichtbares Licht

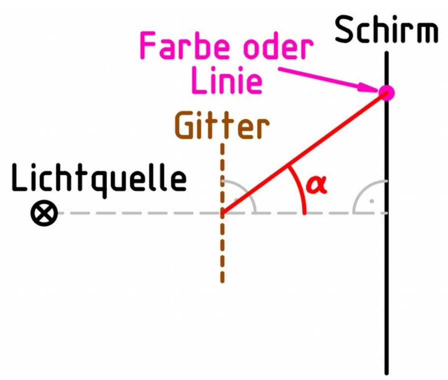
4 -> 1: ΔE = 12,75 eV Ultraviolett

3 -> 2: ΔE = 1,89 eV sichtbares Licht

3 -> 1: ΔE = 12,09 eV Ultraviolett

Bemerkung: Der Übergang 2 -> 1 gehört hier nicht dazu, weil die n = 2 Atome ja nicht "derart angeregt" wurden.

d) Man schickt das Licht durch ein Gitter, hinter dem sich ein Schirm befindet und misst z.B. in großer Entfernung die Winkel α unter denen die Maxima 1. Ordnung auftreten. Die Wellenlänge ergibt sich damit zu:



$$\lambda = \Delta s = d \cdot \sin\alpha$$

mit der Gitterkonstante d.

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E}$$

$$\lambda_{4\rightarrow 2} = \frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{2{,}55\,eV} = \underline{\underline{487\,nm}}$$

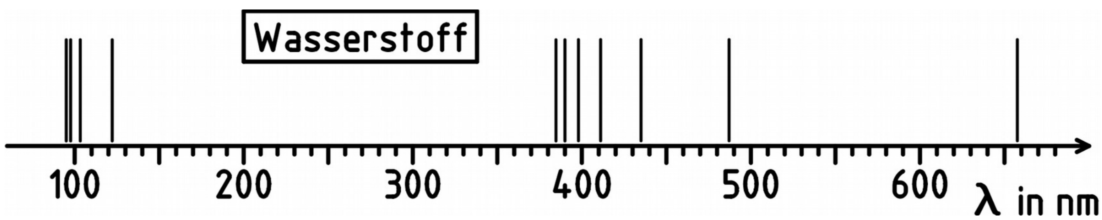
$$\lambda_{3\rightarrow 2} = \frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{1{,}89\,eV} = \underline{\underline{657\,nm}}$$

e) Licht mit einem kontinuierlichen Spektrum durchquert ein atomares Gas. Die Atome des Gases absorbieren Photonen von genau der Energie, die einer Anregungsenergie von einem vorhandenen Zustand aus entspricht. Die Atome emittieren zwar sofort wieder Photonen derselben Energie, jedoch in alle Richtungen, wodurch in Blickrichtung nur noch sehr wenige vorhanden sind. Schickt man dieses Licht, dem jetzt charakteristische Wellenlängen fehlen durch ein Gitter (wie in d)), kann man hinter dem Gitter das Absorptionsspektrum beobachten.

f) Die Absorption geschieht nur bei Atomen im ersten angeregten Zustand (n = 2). Also muss dazu ein hinreichend großer Anteil der Atome sich im ersten angeregten Zustand befinden, d.h. das Wasserstoffgas muss sehr heiß sein, was bei der Oberfläche eines Sterns nicht überrascht.

Aufgabe 4.77: G8 Muster-Abi 2010; Spektren

Für die Identifikation der chemischen Zusammensetzung unterschiedlicher Objekte werden seit über 150 Jahren Absorbtions- und Emissionsspektren verwendet. Jedes Element und jedes Molekül hat sein charakteristisches Spektrum, an dem es eindeutig identifiziert werden kann. In der Abbildung ist ein Ausschnitt aus dem Spektrum von atomarem Wasserstoff skizziert.



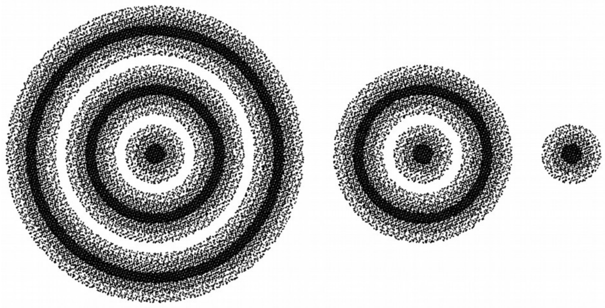
a) Beschreiben Sie ein Experiment, mit dem man den Teil des Spektrums eines Gases darstellen kann, der im Bereich des sichtbaren Lichts liegt. Wie kann durch geeignete Messungen die Wellenlänge einer Spektrallinie bestimmt werden?

Für die Energiewerte En der einzelnen Energieniveaus eines Wasserstoffatoms gilt:

$$E_n = -13{,}6\cdot\frac{1}{n^2}\quad mit\quad n = 1,2,3,4,5,\ldots$$

b) Berechnen Sie die Energiewerte der fünf niedrigsten Niveaus und geben Sie die Ionisierungsenergie an. Zeichnen Sie damit ein Energieniveauschema.

c) Die nebenstehenden Bilder zeigen Querschnitte durch die Orbitale zu den drei niedrigsten Energieniveaus. Die Dichte der Punkte (Grad der Schwärzung) ist ein Maß dür das Betragsquadrat der Wellenfunktion am jeweiligen Ort. Ordnen Sie jedem dieser Bilder das entsprechende Energieniveau zu. Geben Sie eine kurze Begründung für ihre Entscheidung an.



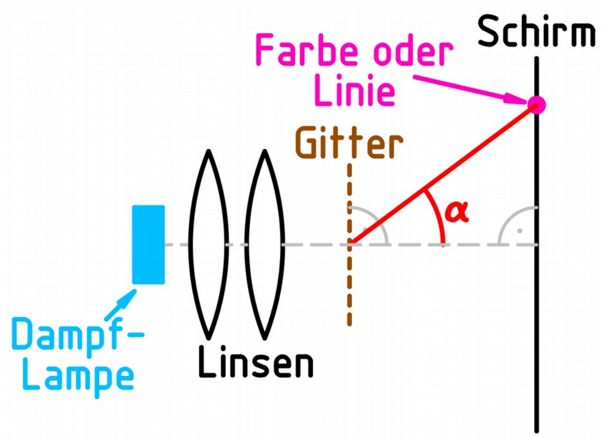
d) Ein Elektron der kinetischen Energie 2,7 eV trifft auf ein Wasserstoffatom im ersten angeregten Zustand. Welche Übergänge in einen Zustand höherer Anregung können dabei auftreten? Zeichnen Sie diese Übergänge in das bei Teilaufgabe b) gezeichnete Energieniveauschema ein.

e) Beurteilen Sie, welche der in Teilaufgabe d) ermittelten Übergänge möglich sind, wenn das angeregte Wasserstoffatom von einem Photon der Energie 2,7 EV und nicht von einem Elektron getroffen wird.

f) Zeigen Sie, dass ein angeregtes Wasserstoffatom, das sich im Zustand n = 3 befindet, sichtbares Licht beliebiger Wellenlänge absorbieren kann.

<u>Lösung:</u>

a) Man bringt das Gas zum Leuchten, z.B. durch erhitzen oder durch Gasentladung und schickt das mit Hilfe von Linsen gebündelte Licht durch ein Gitter, hinter dem sich ein Schirm befindet. Auf dem Schirm entstehen dann durch Interferenz die Linien.

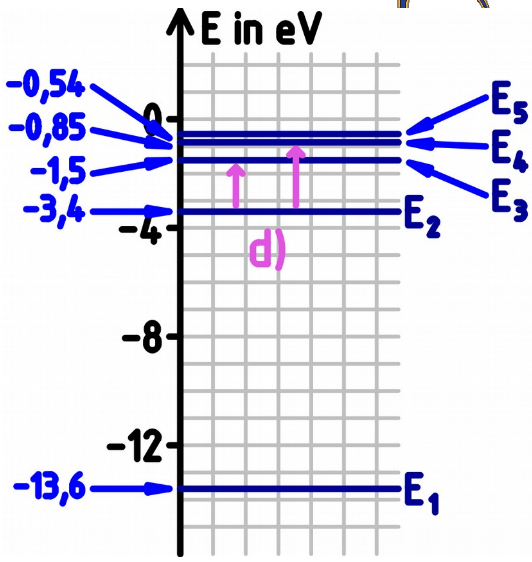


Man misst z.B. den Winkel α unter dem das Maximum 1. Ordnung erscheint und erhält mit der bekannten Gitterkonstante d die Wellenlänge zu λ = d·sin(α).

b) $E_1 = -13{,}6\,eV \quad E_2 = -13{,}6\,eV \cdot \frac{1}{2^2} = -3{,}4\,eV$; Schema auf der nächsten Seite

$E_3 = -1{,}5\,eV \quad E_4 = -0{,}85\,eV \quad E_5 = -0{,}54\,eV$

Die Ionisierungsenergie beträgt 13,6 eV.



c) Es handelt sich von rechts nach links um die Zustände n = 1, 2, 3, denn je größer die Hauptquantenzahl n, desto zerklüfteter werden die Orbitale.

d) -3,4eV + 2,7eV = -0,7eV

Das Wasserstoffatom kann also maximal auf den dritten angeregten Zustand mit -0,85eV angehoben werden. Es sind also folgende Übergänge möglich: E2 -> E3 und E2 -> E4

e) Bei einem Photon müsste das Atom die gesamte Energie des Photons aufnehmen. Da es keinen Übergang mit exakt 2,7 eV gibt, ist keiner dieser Übergänge mit einem Photon möglich.

f) Ein Atom mit n = 3 besitzt eine Energie von -1,5 eV. Photonen des sichtbaren Lichts besitzen Photonenenergien von 1,6eV bis 3,4eV. Ein jedes Photon des sichtbaren Lichts reicht also aus, um ein solches Atom zu ionisieren. Da im ionisierten Zustand die möglichen Energiewerte nicht mehr diskret sind sondern kontinuierlich (kinetische Energie des Elektrons), kann jedes Photon des sichtbaren Lichts absorbiert werden.

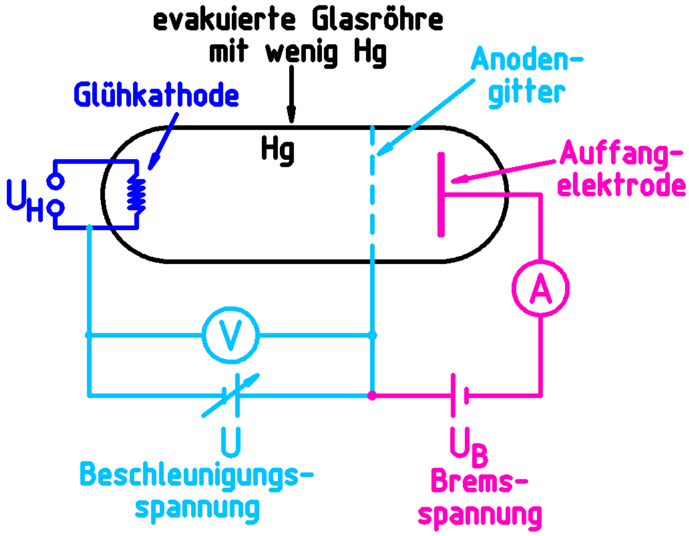
5 Anwendungen

5.1 Franck-Hertz-Versuch (1913)

Der Versuch dient dem Nachweis der ausschließlich diskreten Energie-Niveaus in Atomen und deren quantitativer Messung.

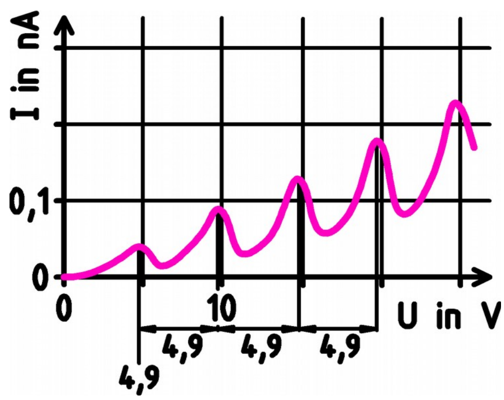
Bereits die Linienspektren atomarer Gase (erzeugt durch Gasentladungsröhren, Gasentladungslampen) kann man als Nachweis diskreter Anregungsenergien von Atomen betrachten. Die besondere Leistung des Franck-Hertz-Versuchs besteht darin die kleinstmögliche Anregungsenergie zu bestimmen, und dies ausschließlich mit Hilfe von Strom- und Spannungsmessungen zu bewerkstelligen. Mit verbesserten Experimentieranordnungen lassen sich auch die folgenden Anregungsenergien von unten nach oben messen.

<u>Der Versuch</u>



Die Röhre muss geheizt werden, damit das Quecksilber (Hg) in der Röhre verdampft. Im Versuch werden von der Glühkathode ausgehende Elektronen in Richtung Anodengitter beschleunigt. Diejenigen Elektronen, die nach dem durchqueren des Anodengitters genug Energie haben um die kleine Bremsspannung (ca. 1V) zu überwinden, gelangen auf die Auffangelektrode, wo sie mit Hilfe einer Strommessung nachgewiesen werden können.

<u>Ergebnis</u>



Im Versuch erhöht man von Null ausgehend die Beschleunigungsspannung und misst die Stromstärke an der Auffangelektrode in Abhängigkeit der Beschleunigungsspannung. Bis zu einer Beschleunigungsspannung von ca. 1V ist die Stromstärke Null. Dann steigt die Stromstärke mit steigender Beschleunigungsspannung an. Bei 4,9V bricht die Stromstärke plötzlich ein, und beginnt ein Volt später wieder anzusteigen (dieses eine Volt ist die Bremsspannung). Anschließend passiert im Abstand von jeweils 4,9V immer wieder dasselbe.

Deutung des Versuchsausgangs

- Zu Anfang ist die Stromstärke Null, weil kein Elektron genug Energie besitzt um die kleine Bremsspannung zu überwinden. Erst wenn die Beschleunigungsspannung größer als die Bremsspannung ist, haben die Elektronen genug Energie um die die Auffangelektrode zu erreichen.
- Dann steigt die Stromstärke an, weil immer mehr Elektronen von der Elektronenwolke der Glühkathode zum Anodengitter hin beschleunigt werden. Die Elektronen können zwar mit den Quecksilber-Atomen zusammenstoßen, es finden aber nur elastische Stöße statt, bei denen keine kinetische Energie verloren geht. Die Elektronen werden zwischen den Quecksilber-Atomen hin und her reflektiert ohne Energie zu verlieren.
- Bei einer Beschleunigungsspannung von 4,9V haben die Elektronen genug Energie, um die Atome in den ersten angeregten Zustand anzuheben. Dabei verlieren die Elektronen kinetische Energie und haben dann nicht mehr genug Energie, um die Bremsspannung zu überwinden. Erst wenn man die Beschleunigungsspannung um ein weiteres Volt erhöht, können die Elektronen ein Atom anregen und danach trotzdem wieder die Auffangelektrode erreichen, wodurch die Stromstärke wieder steigt. Und so weiter und so fort.

Wechselwirkung von Elektronen mit Atomen

Zum tieferen Verständnis der Vorgänge in einer Franck-Hertz-Röhre muss man die verschiedenen Möglichkeiten der Wechselwirkung eines Elektrons mit einem Atom kennen. Deshalb hier eine Aufzählung der drei für uns wichtigen Möglichkeiten.

- Elastischer Stoß

Ein Stoß heißt elastisch, wenn bei dem Stoß gar keine kinetische Energie in andere Energieformen umgewandelt wird. Solche Stöße sind bei Elementarteilchen sehr häufig, denn wenn zum Beispiel zwei freie Elektronen „zusammenstoßen" gibt es gar keine Möglichkeit der Energieumwandlung. Stößt ein Elektron elastisch mit einem Atom zusammen, dann ändert das Elektron seine Richtung, verliert aber kaum kinetische Energie. Die Bewegung des Atoms wird sich nur sehr wenig verändern, weil beim Stoß eines sehr kleine Teilchens mit einem viel Größeren „im Vergleich Ruhenden" kaum kinetische Energie auf das große Teilchen übertragen wird (vgl. Flummi an die Wand). Das Elektron hat also nach dem elastischen Stoß „genau" so viel Energie wie vorher.

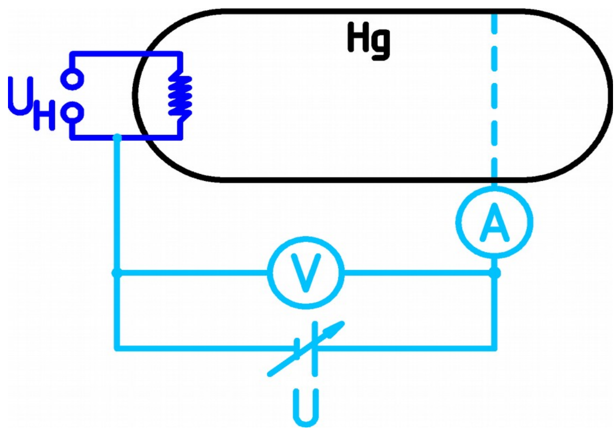
➔ Anregung

Wenn das Elektron ausreichend viel Energie besitzt, kann es ein Atom in einen der diskreten angeregten Zustände anheben. Das viel schwerere Atom wird wieder kaum kinetische Energie erhalten. Die Richtung des Elektrons wird sich also ändern und seine Energie wird „genau" um den Betrag der Anregungsenergie des Atoms kleiner werden.

➔ Ionisierung

Wenn das Elektron ausreichend viel Energie besitzt, kann es ein Hüllenelektron aus dem Atom herauslösen. Da sich Impuls und Energie nach dem Stoß auf drei Stoßpartner verteilen gibt es bei diesem Vorgang keine Einschränkung für die Verteilung der Energie auf die drei Teilchen. Die Energie des stoßenden Elektrons wird also mindestens um den Betrag der Ionisierungsenergie des Atoms kleiner werden, es kann aber auch mehr Energie an die anderen beiden Stoßpartner abgeben, bis hin zu seiner gesamten kinetischen Energie.

<u>Aufgabe 5.78: Wozu die Bremsspannung?</u>



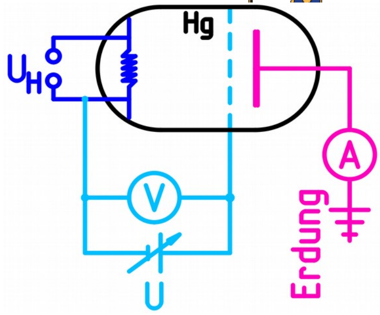
Wir vereinfachen den Versuchsaufbau und messen die Stromstärke direkt am Anodengitter. Bei 4,9V haben die Elektronen genug Energie, um ein Quecksilber-Atom anzuregen.

a) An welchem Ort in der Röhre können die Elektronen Quecksilber-Atome anregen?

b) Weshalb werden bei einer Beschleunigungsspannung von 4,9V oder 4,901V nur sehr wenige Elektronen ein Atom anregen?

c) Was machen die Elektronen, nachdem sie ein Atom angeregt haben?

Aufgabe 5.79: Wozu die Bremsspannung?

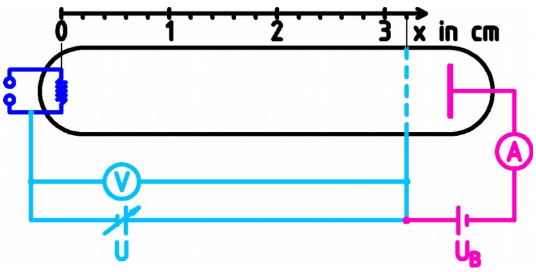


Wir verbessern den Versuchsaufbau der Aufgabe oben ein wenig, und lassen jetzt nur die Bremsspannung weg.

a) Ein Elektron habe gerade genug Energie, um kurz vor dem Anodengitter ein Atom anzuregen. Das Elektron verliert seine ganze kinetische Energie, wird aber danach wieder in Richtung Anodengitter beschleunigt. Weshalb kann es trotzdem die Auffangelektrode erreichen, obwohl es doch vom positiv geladenen Anodengitter angezogen werden sollte.

b) An welcher Stelle der Apparatur müsste ein Elektron ein Atom anregen, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es die Auffangelektrode erreicht, tatsächlich kleiner wird?

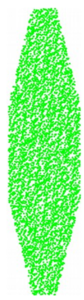
Aufgabe 5.80:



Die Röhre rechts ist mit einem Gas gefüllt, dessen Atome eine erste Anregungsenergie von 3eV und eine zweite Anregungsenergie von 5eV besitzen.

a) Bei einer Beschleunigungsspannung von 3V entsteht eine Leucht-Erscheinung in der Röhre. Wodurch entsteht diese Leucht-Erscheinung und an welcher Stelle der Röhre entsteht sie?

b) Anschließend wird die Beschleunigungsspannung auf 4V gesteigert. Wo (x-Koordinate) in der Röhre ist jetzt die Leucht-Erscheinung?



c) Weshalb ist die Leuchterscheinung kein schmaler Strich, sondern ein verschmierter breiter Streifen wie im Bild rechts? Welche Farbe hat der Streifen (Farbe ist im Bild falsch)?

d) Bei einer Beschleunigungsspannung von 8V gibt es zwei Leucht-Streifen. An welchen Positionen (x-Koordinate) befinden sich die Leuchtstreifen. Wir gehen davon aus, dass keine Atome in den zweiten angeregten Zustand angehoben werden.

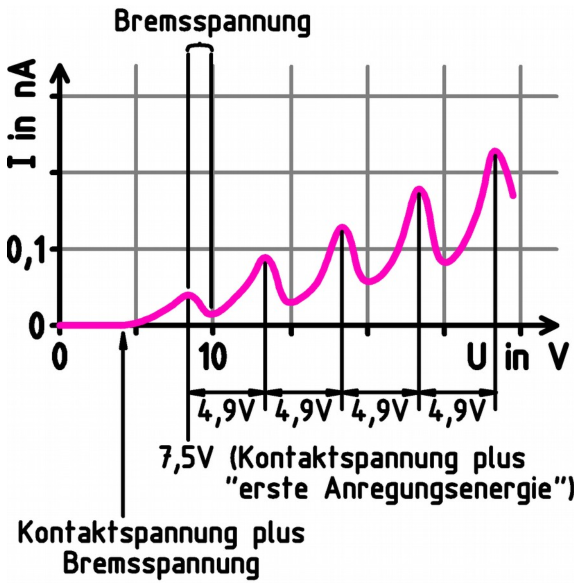
e) Das keine Atome in den zweiten angeregten Zustand angehoben werden liegt auch daran, dass die Dichte der Atome in Röhre relativ "hoch" ist. Weshalb erreicht man durch eine Verringerung der Dichte, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Anregung in den zweiten angeregten Zustand größer wird? Was passiert dann mit den leuchtenden Streifen, die durch den ersten angeregten Zustand hervorgerufen werden?

f) Wenn man es schafft, dass die Atome teilweise auch in den zweiten angeregten Zustand angehoben werden, wird von der Röhre Licht dreier verschiedener Wellenlängen emittiert. Zeige mit Hilfe von Energie-Überlegungen, dass für die drei Wellenlängen die Beziehung $\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_3}$ gilt.

g) Um die Wellenlänge des dann emittierten UV-Lichts zu messen, benutzt man eine Vakuumphotozelle deren Kathode eine bekannte Austrittsarbeit hat und misst die Gegenspannung bis zum Zusammenbrechen des Photostroms. Bestimmen Sie eine Gleichung zur Berechnung der Wellenlänge in Abhängigkeit von Austrittsarbeit und Gegenspannung.

Schlussbemerkung:

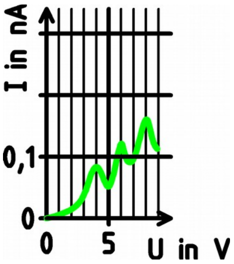
Bei den meisten Versuchs-Apparaturen bricht die Stromstärke nicht bei 4,9V zum ersten mal ein, sondern erst später bei ca. 7V. Die darauffolgenden Einbrüche sind aber immer im Abstand von 4,9V.



Die Ursache für das verspätete Ansteigen und Einbrechen des Stroms sind Kontaktspannungen in der Apparatur. Solche Kontaktspannungen bilden sich immer dann aus, wenn sich zwei verschiedene Metalle mit unterschiedlichen Austrittsarbeiten berühren. Es wandern dann einige Elektronen von dem Metall mit der niedrigeren Austrittsarbeit in das Metall mit der höheren Austrittsarbeit -> Ladungsverschiebung -> elektrisches Feld -> Spannung.

Außerdem fließt bei ganz kleinen Beschleunigungsspannungen gar kein Strom. Erst wenn die Beschleunigungsspannung größer ist, als die Kontaktspannung werden Elektronen beschleunigt und erst wenn sie genug kinetische Energie haben um die Bremsspannung zu überwinden kann ein Strom gemessen werden. Bei vielen real aufgenommenen Messkurven, die Sie im Internet finden ist dieser Effekt nicht zu sehen, das liegt aber an Störeffekten und unvermeidlichen Messfehlern.

Aufgabe 5.81:

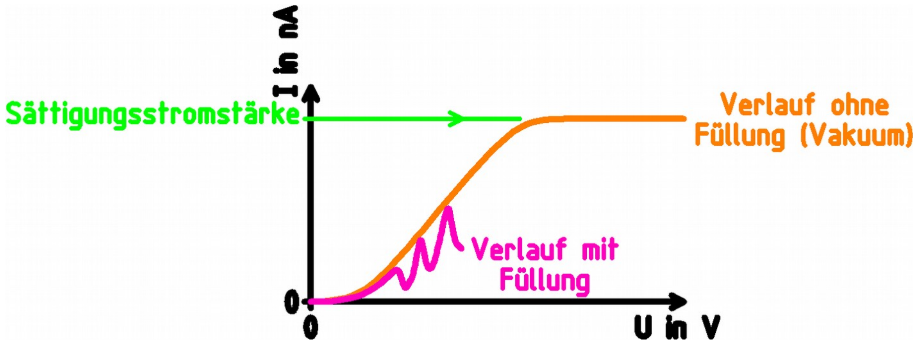


Das Bild zeigt das U-I-Diagramm einer Franck-Hertz-Röhre.

Bestimme die Anregungsenergie der Atome in der Füllung der Röhre. Bestimme die Wellenlänge der entstehenden EM-Strahlung. In welchem Wellenlängenbereich liegt diese Strahlung?

Franck-Hertz-Röhre ohne Füllung

Wenn sich in der Franck-Hertz-Röhre gar kein Füllgas befindet spricht man von einer Elektronenröhre. Eine solche Röhre ohne Füllung verhält sich natürlich anders als eine Franck-Hertz-Röhre.



Mit ansteigender Beschleunigungsspannung steigt der Strom einer solchen Röhre an, allerdings nur bis zu einer gewissen Sättigungsstromstärke. Diese Sättigungsstromstärke ist erreicht, wenn alle von der Glühkathode bereitgestellten Elektronen von der Beschleunigungsspannung in Richtung Anode gezogen werden. Bei einer kleineren Beschleunigungsspannung werden die Elektronen aus der Elektronenwolke um die Glühkathode nur teilweise in Richtung Anode gezogen.

Damit man einen Franck-Hertz-Versuch durchführen kann, muss man immer deutlich unterhalb der Sättigungsstromstärke bleiben. Wieso?

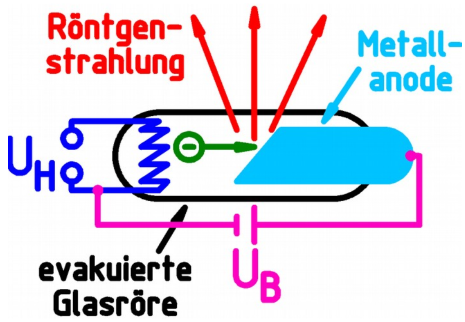
Aufgabe 5.82:

Außer durch Elektronen, wie in der Franck-Hertz-Röhre, können Atome auch noch durch Photonen angeregt werden. Welche grundsätzlichen Unterschiede bestehen zwischen der Anregung durch Elektronen und der Anregung durch Photonen?

5.2 Röntgenröhre

dient zum erzeugen von Röntgenstrahlen (Wellenlänge: nm bis pm; Energie: keV bis MeV).

Aufbau:



Elektronen werden an der Glühkathode erzeugt und durch die Beschleunigungsspannung Richtung Anode beschleunigt, wo sie dann mit sehr hoher Geschwindigkeit auftreffen. Die verwendeten Beschleunigungsspannungen liegen üblicherweise zwischen 10kV und 150kV, können aber auch weit darüber sein.

Kontinuierliches Spektrum (Bremsstrahlung)

Die sehr schnellen Elektronen treffen auf die Metallanode und werden von den Atomrümpfen und den Elektronen im Metall sehr stark abgebremst, also beschleunigt. Beschleunigte Ladungen erzeugen EM-Wellen. Wegen der sehr starken Beschleunigung entstehen Photonen sehr hoher Energie.

Die größtmögliche Energie besitzt ein solches Photon, wenn das einzelne Photon die gesamte kinetische Energie des Elektrons aufnimmt.

Energie-Umwandlung: $E_{el} \rightarrow E_{kin} \rightarrow E_{Ph}$. Für die maximale Energie eines Röntgenphotons (Röntgenquants) ergibt sich:

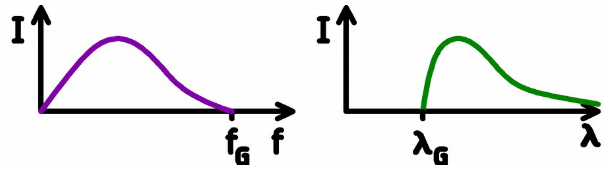
$$E_{Ph,max} = E_{el} \quad \Rightarrow \quad h \cdot f_{max} = U_B \cdot e \quad \Rightarrow \quad f_{max} = \frac{U_B \cdot e}{h}$$

Die Röntgenphotonen haben also eine maximale Frequenz und deshalb eine minimale Wellenlänge:

$$c = \lambda \cdot f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{\lambda_{min}} = \frac{U_B \cdot e}{h} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{min} = \frac{c \cdot h}{U_B \cdot e}$$

Die Formeln sind so leicht auszurechnen, dass man die meiner Meinung nach nicht auswendig lernen muss. Was man aber wissen muss, ist das

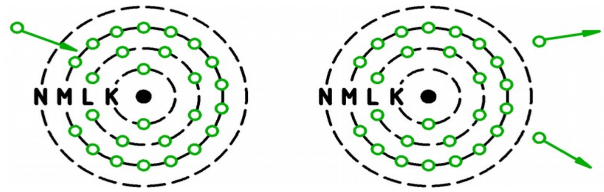
> Röntgenstrahlung besitzt eine maximale Frequenz f_G und eine minimale Wellenlänge λ_G , die sich aus der Beschleunigungsspannung ergibt.



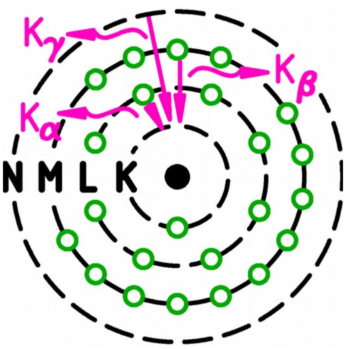
Trägt man die Intensität der Strahlung gegen die Frequenz oder gegen die Wellenlänge auf, erhält man ein sogenanntes Röntgenspektrum. Solche Spektren haben ungefähr die im Bild gezeigte Gestalt. Die Darstellung in Abhängigkeit von der Wellenlänge ist die gebräuchlichere.

Bemerkung: Röntgenröhren haben übrigens einen extrem kleinen Wirkungsgrad (deutlich kleiner als 1%). Der Großteil der Energie der Elektronen wird in innere Energie der Metallanode umgewandelt, weshalb die meist gekühlt werden muss.

Charakteristisches Spektrum (diskretes Spektrum)



Beim Auftreffen der hoch energetischen Elektronen auf das Metallgitter der Anode kann ein Elektron auch ein Elektron aus der K-Schale eines Atomrumpfes herausschlagen. Das Elektron des Atoms muss auch nicht ganz herausgeschlagen werden, es kann auch auf eine höhere nicht voll besetzte Schale gehoben werden.



Die so entstandene Lücke in der K-Schale kann von einem Elektron aus der L-Schale oder aus der M-Schale aufgefüllt werden. Die dabei freiwerdende Energie wird in Form eines Röntgenphotons abgegeben. Dadurch entsteht wieder eine Lücke, z.B. in der L-Schale. Das auf die Anode treffende Elektron hätte aber auch gleich ein Elektron aus der L-Schale herausschlagen können. Die so entstehende Strahlung besitzt ein diskretes Spektrum und ist charakteristisch für das Metall der Anode. Atomrümpfe von Kupfer erzeugen andere Wellenlängen als Atomrümpfe von Molybdän.

Die Strahlung, die durch Zurückfallen eines Elektrons in die L-Schale entsteht bezeichnet man dementsprechend mit L_α oder L_β , je nachdem ob des Elektron aus der nächsthöheren oder der übernächsten Schale gekommen ist. Für die Energien der zu den Übergängen gehörenden Photonen gilt:

$$E(K_\gamma) > E(K_\beta) > E(K_\alpha) > E(L_\beta) > E(L_\alpha)$$

Für die Frequenzen gilt die Ungleichung in der selben Reihenfolge, für die Wellenlängen genau umgekehrt.

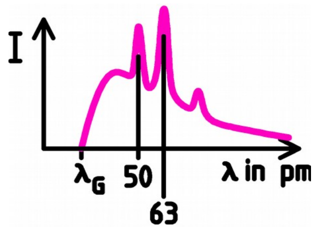
Aufgabe 5.83:

a) Bestimme die Grenzwellenlänge einer Röntgenröhre, die mit einer Beschleunigungsspannung von 40kV betrieben wird.

b) Bei einer anderen Röntgenröhre liegt die Grenzwellenlänge bei 2pm. Berechne die Spannung, mit der diese Röntgenröhre betrieben wird.

Aufgabe 5.84:

Das Bild zeigt das Röntgenspektrum einer Röntgenröhre deren Anoden-Material Atomrümpfe mit einer voll besetzten L- und M-Schale hat. Im Bild sichtbar sind die Linien K_α; K_β und L_α .



a) Beschrifte die drei Linien.

b) Skizziere in dasselbe Bild das sich ergebende Spektrum, wenn dieselbe Röhre mit einer wesentlich höheren Spannung betrieben wird und das Spektrum einer Röhre, die mit derselben Spannung betrieben wird, aber ein anderes Anoden-Material hat.

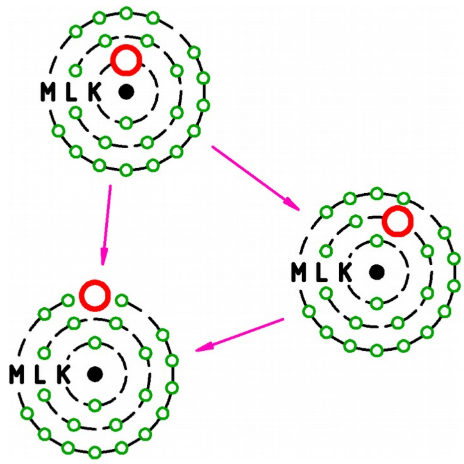
c) Berechne die Energie der K_α und K_β-Photonen.

(Zwischenergebnis: 19,7keV; 24,8keV)

d) Begründe weshalb bei einer Beschleunigungsspannung von 24,8kV immer noch keine K_α-Linie im Spektrum sichtbar ist.

e) Gib alle Metalle an, bei denen die K_α-Linie wenigstens theoretisch entstehen kann, sobald die beschleunigten Elektronen gerade die Energie der Photonen in der K_α-Linie haben. Benutze das PSE.

f) Die K_α; K_β und L_α-Linien haben mit energetischen Zuständen eines Atomrumpfes zu tun, dem ein Elektron fehlt, das also einen unbesetzten Elektronenzustand auf einer der inneren Schalen hat. Im Bild ist die Position des unbesetzten Elektronenzustands jeweils durch einen größeren roten Kreis markiert. Zu welcher Linie gehören die durch Pfeile markierten Übergänge? Beschrifte die Pfeile. Folgere hieraus eine Beziehung zwischen den Energien der Übergänge $E(K_\beta)$, $E(K_\alpha)$ und $E(L_\alpha)$.



5.3 Laser

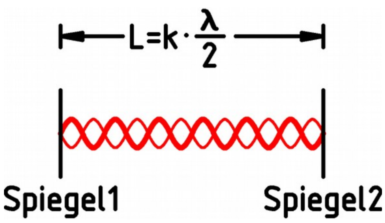
Laser steht für (L)ight (A)mplification by (s)timulated (E)mission of (R)adiation. Der Prozess der stimulierten Emission ist der Schlüssel für den Laser, dazu aber erst später.

Resonator

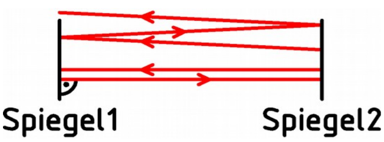
Das spezielle Laser-Licht wird im Innern des Resonators erzeugt und

➔ das Licht bleibt im Resonator eingesperrt.

Der einfachste Resonator besteht aus zwei parallelen Spiegeln deren Abstand ein ganzes Vielfaches der halben Wellenlänge des Laserlichts ist.



Dadurch kann das Laser-Licht zwischen den Spiegeln eine stehende Welle ausbilden, d.h. beim Laser-Licht kommt es zu konstruktiver Interferenz, was bedeutet, dass das Laserlicht zwischen den Spiegeln hin und her reflektiert wird. Für alle anderen Wellenlängen kommt es teilweise zu destruktiver Interferenz, d.h. die anderen Wellenlängen löschen sich zwischen den Spiegeln teilweise aus. Die Energie in den anderen Wellenlängen muss aber irgendwo hin, was nur dadurch geschehen kann, dass sie durch die Spiegel gehen und den Resonator verlassen.



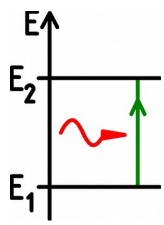
Auch die Lichtstrahlen mit der richtigen Wellenlänge, deren Richtung aber von der Senkrechten zu den Spiegeln abweicht verlassen den Resonator recht schnell.

➔ Im Resonator bleibt also nur Licht mit genau der Laser-Wellenlänge und mit genau der Ausbreitungsrichtung senkrecht zu den Spiegeln.

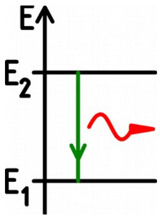
Einschub: Zwei Energie-Niveaus und ein Photon

Ein Elektron besitze die zwei Energie-Niveaus E_1 und E_2. Eine Wechselwirkung mit diesen beiden Niveaus kann nur geschehen, wenn das Photon genau in die Energie-Lücke passt.

Absorption



Wenn sich das Elektron auf E_1 befindet, dann kann das Elektron ein Photon absorbieren und auf das Niveau E_2 wechseln.

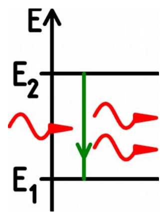


Spontane Emission

Wenn sich das Elektron auf E_2 befindet, kann das Elektron auf E_1 zurückfallen und dabei ein Photon emittieren (Bild links).

Meist geschieht die spontane Emission sehr schnell (ca. 10^{-8}s). Es gibt aber auch angeregte Energie-Niveaus, die sich recht lange halten (ca. 1ms). Ein solches brauchen wir für den Laser.

Stimulierte Emission



Wenn sich das Elektron auf E_2 befindet kann es von einem Photon getroffen werden und von diesem Photon zum Übergang auf E_1 stimuliert werden, wodurch ein neues Photon entsteht (Bild rechts). Auch das kann nur geschehen, wenn das erste Photon genau in die Energie-Lücke passt.

Der Vorgang der stimulierten Emission ist deshalb so interessant, weil

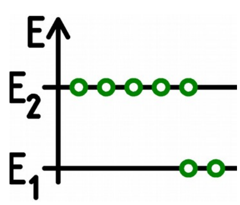
➔ dabei ein neues Photon entsteht, das eine exakte quantenmechanische Kopie des ersten Photons ist. Es hat also exakt dieselbe Wellenlänge, exakt dieselbe Ausbreitungsrichtung und auch die gleiche Phasenlage.

Die gleiche Phasenlage bedeutet, dass die beiden Photonen an jedem Punkt des Raums exakt gleichphasig schwingen. Deshalb kann man auch mit Lasern so gut Interferenz-Versuche machen.

Verstärkung

Zwischen den Spiegeln des Resonators befindet sich ein Medium mit zwei solchen Energie-Niveaus. Erwünscht ist die stimulierte Emission, denn die spontane Emission erfolgt ja mit beliebiger Richtung und Phasenlage. Außerdem müssen mehr Photonen durch stimulierte Emission erzeugt werden, als durch Absorption (und eventuell anschließende spontane Emission) verloren gehen, sonst erreichen wir ja keine Verstärkung. Die Wahrscheinlichkeit für Absorption ist umso kleiner, je weniger Elektronen sich auf E_1 befinden, und die Wahrscheinlichkeit für stimulierte Emission ist umso größer, je mehr Elektronen sich auf E_2 befinden.

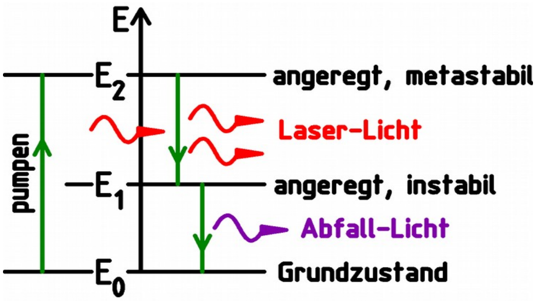
➔ Es müssen sich also mehr Elektronen auf E_2 befinden, als sich auf E_1 befinden (Besetzungsinversion).



Das erreicht man nur, wenn

1) man ständig von außen Energie zuführt (pumpen), um die Elektronen immer wieder auf E_2 anzuheben, und wenn

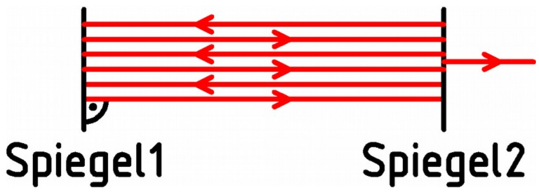
2) das Energie-Niveau E_2 eine hohe mittlere Lebensdauer hat (ca. 1ms) und wenn



3) das Energie-Niveau E_1 eine möglichst kurze mittlere Lebensdauer hat, um dafür zu sorgen, dass sich möglichst wenige Elektronen auf E_1 befinden, damit die Absorptions-Wahrscheinlichkeit möglichst klein ist. Dafür darf natürlich E_1 nicht der Grundzustand sein.

Wenn man das alles geschafft hat, dann hat man im Innern des Resonators eine sehr hohe Dichte von Photonen, die alle genau dieselbe Wellenlänge und genau dieselbe Richtung haben, und unter denen es große Familien gibt, deren Mitglieder alle dieselbe Phasenlage haben.

Den Resonator baut man aus einem Spiegel, der 100% reflektiert und einen Spiegel, der nur 99% reflektiert und das restliche Prozent durchlässt (metallbedampftes Glas), dann kann man auf einer Seite einen kleinen Teil des Lichts entnehmen, fertig ist der Laser.

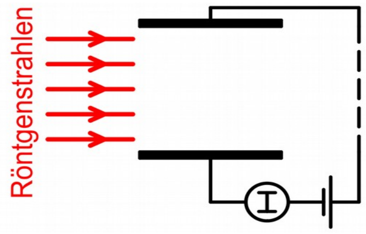


Eigenschaften des Laser-Lichts:
monochromatisch; sehr geringe Divergenz (keine Strahlaufweitung); große Photonen-Familien mit exakt gleicher Phasenlage

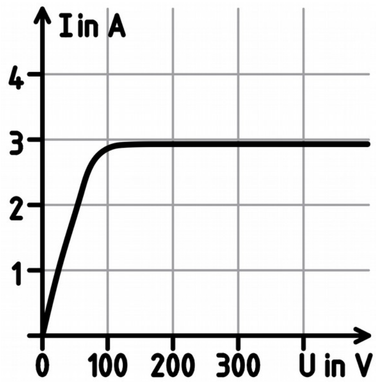
Schlussbemerkung: Viele Laser haben keine ebenen Spiegel, sondern gekrümmte. Solche Laser haben dann natürlich eine größere Strahlaufweitung. Laser gibt es in allen Wellenlängen (Mikrowellen bis Röntgenstrahlen), allen Farben (Farbstofflaser) und mit beliebigen Leistungen (mW bis MW). Für sehr hohe Leistungen allerdings nur gepulst. Auch die Laser im CD-Laufwerk oder im Laserpointer sind echte Laser mit dem Funktionsprinzip oben. Das k aus dem Resonator von ganz oben ist für kleine Halbleiter-Laser ein paar Tausend und für große Laser mit kleinen Wellenlängen ein paar Millionen.

5.4 Abi mit Lösung

Aufgabe 5.85: Abi 1999; Ionisierende Wirkung von Röntgenstrahlung



Richtet man die Röntgenstrahlung einer 35kV-Röhre zwischen die Platten eines mit Luft gefüllten Kondensators, an dem die Spannung U anliegt, so erhält man den skizzierten Zusammenhang zwischen U und dem Kondensatorstrom I.



a) Erläutern Sie, warum die Kurve ab einer bestimmten Spannung nahezu horizontal verläuft. Wie viele Elektronen-Ion-Paare werden zwischen den Kondensatorplatten pro Sekunde erzeugt?

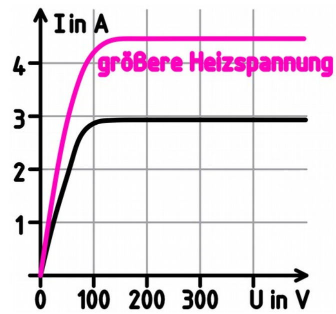
b) Fügen Sie in das U-I-Diagramm qualitativ die Kennlinie bei einer höheren Heizspannung der Röntgenröhre ein. Kennzeichnen Sie die Linien und begründen Sie den unterschiedlichen Verlauf bei hohen Spannungswerten.

Lösung:

a) Mit zunehmender Kondensatorspannung wird das E-Feld im Kondensator immer stärker und es wird ein zunehmender Anteil der durch die Röntgenstrahlung entstandenen Ionen/Elektronen von den Kondensatorplatten eingefangen. Irgendwann werden alle Ionen/Elektronen eingefangen und die Stromstärke steigt nicht weiter an.

$$I=\frac{Q}{t}=\frac{N\cdot e}{t} \rightarrow N=\frac{I\cdot t}{e}=\frac{3\text{A}\cdot 1\text{s}}{1{,}6\cdot 10^{-19}C}=\underline{\underline{1{,}9\cdot 10^{19}}}$$

b) Bei einer höheren Heizspannung in der Röntgenröhre werden mehr Elektronen im Elektronenstrahl erzeugt und deshalb steigt die Intensität der Röntgenstrahlung also die Anzahl der Röntgenquanten. Deshalb werden mehr Ion-Elektron-Paare erzeugt und die maximale Stromstärke ist größer.



Aufgabe 5.86: Abi 2003; Elektronenstoß

Eine Quelle Q emittiert einen Strahl von Elektronen. Diese treten mit der einheitlichen Geschwindigkeit $v_0 = 3{,}75 \cdot 10^6\, m/s$ in einen Behälter ein, wo sie mit stark verdünntem Helium-Gas wechselwirken können. Mit Hilfe eines Geschwindigkeitsfilters G und eines Detektors D wird das Geschwindigkeitsspektrum der Elektronen untersucht, die unten aus dem Behälter austreten.

a) Erklären Sie anhand einer beschrifteten Skizze die Wirkungsweise eines Geschwindigkeitsfilters. Leiten Sie eine Beziehung her, mit der aus Messgrößen die Geschwindigkeit der Elektronen bestimmt werden kann, die den Filter passieren.

Das Geschwindigkeitsspektrum weist bei den Geschwindigkeiten $v_0 = 3{,}75 \cdot 10^6\, m/s$ und $v_1 = 2{,}58 \cdot 10^6\, m/s$ diskrete Maxima auf. Für $v < v_2 = 2{,}33 \cdot 10^6\, m/s$ erscheint ein Kontinuum.

b) Erklären Sie, wie unterschiedliche Wechselwirkungen der Elektronen mit dem Heliumgas zu den Geschwindigkeiten $v_{0,}$ v_1 und v_2 führen.

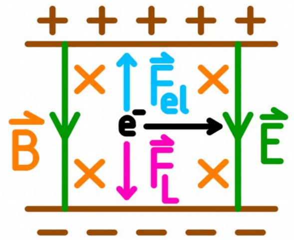
Das Heliumatom hat angeregte Zustände mit 22,8 eV und mit 23,6 eV oberhalb der Energie des Grundzustandes.

c) Berechnen Sie die aus den Messergebnissen für die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen folgenden zusätzlichen Energiestufen eines Heliumatoms in Elektronenvolt und zeichnen Sie ein quantitatives Energieschema mit allen bisher bekannten Zustandsenergien.

d) Das Heliumgas sendet Licht aus, unter anderem eine diskrete Linie mit der Wellenlänge 492 nm. Welchem Übergang entspricht diese Linie im Energieschema von Teilaufgabe 2c?

e) Warum ist es sehr unwahrscheinlich, dass bei diesem Versuch ein Elektron mehrmals Energie an ein Heliumatom abgibt?

Lösung:



a) Magnetfeld (von Spule) und Elektrisches Feld (von Kondensator erzeugt) stehen senkrecht aufeinander. Lorentzkraft und elektrische Kraft auf ein nach rechts fliegendes Elektron haben genau entgegengesetzte Richtung. Nur solche Teilchen, bei denen die beiden Kräfte gleich groß sind, können den Geschwindigkeitsfilter nach rechts verlassen.

$$F_L = F_e \;\rightarrow\; q\cdot v\cdot B = q\cdot E = q\cdot\frac{U}{d} \;\rightarrow\; v = \frac{E}{B} = \frac{U}{B\cdot d}$$

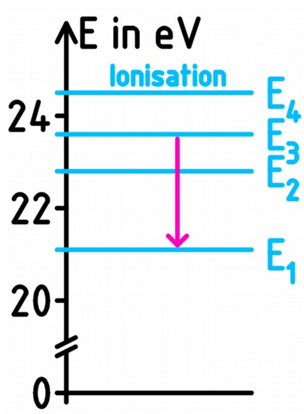
b) Elektronen mit v_0 haben ihre Richtung geändert, aber keine Energie verloren, diese resultieren aus elastischen Stößen mit Helium-Atomen.

Elektronen mit v_1 haben ein Helium-Atom angeregt, dabei Energie verloren und die Richtung geändert.

Elektronen mit v_2 haben ein Helium-Atom ionisiert. Wenn $v<v_2$ haben die Elektronen noch zusätzlich Energie an das neue Elektron abgegeben.

c)
$$E_1 = \frac{1}{2}\cdot m_e\cdot\left(v_0^2 - v_1^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot\left(3{,}75^2 - 2{,}58^2\right)\cdot 10^{12}\,m^2/s^2$$
$$\underline{\underline{E_1 = 3{,}37\cdot 10^{-18}\,J = 21{,}1\,eV}}$$

$$E_4 = \frac{1}{2}\cdot m_e\cdot\left(v_0^2 - v_2^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot\left(3{,}75^2 - 2{,}33^2\right)\cdot 10^{12}\,m^2/s^2$$
$$\underline{\underline{E_4 = 3{,}93\cdot 10^{-18}\,J = 24{,}6\,eV}}$$



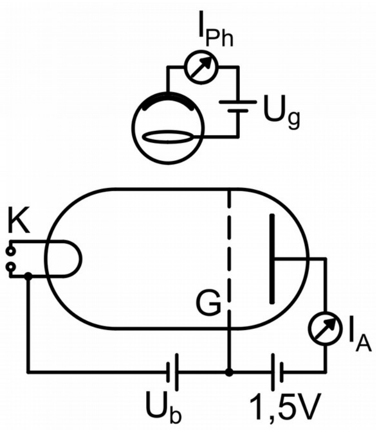
d)
$$E = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} = 4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot 10^8\,m/s}{492\cdot 10^{-9}\,m} = \underline{2{,}52\,eV}$$

Der einzige passende Übergang ist der eingezeichnete vom dritten angeregten Zustand in den ersten angeregten Zustand.

e)
$$E_{kin} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg\cdot\left(3{,}75\cdot 10^6\,m/s\right)^2 = \underline{6{,}4\cdot 10^{-18}\,J = 40\,eV}$$

Die Anfangsenergie eines Elektrons ist 40 eV. Zum Anregen aus dem Grundzustand braucht es mind. 21 eV, das geht also nicht zweimal. Weil die angeregten Heliumatome sehr schnell in den Grundzustand zurückfallen ist es auch sehr unwahrscheinlich, dass ein Elektron auf ein solches trifft.

Aufgabe 5.87: Abi 2005; Anregungsenergien von Neon



Zur experimentellen Bestimmung der Energiestufen von Neon wird ein Franck-Hertz-Rohr mit Neongas verwendet. Zum Nachweis der aus dem Stroßraum kommenden Strahlung dient eine gemäß der Gegenfeldemethode geschaltete Vakuumphotozelle.

Die Beschleunigungsspannung U_b am Franck-Hertz-Rohr wird, von Null Volt beginnend, langsam erhöht, wobei die Gegenspannung an der Photozelle zunächst $U_g=0\text{V}$ beträgt. Erst bei $U_b=16{,}6\,V$ am Franck-Hertz-Rohr setzt abrupt ein Photostrom I_{Ph} in der Vakuumphotozelle ein. Bei diesem Wert von U_b am Franck-Hertz-Rohr wird durch Hochregeln der Gegenspannung an der Vakuumphotozelle auf $U_g=10{,}9\,V$ erreicht, dass der Photostrom gerade Null wird.

Kontaktspannungen am Franck-Hertz-Rohr sollen nicht berücksichtigt werden, wir tun also so als ob es die nicht gäbe.

a) Welche Energie haben die aus dem Stroßraum des Franck-Hertz-Rohrs austretenden Photonen? Bestimme die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials der Photozelle.

Im Folgenden bleibt die Gegenspannung an der Photozelle $U_g=10{,}9\,V$ unverändert. Steigert man nun die Beschleunigungsspannung am Franck-Hertz-Rohr weiter, so ist zunächst kein Photostrom zu registrieren. Erst ab einer Beschleunigungsspannung von $U_b=18{,}5\,V$ am Franck-Hertz-Rohr setzt in der Vakuumphotozelle der Photostrom plötzlich wieder ein. Gleichzeitig ist ein rötliches Leuchten des Neongases unmittelbar vor dem Gitter zu beobachten.

b) Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem Einsetzen des Photostroms bei $U_b=18{,}5\,V$ und dem Auftreten des roten Leuchtens. Zeichnen Sie hierfür mit den bisherigen Daten ein Energieschema für Neon, tragen Sie die relevanten Übergänge ein und berechnen Sie die Wellenlänge des roten Neonlichts.

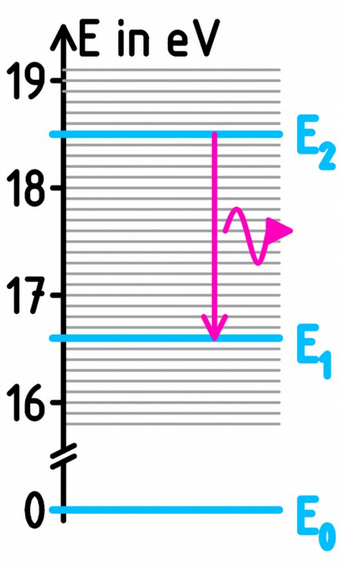
c) Erhöht man die Bechleunigungsspannung an der Franck-Hertz-Rhöre weiter, so verschiebt sich die rote Lauchtschicht in Richtung Kathode K. Bei $U_b=35{,}1\,V$ entsteht unmittelbar vor dem Gitter eine weitere Leuchtschicht gleicher Farbe. Erklären Sie das Zustandekommen dieser zweiten Leuchtschicht, wenn davon ausgegangen wird, dass Anregungen von Neonatomen ausschließlich aus dem Grundzustand erfolgen und das Gas hinreichend stark verdünnt ist.

Lösung:

a) $E_{Ph}=16{,}6\,eV$

$U_g\cdot e=h\cdot f-W_A$ → $W_A=h\cdot f-U_g\cdot e=16{,}6\,eV-10{,}9\,eV=\underline{5{,}7\,eV}$

b) Bei 16,6V haben die beschleunigten Elektronen zum ersten mal genug Energie um Neonatome aus dem Grundzustand in den ersten angeregten Zustand anzuheben. Bei 18,5V haben die Elektronen genug Energie um Neonatome in den zweiten angeregten Zustand anzuheben. Die Anregung geschieht erst kurz vor dem Gitter, weil erst dort die Elektronen ihre maximale kinetische Energie haben.



Die Neonatome, die aus dem zweiten angeregten Zustand direkt in den Grundzustand zurückfallen, senden Photonen der Energie 18,5eV aus welche wieder einen Photostrom in der Photozelle verursachen. Die Neonatome, die aus dem zweiten angeregten Zustand zuerst in den ersten angeregten Zustand zurückfallen emittieren Photonen der Energie 18,5eV - 16,6eV = 1,9eV welche als rötliches Leuchten wahrgenommen werden.

$E=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda}$ → $\lambda=\frac{h\cdot c}{E}$

$\lambda=\frac{4{,}14\cdot 10^{+15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{1{,}9\,eV}$

$\underline{\lambda=653\,nm}$ ← rotes Licht

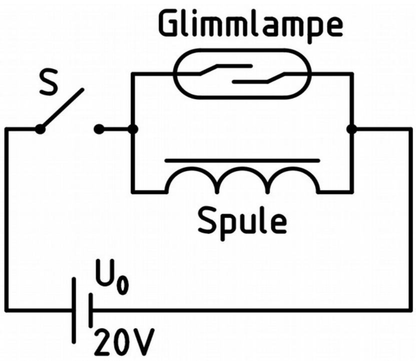
c) 35,1V = 16,6V + 18,5V, d.h. ein Elektron hat jetzt genug Energie, um ungefähr nach der halben Flugstrecke ein Neonatom in den ersten angeregten Zustand anzuheben und anschließend noch kurz vor dem Gitter ein Neonatom in den zweiten angeregten Zustand anzuheben. Diese erzeugen genau wie vorher das rote Leuchten.

Aufgabe 5.88: Abi 2007; Leuchtstoffröhren

Eine Leuchtstoffröhre zeichnet sich gegenüber einer Glühlampe durch eine höhere Nutzungsdauer aus und spart 80% der Energie bei gleicher Lichtausbeute. Der prinzipielle Aufbau einer Leuchtstoffröhre ist ähnlich einem Franck-Hertz-Rohr, bloß ohne Gegenspannung.

a) Eine 100-W-Glühlampe kostet 1,50 €, eine Leuchtstoffröhre mit gleicher Lichtleistung 10 €. Nach welcher Betriebszeit haben sich die höheren Anschaffungskosten amortisiert, wenn für 1 kWh elektrische Energie 15 Cent zu bezahlen sind?

Für das Zünden einer Leuchtstoffröhre reicht die übliche Netzspannung nicht aus. Der Zündvorgang wird durch einen internen Schalter ausgelöst und kann mit einem Versuch zur Selbstinduktion veranschaulicht werden.



Wie in der Abbildung skizziert, werden eine Glimmlampe (Zündspannung ca. 100 V) und eine Spule mit sehr großer Induktivität L und einem ohmschen Widerstand von 280 Ω über einen Schalter S an eine Stromquelle mit 20 V Spannung angeschlossen.

b) Begründen Sie, warum die Glimmlampe nicht zündet, wenn der Schalter S geschlossen wird. Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf der Stromstärke in der Spule und berechnen Sie die maximale Stromstärke.

Die Glimmlampe leuchtet beim Öffnen des Schalters S kurz auf.

c) Erklären Sie, wie die Zündspannung erreicht wird.

Der größte Teil des entstehenden Lichts in der Leuchtstoffröhre, in der sich hauptsächlich Quecksilberdampf bei sehr geringem Druck befindet, ist für unser Auge unsichtbar. Es handelt sich um Lichtquanten der Energie 4,9 eV. Um das UV-Licht in sichtbares Licht umzuwandeln, ist die Röhre innen mit einem speziellen Leuchtstoff beschichtet.

d) Erklären Sie, wie es in der Röhre zur Emission von Lichtquanten der Energie 4,9eV kommt und berechnen Sie die zugehörige Wellenlänge des Lichts.

e) Erläutern Sie an Hand eines fiktiven Energieniveauschemas für die Leuchtstoffmoleküle, wie der Leuchtstoff das UV-Licht in sichtbares Licht umwandeln kann und erklären Sie, weshalb man Infrarotlicht auf diese Weise nicht in sichtbares Licht umwandeln kann.

Das Spektrum einer Leuchtstoffröhre, die hauptsächlich Licht im Bereich zwischen 400 nm und 620nm emittiert, soll nun mit einem optischen Gitter betrachtet werden. Der Schirm steht dabei 2,50m hinter dem Gitter.

f) Wie viele Spalte (Striche) pro mm muss ein optisches Gitter mindestens haben, damit das Interferenzspektrum 1. Ordnung auf dem Schirm mindestens eine Breite von 20cm hat? (Die Kleinwinkelnäherung soll hier angewendet werden.)

Lösung:

a) Stromkosten Glühlampe: $0{,}1\,kW \cdot t \cdot 0{,}15 \frac{€}{kWh}$

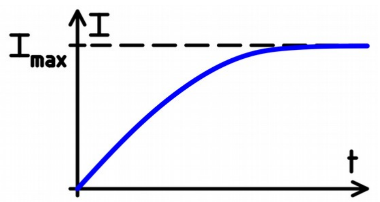
Stromkosten Leuchtstoffröhre: $0{,}2 \cdot 0{,}1\,kW \cdot t \cdot 0{,}15 \frac{€}{kWh}$

Leuchtsroffröhre kostet 8,50 € mehr

$$0{,}2 \cdot 0{,}1\,kW \cdot t \cdot 0{,}15 \frac{€}{kWh} + 8{,}50\,€ = 0{,}1\,kW \cdot t \cdot 0{,}15 \frac{€}{kWh}$$

$$8{,}50\,€ = 0{,}012 \frac{€}{h} \cdot t \;\rightarrow\; \underline{\underline{t = 708\,h}}$$

b) Die Zündspannung der Glimmlampe ist 100 V. Bei schließen des Schalters liegen an der Glimmlampe 20 V an. Das ist weniger als 100 V und reicht zur Zündung nicht aus.



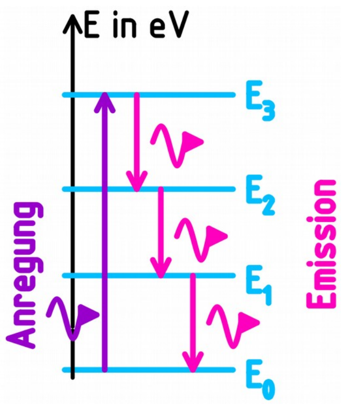
Maximale Stromstärke aus ohmschem Widerstand der Spule

$$R = \frac{U}{I} \;\rightarrow\; I = \frac{U}{R} = \frac{20\text{V}}{280\,\Omega} = \underline{71\,mA}$$

c) Beim Öffnen des Schalters sinkt die Stromstärke in der Spule plötzlich auf Null. Wegen $U_i = -L \cdot \dot{I}$ wird dann in der Spule eine sehr hohe Spannung induziert, die wegen der Schaltung dann auch an der Glimmlampe anliegt.

d) In der Leuchtstoffröhre stoßen beschleunigte Elektronen auf Quecksilberatome und regen diese an. Beim Zurückfallen in den Grundzustand emittieren die Quecksilberatome ein Lichtquant.

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\,m/s}{4{,}9\,eV} = \underline{253\,nm}$$



e) Die Photonen der Energie 4,9 eV können ein Leuchtstoffmolekül in einen höheren Angeregten Zustand angeben. Wenn das Molekül dann schrittweise in den Grundzustand zurückfällt, dann haben die emittierten Lichtquanten eine kleinere Energie und sind sichtbar.

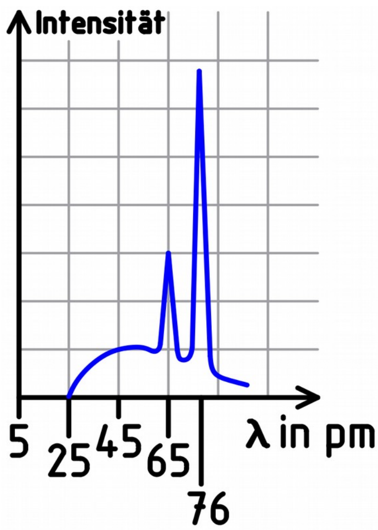
Die Photonen von Infrarotlicht haben eine kleinere Energie als die des sichtbaren Lichts. Durch den Prozess oben kann man aber die Energie von Lichtquanten nur verkleinern und nicht vergrößern.

f)
$$\lambda_1 = d\cdot\frac{\Delta y_1}{l} \rightarrow \Delta y_1 = \frac{l\cdot\lambda_1}{d} = \frac{l}{d}\cdot\lambda_1$$
$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = \frac{l}{d}\cdot(\lambda_2-\lambda_1)$$
$$d = \frac{l\cdot(\lambda_2-\lambda_1)}{\Delta y_2 - \Delta y_1} = \frac{2{,}5\,m\cdot(620-400)\cdot 10^{-9}\,m}{0{,}2\,m} = \underline{2{,}75\,\mu m}$$
$$\frac{1\,mm}{2{,}75\,\mu m} = \underline{\underline{364}}$$

Das Gitter muss also mindestens 364 Spalte pro mm haben.

Aufgabe 5.89: Abi 1998; Röntgenspektrum, modifiziert

Die Abbildung zeigt die bei einer bestimmten Betriebsspannung gemessene spektrale Intensitätsverteilung der Strahlung einer Röntgenröhre mit einer Molybdän-Anode.



a) Ermitteln Sie die zugehörige Betriebsspannung.

b) Im Bild sichtbar sind die Kα- und die Kβ-Linie. Welche ist die Kα- und welche ist die Kβ-Linie? Begründen Sie ihre Antwort und bestimmen Sie mit Hilfe der im Diagramm gegebenen Daten die Wellenlänge der Lα-Linie.

Dieselbe Röntgenröhre werde nun mit einer Spannung von 18 kV betrieben.

c) Entscheiden Sie, ob bei dieser Betriebsspannung im Emissionsspektrum die Kα-Linie des Anodenmaterials auftritt, und geben Sie eine Begründung.

d) Berechnen Sie relativistisch die Geschwindigkeit der Elektronen beim Auftreffen auf die Anode.

Lösung:

a) $$U\cdot e = h\cdot f_G = h\cdot\frac{c}{\lambda_G} \rightarrow U = \frac{h\cdot c}{e\cdot\lambda_G} = \frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{e\cdot 25\cdot 10^{-12}\,m} = \underline{\underline{49{,}7\,kV}}$$

b) Die Kα-Linie hat eine kleinere Energie und deshalb eine größere Wellenlänge. Die rechte ist also die Kα-Linie. (Zu den Energien siehe Skript)

$$E(L_\alpha) = E(K_\beta) - E(K_\alpha) = h\cdot\frac{c}{\lambda(K_\beta)} - h\cdot\frac{c}{\lambda(K_\alpha)}$$

$$E(L_\alpha) = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s \cdot \left(\frac{1}{65 \cdot 10^{-12}\, m} - \frac{1}{76 \cdot 10^{-12}\, m} \right)$$

$$\underline{E(L_\alpha) = 2766\, eV}$$

$$E = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda(L_\alpha) = \frac{h \cdot c}{E(L_\alpha)} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}{2766\, eV} = \underline{\underline{449\ pm}}$$

c) Molybdän (Mo, Nummer 42) hat eine voll besetzte K-, L- und M-Schale. Zur Erzeugung der Kα-Linie muss ein K-Elektron also mindestens bis zur N-Schale angehoben werden. Dafür ist auf alle Fälle mehr Energie notwendig als die Energie der Kβ-Linie.

$$E(K_\beta) = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\, m/s}{65 \cdot 10^{-12}\, m} = \underline{\underline{19{,}1\, keV}}$$

Die dazu notwendige Beschleunigungsspannung liegt also auf alle Fälle über 19,1 kV, d.h. bei 18 kV erscheint die Linie nicht.

d) $$E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \rightarrow v/c = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{511\, keV}{511\, keV + 18\, keV}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}2586}}$$

Die Geschwindigkeit ist also 0,2586c oder 78 Millionen Meter pro Sekunde.

Aufgabe 5.90: Abi 1999; Röntgenstrahlung und PSE, modifiziert

Moseley untersuchte die Frequenz der Kα-Linie in Abhängigkeit von der Ordnungszahl des Anodenmaterials.

a) Erläutern Sie, wie die Kα-Linie zustande kommt.

b) Zeichnen Sie mit Hilfe der gegebenen Werte ein $(Z-1)-\sqrt{f}-Diagramm$. Beachten Sie, daß das Diagramm aufgrund eines physikalischen

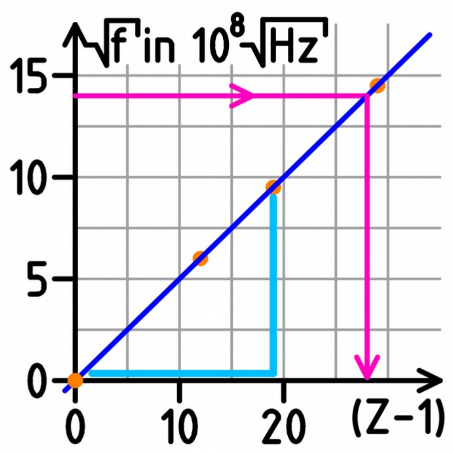
Z	13	20	30
f in $10^{16}\, Hz$	36	89	207

Gesetzes welches wir nicht kennen durch den Ursprung gehen muss. Bestimmen Sie mit Hilfe ihres Diagramms die Ordnungszahl eines Elements, dessen Kα-Linie die Wellenlänge 155 pm hat.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe ihres Diagramms eine Formel für $\sqrt{f}$ in Abhängigkeit von (Z-1) und damit schließlich eine Formel für f in Abhängigkeit von (Z-1). Das ist das Gesetz von Moseley.

Lösung:

a) Ein von außen kommendes, beschleunigtes Elektron hebt ein Elektron der K-Schale auf eine höhere Schale an oder schlägt es ganz aus dem Atomrumpf heraus. Wenn ein Elektron aus der L-Schale auf den freien Platz in der K-Schale fällt wird Energie in Form eines Kα-Photons frei.



b) $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \, m/s}{155 \cdot 10^{-12} \, m} = \underline{1{,}94 \cdot 10^{18} \, Hz}$

$\underline{\sqrt{f} = 13{,}9 \cdot 10^8 \sqrt{Hz}}$

Aus dem Diagramm liest man ab: (Z-1) = 28

Also ist Z = 29

c) Steigung aus Steigungsdreieck

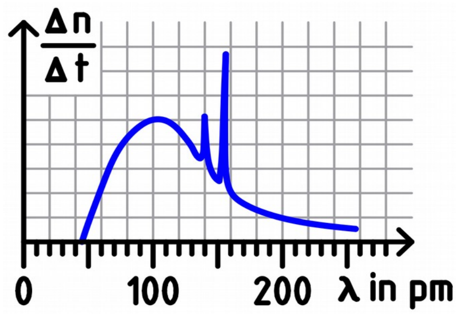
$$m = \frac{\Delta\sqrt{f}}{\Delta Z} = \frac{9{,}5 \cdot 10^8 \sqrt{Hz}}{19} = \underline{5 \cdot 10^7 \sqrt{Hz}}$$

$\sqrt{f} = 5 \cdot 10^7 \sqrt{Hz} \cdot (Z-1)$

$\underline{f = 25 \cdot 10^{14} \, Hz \cdot (Z-1)^2}$

Aufgabe 5.91: Abi 2000

Die nebenstehende Abbildung zeigt das Spektrum der Strahlung einer Röntgenröhre. Δn ist die Anzahl der im Zeitintervall Δt nachgewiesenen Röntgenquanten der Wellenlänge λ.



a) Skizzieren Sie den prinzipiellen Aufbau und die Beschaltung einer Röntgenröhre.

b) Erklären Sie kurz, auf welche Weise das kontinuierliche Röntgenspektrum zustande kommt.

c) Entnehmen Sie der Abbildung die Grenzwellenlänge und berechnen Sie daraus die Spannung, mit der die Röhre bei der Aufnahme des Spektrums betrieben wurde.

Im Diagramm sind auch zwei K-Linien des charakteristischen Röntgenspektrums erkennbar.

d) Erklären Sie allgemein die Entstehung der K-Linien des charakteristischen Röntgenspektrums.

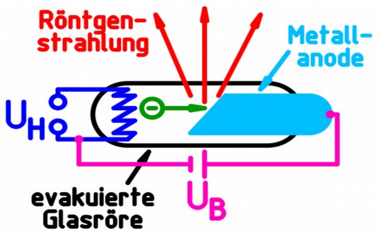
Das Gesetz von Moseley gibt einen Zusammenhang zwischen der Wellenlänge der Kα-Linie λ und der Ordnungszahl des Anodenmaterials Z.

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{3}{4}\cdot R\cdot(Z-1)^2$$

Dabei ist R die Rydbergkonstante des Anodenmaterials, welche für alle Elemente etwa gleich groß ist.

e) Begründen sie welche der Linien im Spektrum die Kα-Linie ist und bestimmen Sie das Element, aus dem die Anode der Röntgenröhre besteht.

<u>Lösung:</u>



a) Die Heizspannung UH ist eine kleine Wechselspannung, die Beschleunigungsspannung UB ist eine große Gleichspannung (10kV - 150kV).

b) Die beschleunigten Elektronen treffen auf das Metallgitter der Anode und werden dort abgebremst. Beschleunigte Ladungen emittieren EM-Wellen, in diesem Fall wegen der betragsmäßig großen Beschleunigung Röntgenquanten. Je nachdem, wie das Abbremsen vor sich geht werden alle möglichen Wellenlängen erzeugt, bis hin zu einer kleinsten Wellenlänge, die entsteht, wenn ein Elektron seine gesamte kinetische Energie durch ein Photon abgibt.

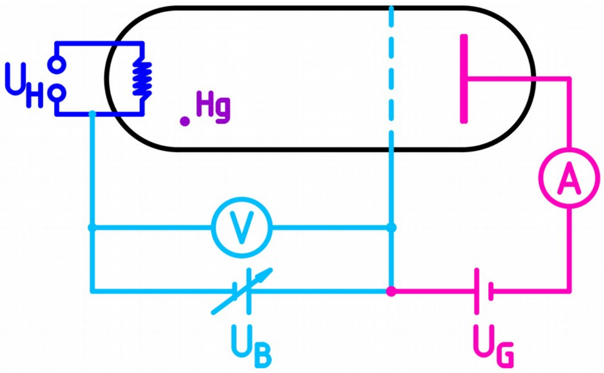
c) $$U\cdot e=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda}\ \rightarrow\ U_B=\frac{h\cdot c}{e\cdot\lambda_G}=\frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{1\cdot e\cdot 45\cdot 10^{-12}\,m}=\underline{\underline{27{,}6\,kV}}$$

d) Wenn ein auf die Anode auftreffendes Elektron ein Hüllenelektron aus der K-Schale (n = 1) eines Atomrumpfes in der Anode herauslöst, entsteht ein freier Platz auf der K-Schale dieses Atomrumpfes. Wenn nun ein Elektron aus einer Höheren Schale (L, M, ...) auf diesen freien Platz in der K-Schale zurückfällt, wird ein Photon emittiert, dessen Energie genau der Differenz dieser Energieniveaus entspricht. Da die Energieniveaus der Elektronen im Atomrumpf diskret sind entstehen so nur ganz bestimmte Wellenlängen -> K-Linien.

e) Die Kα-Linie entspricht dem Übergang von L nach K und hat deshalb die kleinste Energie, also die größte Wellenlänge bei ca. 158 pm.

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{3}{4}\cdot R\cdot(Z-1)^2\ \rightarrow(Z-1)=\sqrt{\frac{4}{3\cdot R\cdot\lambda}}=\sqrt{\frac{4}{3\cdot 1{,}1\cdot 10^{7}\,1/m\cdot 158\cdot 10^{-12}\,m}}\approx\underline{28}$$ -> Z = 29; Cu

Aufgabe 5.92: Abi 1998



Ein Hauptmerkmal der Atome besteht darin, dass sie diskrete Energieniveaus besitzen, die für eine Atomsorte charakteristisch sind. Der Versuch von Franck und Hertz ist eines der Schlüsselexperimente für die Anregung zu "Quantensprüngen".

a) Erläutern Sie in Bezug auf obige Schaltskizze die Wirkungsweise der drei Schaltungsabschnitte mit den Spannungen UH, UB und UG.

b) Skizzieren und interpretieren Sie das für den Franck-Hertz-Versuch charakteristische Spannungs-Stromstärke-Diagramm.

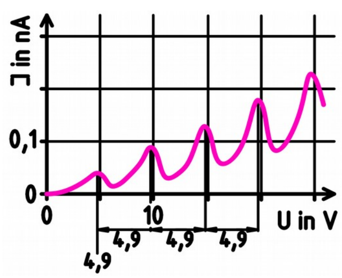
c) Die Interpretation des Franck-Hertz-Versuchs wird durch die Beobachtung bestätigt, dass aus der mit Quecksilberdampf gefüllten Röhre Strahlung mit der Wellenlänge λ = 254 nm emittiert wird. Erklären Sie das Zustandekommen dieser Strahlung. Berechnen Sie dazu auch die der Wellenlänge entsprechende Quantenenergie in eV.

Lösung:

a) Die Heizspannung UH (Wechselspannung) dient dazu die Glühkathode zu heizen um Elektronen aus der Kathode freizusetzen.

Die Beschleunigungsspannung UB dient dazu die Elektronen von der Kathode aus in Richtung Gitter zu beschleunigen und auf dem Weg ihre kinetische Energie zu steigern.

Die Gegenspannung UG verhindert, dass Elektronen die ihre kinetische Energie abgegeben haben trotzdem noch auf die Anode treffen und dort als Anodenstrom gemessen werden.



b) Aufgetragen wird der Anodenstrom in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung bei konstanter Heiz- und Gegenspannung.

Zu Anfang können die Elektronen keine Energie an die Atome abgeben, weil ihre kinetische Energie kleiner als die erste Anregungsenergie der Atome ist. Sobald ihre kinetische

Energie (Ekin = U·e = Δφ·e) die erste Anregungsenergie erreicht können sie Energie an die Atome abgeben, was sie bei hinreichend dichter Füllung der Röhre auch auf kurzer Strecke tun. Dadurch reicht ihre kinetische Energie nicht mehr aus um die Gegenspannung zu überwinden und der Anodenstrom bricht ein. Der Vorgang wiederholt sich bei doppelter, dreifacher, usw. Anregungsenergie weil die Elektronen dann zweimal, dreimal, usw. ein Atom anregen können und dies auch tun. Dieses Verhalten der Elektronen zeigt, dass die Atome nicht beliebige Energiebeträge aufnehmen können, sondern nur ganz bestimmte -> diskretes Anregungsspektrum

c) $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 4{,}14 \cdot 10^{-15} eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^{8} m/s}{254 \cdot 10^{-9} m} = \underline{\underline{4{,}9\, eV}}$

Die angeregten Atome fallen schnell wieder in der Grundzustand zurück und emittieren dabei ein Photon mit exakt der Anregungsenergie.

<u>Aufgabe 5.93: Abi 2006; Franck-Hertz-Versuch</u>

Im Jahr 1925 wurden die deutschen Physiker James Franck und Gustav Hertz für ihre experimentellen Forschungen auf dem Gebiet der Atomphysik mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

a) Skizzieren Sie den Versuchsaufbau (inkl. Messgeräte) zum Elektronenstoß-Versuch im Franck-Hertz-Rohr, beschriften Sie die wesentlichen Teile und beschreiben Sie knapp die Versuchsdurchführung.

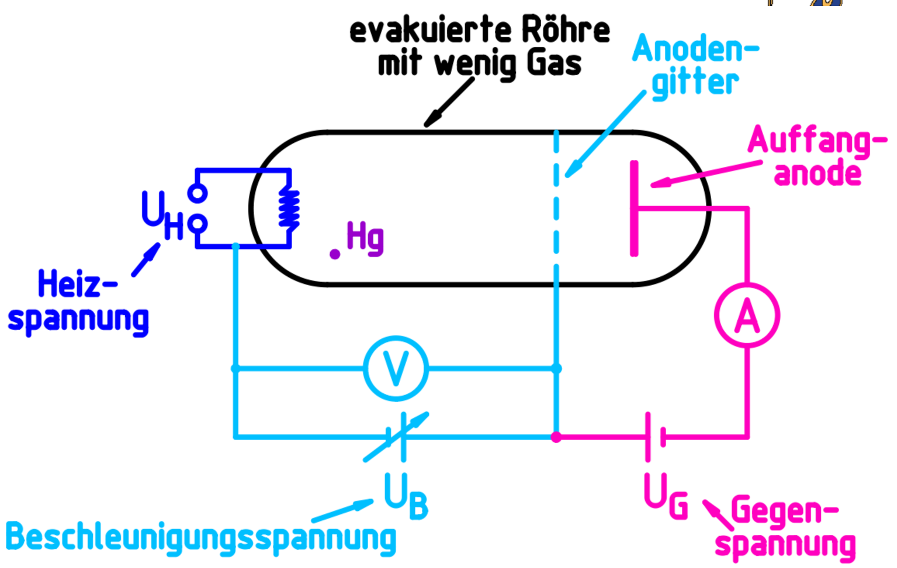
b) Fertigen Sie eine Skizze des charakteristischen U-I-Diagramms an. Zeichnen Sie darin auch den ungefähren Verlauf der Kennlinie ein, die man erwarten würde, wenn zwischen Elektronen und Quecksilberatomen nur elastische Stöße auftreten könnten. Begründen Sie den unterschiedlichen Kurvenverlauf.

c) Bei Zimmertemperatur ist in der Röhre Quecksilber in flüssigem Zustand zu sehen. Erklären Sie kurz, warum zur Aufnahme der Messkurve die Röhre beheizt werden muss.

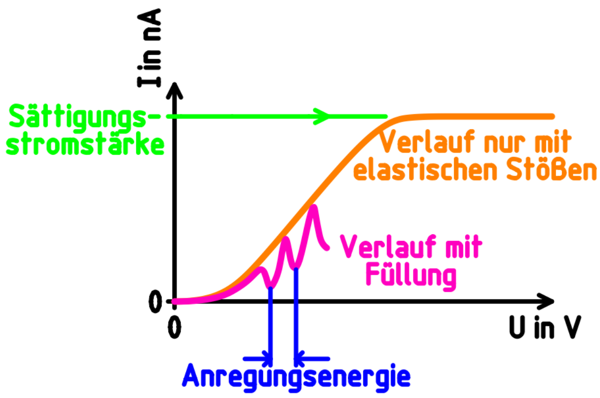
d) Nach Anregung der Quecksilberatome auf ein Niveau von 4,9 eV über dem Grundzustand geht die Mehrzahl direkt wieder in den Grundzustand über. Berechnen Sie die Wellenlänge der damit verbundenen Strahlung. Wie heißt der dazugehörige Wellenlängenbereich.

Lösung:

a) Die Beschleunigungsspannung wird von Null ausgehend gesteigert. Gemessen wird der Strom an der Auffanganode (eingezeichnetes Amperemeter) in Abhängigkeit der Beschleunigungsspannung (eingezeichentes Voltmeter).



b) Bei nur elastischen Stößen geben die Elektronen so gut wie keine Energie an die Atome ab, der Kurvenverlauf entspricht der U-I-Kennlinie einer Vakuumdiode.



Bei realem Verlauf bricht die Stromstärke in äquidistanten Spannungs-Abständen immer wieder ein. Das liegt daran, dass die Elektronen, sobald ihre kinetische Energie so groß ist wie die erste Anregungsenergie der Atome, ihre Energie an die Atome abgeben können und das auch tun. Als Folge davon haben sie anschließend nicht mehr ausreichend Energie um das Gegenfeld zu durchqueren und die Auffanganode zu erreichen. Ebenso können die Elektronen bei ausreichender Beschleunigungsspannung auch mehrmals ein Atom anregen, wodurch sich das Einbrechen der Stromstärke periodisch wiederholt.

c) Solang das Quecksilber flüssig ist, sind viel zu wenig Quecksilberatome in der gasförmigen Phase. D.h. den Elektronen stehen viel zu wenig Quecksilberatome im Weg, als das es zu nachweisbarer Anregung kommen kann.

Bemerkung: Im flüssigen Quecksilber besitzen die Elektronen nicht mehr die atomaren Wellenfunktionen, sondern die elektronischen Wellenfunktionen werden in der Flüssigkeit verschmiert. Deshalb haben die elektronischen Wellenfunktionen auch andere Energiewerte und die Energiewerte der Atome lassen sich nicht mehr nachweisen.

d) $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$ → $\lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\, eVs \cdot 3 \cdot 10^{8}\, m/s}{4{,}9\, eV} = \underline{\underline{253\, nm}}$

Das liegt knapp unter 390 nm also im UV-Bereich.

Aufgabe 5.94: Abi 2007; Röntgenstrahlung

Wilhelm Conrad Röntgen entdeckte im Jahr 1895 eine neue Art von Strahlen, die er zunächst als X-Strahlen bezeichnete. Heute spielt Röntgenstrahlung eine wichtige Rolle in Medizin und Technik.

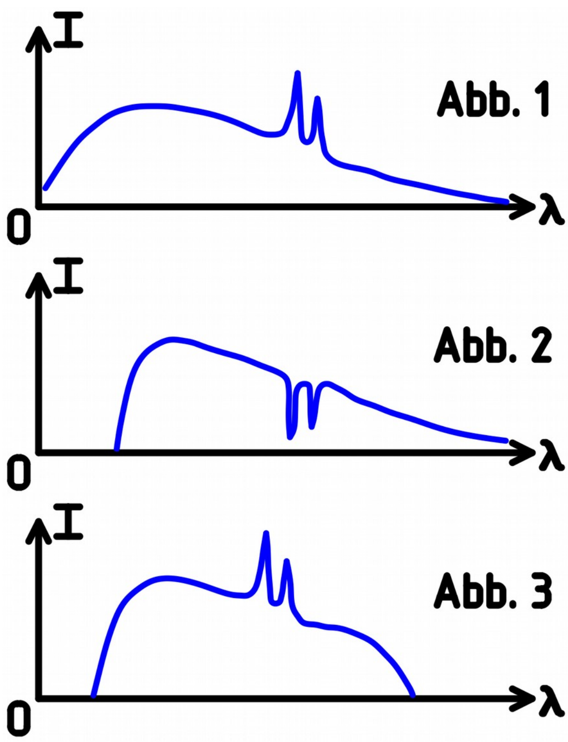
a) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze einer Röntgenröhre inklusive der elektrischen Schaltung an. Beschreiben Sie, wozu die verwendeten Stromquellen dienen.

An einer Röntgenröhre wird eine Beschleunigungsspannung von 40 kV gelegt.

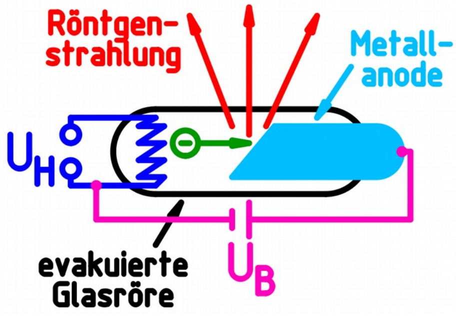
b) Beschreiben Sie kurz, wie der kontinuierliche Teil des Röntgenspektrums entsteht, und berechnen Sie dessen Grenzwellenlänge.

c) Das charakteristische Spektrum zeigt auch die Kα-Linie. Erklären Sie das Zustandekommen dieser Linie.

d) Bei den nebenstehenden Abbildungen kann es sich nicht um Emissionsspektren einer Röntgenröhre handeln. Begründen Sie dies jeweils knapp.



Lösung:



a) Die Heizspannung UH (kleine Wechselspannung: 6 Volt) dient zu heizen der Glühkathode. Dadurch nimmt die thermische Bewegung der Leitungselektronen in der Glühkathode soweit zu, dass einige schließlich das Metallgitter der Kathode verlassen können.

Die Beschleunigungsspannung UB (hohe Gleichspannung: 10 kV bis 100 kV) dient dazu, die an der Glühkathode freigesetzten Elektronen in Richtung Anode zu beschleunigen, damit sie schließlich mit hoher Energie auf die Metallanode treffen.

b) Die auf die Metallanode treffenden Elektronen werden im Metallgitter der Anode abgebremst. Beschleunigte elektrische Ladungen emittieren elektromagnetische Wellen, die Röntgenstrahlen. Da bei diesem Abbremsen alle möglichen Beschleunigungen vorkommen können werden Photonen aller möglichen Wellenlängen emittiert, bis hin zu einer minimalen Wellenlänge, wenn nämlich ein Elektron seine gesamt kinetische Energie in Form eines einzigen Photons abgibt.

$$E=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda_G=\frac{h\cdot c}{E_{kin}}=\frac{h\cdot c}{U_B\cdot e}=\frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{40\cdot 10^3\,V\cdot e}=\underline{31\,pm}$$

c) Von einem auf die Metallanode treffenden Elektron wird ein Hüllenelektron aus der K-Schale eines Atomrumpfes herausgeschlagen. Wenn der freie Platz auf der K-Schale von einem Elektron der L-Schale besetzt wird, dann wird ein Photon mit der charakteristischen Ka-Energie emittiert. Diese Photonen bilden die genannte Linie im Röntgenspektrum.

d) Abb. 1 kann kein Röntgenspektrum sein, da es keine kurzwellige Grenzwellenlänge besitzt.

Abb. 2 zeigt keine charakteristischen Emissionslinien im Spektrum sondern Absorbtionslinien, die bei einer Röntgenröhre nicht auftreten.

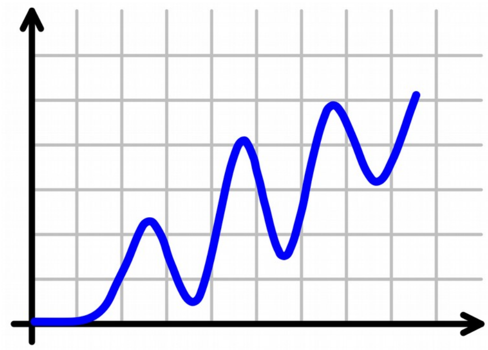
Abb. 3 hat eine langwellige Grenzwellenlänge, die es bei einer Röntgenröhre nicht gibt.

Aufgabe 5.95: Abi 2009; Franck-Hertz-Versuch

Der dänische Physiker Niels Bohr, ein Schüler Rutherfords, entwickelte ein Modell, in dem Atome nur ganz bestimmte Energiebeträge aufnehmen und dadurch zur Aussendung elektromagnetischer Strahlung mit charakteristischen Wellenlängen angeregt werden können. Dies wurde im Jahr 1913 von J. Franck und G. Hertz experimentell bestätigt.

a) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze vom Aufbau des Franck-Hertz-Versuchs an und erläutern Sie kurz die Vorgehensweise bei diesem Experiment.

Inzwischen gibt es auch Franck-Hertz-Röhren, die mit dem Edelgas Neon gefüllt sind. Für eine solche Röhre liefert die Aufzeichnung einer Messung das nebenstehende Schirmbild. Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Maxima auf der Rechtswertachse im Diagramm entspricht einer Energiedifferenz von 18,3 eV.



b) Welche Messgrößen werden auf den beiden Achsen angetragen? Erklären Sie das Zustandekommen des Kurvenverlaufs.

c) Man erwartet, dass die angeregten Gasatome beim Übergang in den Grundzustand elektromagnetische Strahlung aussenden. Geben Sie die Energie eines solchen Photons an und berechnen Sie die Wellenlänge dieser Strahlung. Geben Sie den zugehörigen Bereich des elektromagnetischen Spektrums an.

Neben der Strahlung der berechneten Wellenlänge sendet das angeregte Gas beim Übergang in den Grundzustand rotes Licht der Wellenlänge 729 nm und zusätzlich Strahlung einer weiteren Wellenlänge aus.

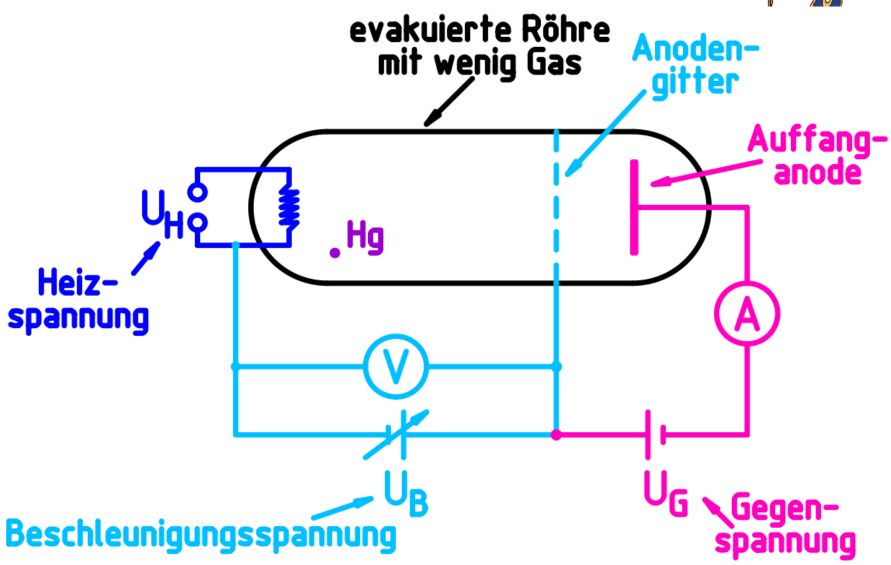
d) Beschreiben Sie allgemein ein Verfahren, um die Wellenlänge von sichtbarem Licht zu bestimmen.

e) Skizzieren Sie ein vereinfachtes Termschema des verwendeten Gases mit den notwendigen Energieniveaus. Erklären Sie damit die Entstehung des roten Lichts und der zusätzlich auftretenden Strahlung. Berechnen Sie die Energie Eph eines Photons dieser Strahlung.

f) Neben der Ermittlung des Planck'schen Wirkungsquantums h über den Photoeffekt oder aus dem Franck-Hertz-Versuch lässt sich h auch aus dem Spektrum einer Röntgenröhre bestimmen. Erläutern Sie dies.

Lösung:

a) Die Beschleunigungsspannung wird von Null ausgehend gesteigert. Gemessen wird der Strom an der Auffanganode (eingezeichnetes Amperemeter) in Abhängigkeit der Beschleunigungsspannung (eingezeichentes Voltmeter).



b) Nach rechts ist die Beschleunigungsspannung UB angetragen und nach oben die Stromstärke an der Auffanganode (siehe Bild).

Zustandekommen des Kurvenverlaufs:

Zu Anfang ist die Stromstärke Null, weil kein Elektron genug Energie besitzt um die kleine Gegenspannung UG (siehe Bild) zu überwinden. Erst wenn die Beschleunigungsspannung größer als die Bremsspannung ist, haben die Elektronen genug Energie um die die Auffangelektrode zu erreichen.

Dann steigt die Stromstärke an, weil immer mehr Elektronen von der Elektronenwolke der Glühkathode zum Anodengitter hin beschleunigt werden. Die Elektronen können zwar mit den Neon-Atomen zusammenstoßen, es finden aber nur elastische Stöße statt, bei denen die Elektronen keine kinetische Energie verlieren. Die Elektronen werden zwischen den Neon-Atomen hin und her reflektiert ohne Energie zu verlieren.

Bei einer Beschleunigungsspannung von 18,3 V haben die Elektronen genug Energie, um die Neon-Atome in einen angeregten Zustand anzuheben. Dabei verlieren die Elektronen kinetische Energie und haben dann nicht mehr genug Energie, um die Gegenspannung UG zu überwinden, die Stromstärke an der Auffanganode bricht ein. Erst wenn man die Beschleunigungsspannung wieder um die Bremsspannung erhöht, können die Elektronen ein Atom anregen und danach trotzdem wieder die Auffangelektrode erreichen, wodurch die Stromstärke wieder steigt. Bei einer Beschleunigungsspannung von 36,6 V können die Elektronen zwei Neon-Atome anregen, ihre ganze Energie abgeben und die Stromstärke bricht wieder ein usw. usf. .

c) Die Energie eines emittierten Photons beträgt 18,3 eV.

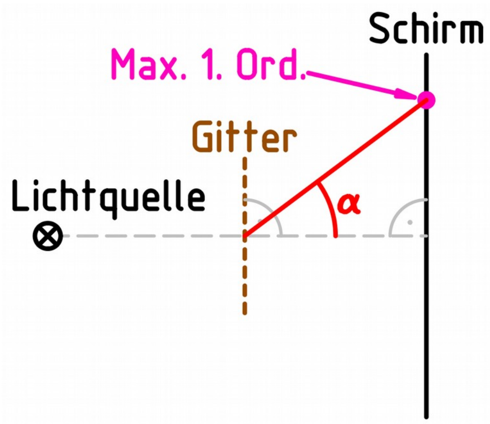
$$E=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda=\frac{h\cdot c}{E}=\frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}{18{,}3\,eV}=\underline{67{,}9\,nm}$$

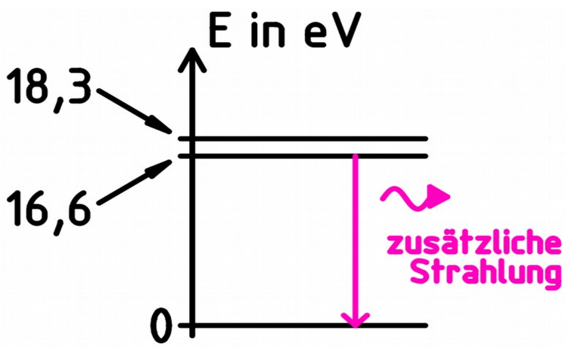
Die Strahlung liegt im UV-Bereich.

d) Man schickt das Licht durch ein optisches Gitter, hinter dem sich ein Schirm befindet. Man misst z.B. in großer Entfernung den Winkel α zwischen dem Hauptmaximum und dem Maximum 1. Ordnung. Damit ist dann

$$\lambda=\Delta s=d\cdot\sin\alpha$$

mit der Gitterkonstante d des Gitters.





e) rotes Licht:

$$E=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda}$$
$$=4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot\frac{3\cdot 10^{8}\,m/s}{729\cdot 10^{-9}\,m}=\underline{1{,}7\,eV}$$

Bleibt eine Energiedifferenz von

18,3 eV - 1,7 eV = 16,6 eV

Termschema siehe Bild; erster angeregter Zustand bei 16,6 eV, zweiter angeregter Zustand bei 18,3 eV. Das rote Licht entsteht beim zurückfallen eines Atoms vom zweiten angeregten Zustand in der Ersten. Die zusätzliche Strahlung entsteht beim Zurückfallen vom ersten angeregten Zustand in den Grundzustand. Das dazugehörige Photon hat eine Energie von 16,6 eV.

f) Das kontinuierliche Spektrum einer Röntgenröhre besitzt eine kurzwellige Grenzwellenlänge, wenn nämlich ein auf die Metallanode beschleunigtes Elektron seine gesamte Energie an ein Röntgenquant abgibt.

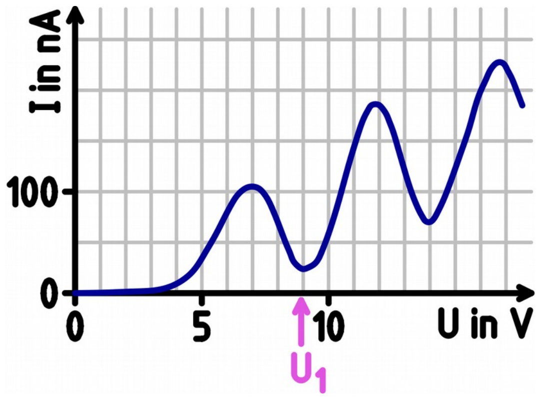
$$U\cdot e=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda} \rightarrow h=\frac{U_B\cdot e\cdot\lambda_G}{c}$$

Wenn es gelingt die Grenzwellenlänge zu bestimmen, lässt sich so h bestimmen.

Aufgabe 5.96: G8 Abi 2011; Franck-Hertz-Versuch

Im Jahre 1913 führten die Physiker James Franck und Gustav Hertz einen Versuch zur Anregung von Quecksilberatomen durch Elektronenstöße durch.

a) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze des Franck-Hertz-Experiments en.



b) Das nebenstehende Diagramm wurde bei einer Durchführung des Experiments aufgezeichnet. Erklären Sie das Auftreten des ersten relativen Minimums der Stromstärke (bei der Spannung U1).

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Diagramms die Geschwindigkeit, die ein Elektron mindestens haben muss, um ein Quecksilberatom anregen zu können.

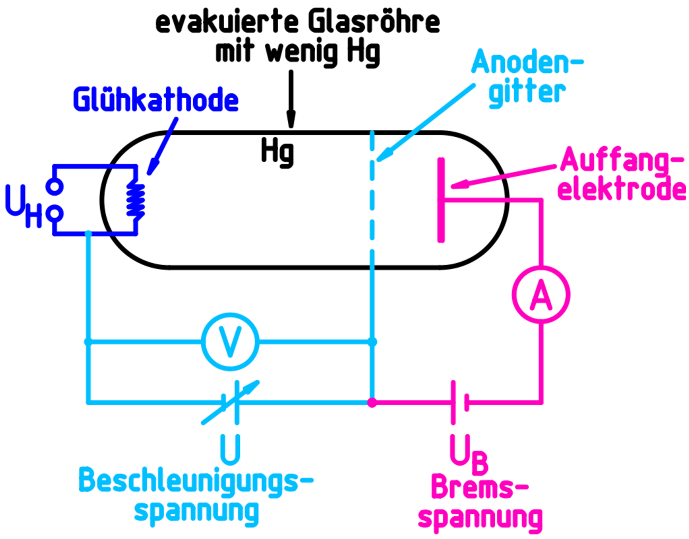
Die angeregten Quecksilberatome geben beim Übergang in den Grundzustand ihre Anregungsenergie in Form von Photonen ab.

d) Berechnen Sie die Wellenlänge der emittierten Strahlung und geben Sie deren Spektralbereich an.

e) Atome können sowohl durch Stöße mit Elektronen als auch durch Photonen angeregt werden. Geben Sie zwei wesentliche Unterschiede dieser beiden Anregungsmöglichkeiten an.

Lösung:

a) siehe Bild



b) Bei dieser Beschleunigungsspannung haben die Elektronen zum ersten mal genügend Energie um ein Quecksilberatom anregen zu können. Bei der Anregung geben Sie den Großteil ihrer kinetischen Energie ab und haben anschließend nicht mehr genügend Energie um die Bremsspannung überwinden zu können und am Amperemeter (A) einen Strom zu verursachen.

c) Abstand zweier benachbarter Minima (bzw. Maxima) ist ca. 4,9 V. Das entspricht der kinetischen Energie, die ein Elektron zur Anregung haben muss (Kontaktspannung im Innern der Apperatur beachten!).

$$\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = e\cdot U \;\rightarrow\; v = \sqrt{\frac{2\cdot e\cdot U}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 4{,}9\,V}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,kg}} = \underline{1{,}31\cdot 10^6\,m/s}$$

d) $E = h\cdot f = h\cdot\frac{c}{\lambda} \;\rightarrow\; \lambda = \frac{h\cdot c}{E} = \frac{4{,}14\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{4{,}9\,eV} = \underline{253\,nm}$, das ist UV-Strahlung

e) Ein Photon kann ein Atom nur Anregen, wenn es exakt die Anregungsenergie besitzt. Ein Elektron kann ein Atom anregen, wenn es mindestens die Anregungsenergie besitzt.

Ein Photon ist nach der Anregung nicht mehr vorhanden, es wird absorbiert. Ein Elektron ist nach der Anregung immer noch da.

<u>Aufgabe 5.97: Abi 2012; Messinstrumente des Marsrovers</u>

Das Messinstrument "ChemCam" besteht aus einem Laser und einem Spektrometer. Der Laser sendet Lichtpulse der Dauer 5,0 ns mit der Wellenlänge 1067 nm aus, die jeweils eine Energie von 30 mJ transportieren.

a) Berechnen Sie die Leistung eines Lichtpulses sowie die Anzahl der mit diesem Puls ausgesendeten Photonen.

Trifft ein solcher Lichtpuls auf einen Fels, so verdampfen Teile des Gesteins schlagartig. Dadurch wird das Ausgangsmaterial in seine Atome bzw. deren Ionen zerlegt. Die Atome bzw. Ionen liegen dabei in einem angeregten Zustand vor und senden ein für die Probe charakteristisches Licht aus, dessen Spektrallinien mit einem Spektrometer registriert werden. Im Folgenden wird das Spektrum von Wasserstoff untersucht, da dessen Auftreten auf das Vorhandensein von Wasser auf dem Mars hinweisen könnte.

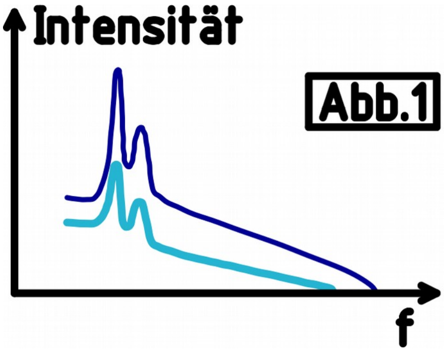
b) Berechnen Sie die ersten fünf Energieniveaus von Wasserstoff und zeichnen Sie mit diesen ein Energieniveauschema.

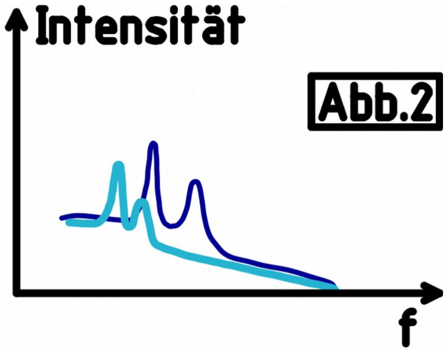
c) Berechnen Sie mit den Ergebnissen von Teilaufgabe 2.b) die Wellenlängen der drei langwelligsten sichtbaren Spektrallinien von Wasserstoff und zeichnen Sie die drei zugehörigen Energieübergänge in das Energieniveauschema von Teilaufgabe 2.b) ein.

Außer mit der "ChemCam" kann "Curiosity" die Beschaffenheit des Marsgesteins auch mit Hilfe röntgenspektroskopischer Methoden untersuchen.

d) Fertigen Sie eine beschriftete Skizze einer Röntgenröhre inklusive der elektrischen Schaltung an.

e) In den nebenstehenden Abbildungen handelt es sich jeweils um Emissionsspektren von Röntgenröhren. Begründen Sie zu jeder Abbildung kurz, welche Veränderung im experimentellen Aufbau den Wechsel von der hellblauen zur dunkelblauen Kurve bewirkt hat.





f) Mit dem Gesetz von Moseley $\frac{1}{\lambda_\alpha}=\frac{3}{4}\cdot R_H\cdot(Z-1)^2$ lässt sich aus der Röntgenwellenlänge λ_α der Ka-Linie näherungsweise die Ordnungszahl Z des Anodenmaterials ermitteln (R_H ist die Rydbergkonstante für das Wasserstoffatom). Bestimmen Sie das Anodenmaterial für $\lambda_\alpha=0{,}152\,nm$.

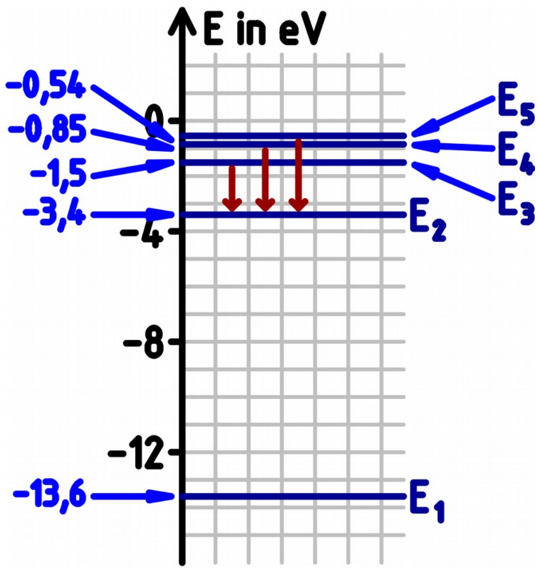
g) Bei "Curiosity" soll das zu untersuchende Gestein mit Alpha-Teilchen beschossen werden. Dabei wird Röntgenstrahlung vom Gestein emittiert, die Rückschlüsse auf die darin enthaltenen Elemente erlaubt. Erklären Sie die Vorgänge im Gestein.

<u>Lösung:</u>

a) $P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{30\cdot 10^{-3}\,J}{5\cdot 10^{-9}\,s}=\underline{\underline{6{,}0\,MW}}$

$$N=\frac{E}{E_{Ph}}=\frac{E}{h\cdot f}=\frac{E}{h\cdot\frac{c}{\lambda}}=\frac{E\cdot\lambda}{h\cdot c}$$

$$N=\frac{30\cdot 10^{-3}\,J\cdot 1067\cdot 10^{-9}\,m}{6{,}63\cdot 10^{-34}\,Js\cdot 3\cdot 10^{8}\,m/s}=\underline{\underline{1{,}6\cdot 10^{17}}}$$



b)
$$E_1=-13{,}6\,eV \quad E_2=-13{,}6\,eV\cdot\frac{1}{2^2}=-3{,}4\,eV$$
$$E_3=-1{,}5\,eV \quad E_4=-0{,}85\,eV \quad E_5=-0{,}54\,eV$$

c) Sichtbar ist nur die Balmer-Serie (siehe Skript; Atome); die längsten Wellenlängen gehören zu den niedrigsten Energiedifferenzen; die dazugehörigen Anregungsenergien sind:

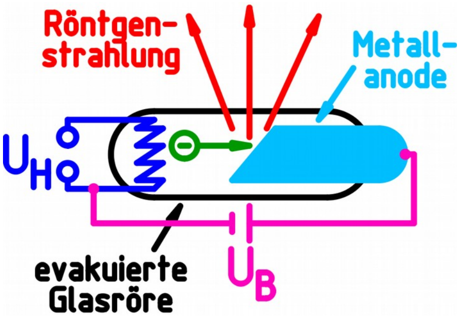
1,9 eV; 2,55 eV; 2,86 eV

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E}$$

$$\lambda_1 = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15} eVs \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{1{,}9 eV} = \underline{\underline{654\,nm}}$$

$$\underline{\underline{\lambda_2 = 487\,nm}} \quad ; \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 434\,nm}}$$

d) Siehe Bild



e) Abb.1:

Die Grenzfrequenz - gegeben durch Ub·e = h·fg - hat sich vergrößert und das charakteristische Spektrum hat seine Frequenzen nicht verändert -> d.h. die Beschleunigungsspannung ist vergrößert worden.

Abb.2:

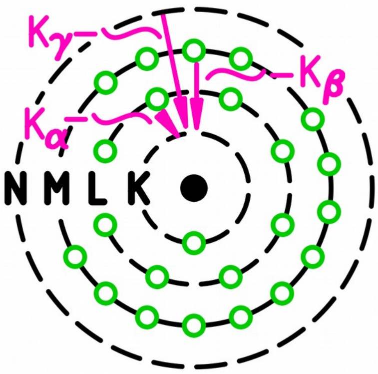
Die Grenzfrequenz hat sich nicht verändert aber die Frequenzen des charakteristischen Spektrums haben sich verändert -> das Anodenmaterial ist durch ein anderes ausgetauscht worden.

f)
$$\frac{1}{\lambda_\alpha} = \frac{3}{4} \cdot R_H \cdot (Z-1)^2 \rightarrow (Z-1)^2 = \frac{4}{3 \cdot \lambda_\alpha \cdot R_H}$$

$$Z = 1 + \sqrt{\frac{4}{3 \cdot \lambda_\alpha \cdot R_H}} = 1 + \sqrt{\frac{4}{3 \cdot 0{,}152 \cdot 10^{-9} m \cdot 1{,}097 \cdot 10^7\, 1/m}} = \underline{29{,}3 \approx 29}$$

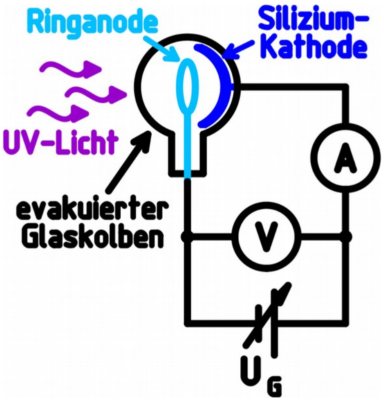
Es handelt sich also wahrscheinlich um Kupfer Cu.

g) Die Alpha-Teilchen treffen auf die Atome der Probe und schlagen auch Elektronen aus den inneren Schalen heraus, z.B. aus der K-Schale. Ein Elektron aus einer höheren Schale fällt dann auf die K-Schale zurück und gibt die freiwerdende Energie in Form eines Photons mit einer charakteristischen Wellenlänge ab.



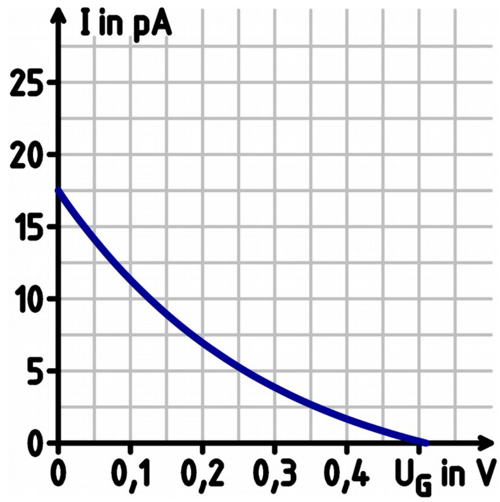
Aufgabe 5.98: Abi 2013; Der Fotoeffekt, technische Nutzung

a) Geben Sie zwei Beobachtungen beim Fotoeffekt an, die mit der klassischen Wellentheorie des Lichts nicht erklärbar sind.



In einem Versuchsaufbau, der in nebenstehender Abbildung dargestellt ist, werden durch die Bestrahlung der Silizium-Kathode einer Vakuum-Fotozelle mit UV-Licht der Wellenlänge 302 nm Elektronen freigesetzt.

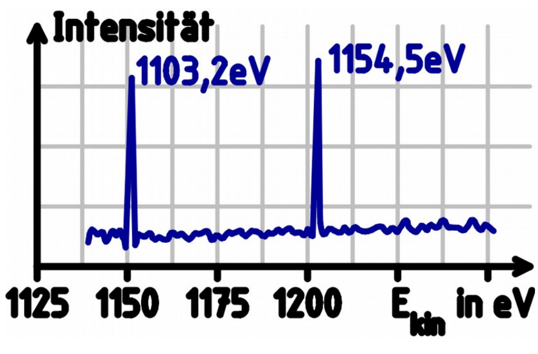
Das nebenstehende Diagramm zeigt den durch das UV-Licht verursachten Fotostrom I in Abhängigkeit von der angelegten Gegenspannung UG.



b) Berechnen Sie mit Hilfe des Diagramms rechts die Austrittsarbeit WA sowie die Grenzwellenlänge von Silizium. (Kontrolle: WA = 3,6 eV)

c) Ergänzen Sie im Diagramm oben einen möglichen Kurvenverlauf, wie er sich bei Erhöhung der Intensität des UV-Lichts ergeben könnte, und begründen Sie diesen.

Eine technische Nutzung des Fotoeffekts ist die Röntgen-Fotoelektronen-Spektroskopie. Wird Silizium mit Röntgenstrahlung der Energie 1,25 keV bestrahlt, so werden durch den Fotoeffekt auch stark gebundene Elektronen des 2s- und 2p-Zustands der Atomhülle ausgelöst. Die kinetische Energie dieser freigesetzten Elektronen besitzt zwei spezifische Werte, die im nebenstehenden Diagramm zu erkennen sind.



d) Geben Sie die Elektronenkonfiguration von Silizium an.

e) Berechnen Sie unter Verwendung des Diagramms die Energie, die zum Auslösen eines Elektrons aus dem 2s-Zustand von Silizium mindestens aufgebracht werden muss.

f) Erklären Sie, weshalb das Auslösen stark gebundener Elektronen auch die Emission elektromagnetischer Strahlung zur Folge hat.

Bei der Herstellung der Siliziumplatten für die Chipherstellung ist auf hohe Reinheit zu achten, da Fremdatome auf der Oberfläche die physikalischen Eigenschaften der Platten verändern.

g) Erklären Sie, wie sich die Röntgen-Fotoelektronen-Spektroskopie bei der Produktion der Siliziumplatten zur Qualitätskontrolle verwenden lässt.

Lösung:

a) Nur Licht ab einer materialabhängigen Grenzfrequenz und darüber kann Elektronen aus einer Oberfläche auslösen.

Sobald das geeignete Licht auf die Oberfläche trifft werden sofort, also ohne jede Zeitverzögerung, Elektronen ausgelöst.

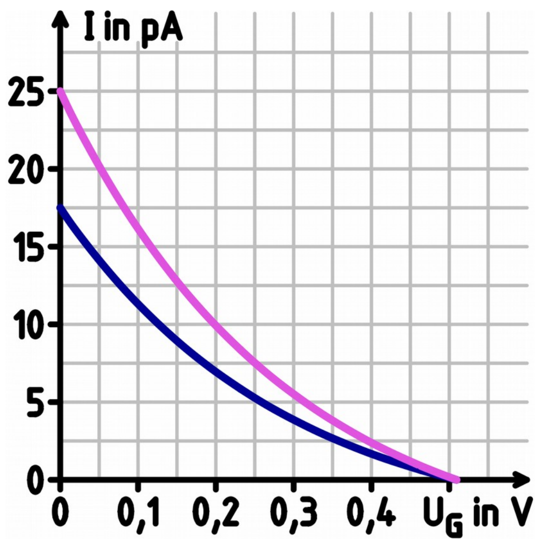
b) Bei einer Gegenspannung von ca. 0,51 V bricht der Fotostrom vollständig zusammen.

$$U \cdot e = h \cdot f - W_A$$

$$W_A = h \cdot f - U \cdot e = h \cdot \frac{c}{\lambda} - U \cdot e = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot \frac{3 \cdot 10^8\,m/s}{302 \cdot 10^{-9}\,m} - 0{,}51\,V \cdot e = \underline{\underline{3{,}6\,eV}}$$

$$W_A = h \cdot f_G = h \cdot \frac{c}{\lambda_G} \rightarrow \lambda_G = \frac{h \cdot c}{W_A} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs \cdot 3 \cdot 10^8\,m/s}{3{,}6\,eV} = \underline{\underline{345\,nm}}$$

c) höhere Intensität -> mehr Photonen -> mehr ausgelöste Elektronen -> höherer Photostrom



gleiche Wellenlänge -> gleiche Photonenenergie -> gleiche kinetische Energie der Fotoelektronen -> gleiche Grenzspannung bis zum Zusammenbrechen des Fotostroms

d) $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2\,3p^2 = [Ne]\,3s^2\,3p^2$

e) Zum 2s-Zustand gehört die größere Auslösearbeit, also die kleinere kinetische Energie der Fotoelektronen.

$$W_A = h \cdot f - E_{kin} = 1250\,eV - 1103{,}2\,eV = \underline{\underline{147\,eV}}$$

f) Wenn Elektronen aus einer inneren Schalt (K oder L) ausgelöst werden, dann fallen die Elektronen aus höheren Schalen auf die nun freien Plätze in den inneren Schalen zurück und emittieren dabei Energie in Form von Photonen -> Emission elektromagnetischer Strahlung

g) Atome anderer Elemente haben andere Bindungsenergien - auch in den inneren Schalen - und deshalb andere Auslösearbeiten für die Elektronen der inneren Schalen. Falls Fremdatome auf der untersuchten Oberfläche sind ergeben sich auch Fotoelektronen mit anderen kinetischen Energien die im Diagramm sichtbar sind. Falls also im Diagramm Fotoelektronen mit anderen Energien auftauchen, dann ist die untersuchte Oberfläche mit Fremdatomen verunreinigt.

6 Struktur der Materie

Die Idee, dass sich Materie aus Atomen zusammensetzt, ist recht alt, war aber lange Zeit nicht allgemein anerkannt. Erst um 1900 (ungefähr zeitgleich mit der Relativitätstheorie) konnte sich die Vorstellung von Atomen in der Physik vollständig durchsetzen. In den folgenden Jahrzehnten stieß die Forschung in immer kleiner werdende Strukturen vor.

6.1 Streuexperimente

Erkenntnisse über den Aufbau und das Verhalten von Mikroteilchen gewinnt man dadurch, dass man die Teilchen mit bereits bekannten Teilchen beschießt. Aus der Analyse des Verhaltens der Teilchen beim Stoß gewinnt man Informationen

- ➔ über Eigenschaften und innere Struktur der Mikroteilchen, über
- ➔ die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen und über
- ➔ die Existenz von Teilchen, die bei solchen Stoßprozessen entstehen.

Da viele interessante Reaktionen nur mit Teilchen sehr hoher Energien stattfinden und ehemals hypothetische Teilchen, die man im Experiment erzeugen wollte, sehr hohe Ruhemassen besitzen wurden immer größere Teilchenbeschleuniger benötigt, die Teilchen auf die entsprechend hohen Energien beschleunigen können. Vor der Existenz leistungsfähiger Teilchenbeschleuniger (ab ca. 1950) war die einzige Quelle für Teilchen mit so hohen Energien die kosmische Strahlung, die allerdings von der Atmosphäre absorbiert wird und mit der sich deshalb am besten in großer Höhe im Gebirge experimentieren lässt. Bei Strukturuntersuchungen stößt man auf ein ganz ähnliches Problem.

- ➔ Will man durch Streuexperimente die innere Struktur von Mikroteilchen aufklären, dann muss die Wellenlänge der Strahlung ,mit Hilfe derer man untersucht, kleiner als die zu untersuchende Struktur sein.

Nach De Broglie ($p = h/\lambda$) muss eine Teilchenstrahlung mit sehr kleiner Wellenlänge einen sehr hohen Impuls besitzen. Dafür muss das Teilchen eine große Masse oder eine sehr hohe Geschwindigkeit also auch eine sehr hohe kinetische Energie haben.

Aufgabe 6.99: Strukturuntersuchung

Atomkerne haben eine Größe im Bereich von ca. 0,01pm.

a) Berechne die De-Broglie-Wellenlänge von Elektronen mit einer kinetischen Energie von 40keV und begründe, dass sich diese Elektronenstrahlung nicht zur Untersuchung der Struktur von Atomkernen eignet.

b) Wie groß müsste die kinetische Energie von Elektronen sein, um damit sinnvoll die innere Struktur von Atomen untersuchen zu können und den Atomkern zu finden?

c) Wie groß müsste die kinetische Energie von Elektronen sein, um damit die innere Struktur von Protonen untersuchen zu können und die Quarks (ca. $10^{-18}m$) finden zu können?

d) Zeige, dass Alphateilchen mit einer kinetischen Energie von 0,4GeV (Rutherford) sich gut zur Untersuchung der Struktur von Atomkernen eignen.

Lösung:

a) $E^2 = c^2 \cdot p^2 + E_0^2 = c^2 \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} + E_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{c^2 \cdot h^2}{E^2 - E_0^2}$

$$\lambda = \sqrt{\frac{(3 \cdot 10^8 m/s \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s)^2}{(511 \cdot 10^3 eV + 40 \cdot 10^3 eV)^2 - (511 \cdot 10^3 eV)^2}} = \underline{\underline{6{,}03 \cdot 10^{-12} m}}$$

Größe des Atomkerns: $0{,}01\, pm = 10^{-14} m$

Die Wellenlänge müsste zum Auffinden der inneren Struktur eines Atoms (finden des Atomkerns) kleiner als 0,01pm sein. Sie ist aber fast 20 mal so groß, also viel zu groß.

b) $E^2 = c^2 \cdot p^2 + E_0^2 = c^2 \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} + E_0^2 = \left(3 \cdot 10^8 m/s \cdot \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s}{10^{-14} m}\right)^2 + (511 \cdot 10^3 eV)^2$

$$E^2 = 1{,}54 \cdot 10^{16} (eV)^2 \quad \Rightarrow \quad E = 124{,}2\, MeV$$

$$E_{kin} = E - E_0 = 124{,}2\, MeV - 511\, keV = \underline{\underline{124\, MeV}}$$

c) $E^2 = c^2 \cdot p^2 + E_0^2 = c^2 \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} + E_0^2 = \left(3 \cdot 10^8 m/s \cdot \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s}{10^{-15} m}\right)^2 + (511 \cdot 10^3 eV)^2$

$$E^2 = 1{,}54 \cdot 10^{18} (eV)^2 \quad \Rightarrow \quad E = 1{,}24\, GeV$$

$$E_{kin} = E - E_0 = 1{,}24\,GeV - 511\,keV = \underline{\underline{1{,}24\,GeV}}$$

d) $$E^2 = c^2 \cdot p^2 + E_0^2 = c^2 \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} + E_0^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{c^2 \cdot h^2}{E^2 - E_0^2}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\left(3 \cdot 10^8\,m/s \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eV \cdot s\right)^2}{\left(0{,}4 \cdot 10^9\,eV + 3{,}7 \cdot 10^9\,eV\right)^2 - \left(3{,}7 \cdot 10^9\,eV\right)^2}} = \underline{\underline{7{,}03 \cdot 10^{-16}\,m}}$$

Die Wellenlänge ist also deutlich kleiner als die Größenordnung der Atomkerne und eignet sich deshalb gut zur Untersuchung.

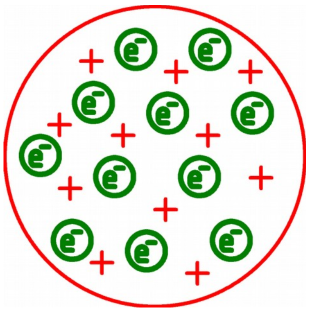
6.2 Streuversuch von Rutherford (1913)

Historische Situation:

Atomismus hat sich durchgesetzt; Elektron bekannt (negative Ladung, kleine Masse) und als Bestandteil von Atomen identifiziert; Proton nur als spezielle Strahlung bekannt (nicht als Bestandteil von Atomen identifiziert); vom Neutron weiß man noch gar nichts; Alphateilchen als sehr schwere (ca. 8000 mal so schwer wie ein Elektron) positiv geladene Teilchen bekannt, außerdem weiß man, dass die Alphateilchen sehr klein sind und deshalb sehr viel massiver gebaut sind, als ein Atom.

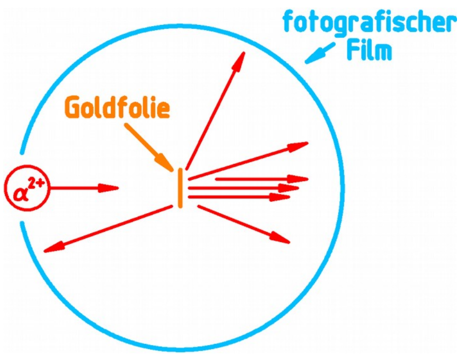
Aufgabe 6.100: Rosinenkuchen

Um 1903 wurde von Thomson das sogenannte Rosinenkuchenmodell für den Aufbau von Atomen vorgeschlagen. Die leichten, negativ geladenen Elektronen schwimmen dabei gleichmäßig verteilt in einem positiv geladenen Teig, so dass das ganze Atom elektrisch neutral ist.



a) Erkläre, weshalb diese Vorstellung auf den ersten Blick sehr viel plausibler ist, als unsere heutige Vorstellung mit einem kleinen Kern in der Mitte, in dem die gesamte positive Ladung vereinigt ist.

b) Das Rosinenkuchenmodell ist einem anderen Modell, das wir heute noch benutzen sehr ähnlich. Welchem?



Der Versuch

Rutherford beschießt eine sehr dünne Goldfolie (ca. 1000 Atomschichten) mit Alphateilchen. Um die Goldfolie herum ist ein Film angebracht, so dass man die Richtung in welche die Alphateilchen gestreut werden ablesen kann. Ganze Anordnung befindet sich in einem Vakuum.

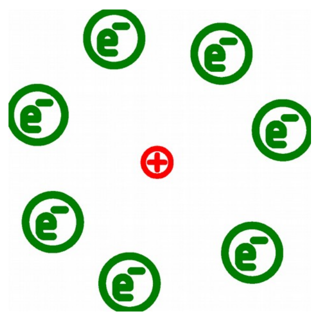
Ergebnisse

1) Die allermeisten Alphateilchen durchdringen die Goldfolie ohne Ablenkung.

2) Wenige Alphateilchen werden leicht, noch weniger stark abgelenkt.

3) Ganz wenige Alphateilchen werden sogar von der Goldfolie reflektiert.

Folgerungen

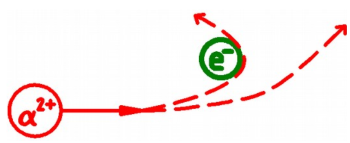


1) Der Großteil des Atom-Volumens muss so gut wie leer sein, kann also keine erhebliche Masse enthalten.

2) Im Atom befindet sich ein sehr kleines Ding, welches den Großteil der Masse des Atoms enthält.

Dies führt zum Rutherfordschen Atommodell mit einem massiven, sehr kleinen, positiv geladenen Kern in der Mitte und einer Hülle aus leichten, negativ geladenen Elektronen außen herum.

Aufgabe 6.101: Streuversuch von Rutherford



a) Weshalb können die Alphateilchen nicht an einem freien Elektron gestreut worden sein. Das negativ geladene Elektron kann ja auch eine Kraft auf die Alphateilchen ausüben.

b) Wie folgt aus den Versuchsergebnissen, dass der Großteil des Atoms keine erhebliche Masse enthält?

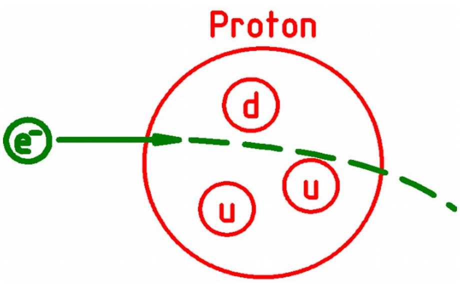
c) Wie folgt aus den Versuchsergebnissen, dass der massive Kern sehr klein sein muss?

Das der Kern tatsächlich positiv geladen sein muss folgt erst, wenn man die Versuchsergebnisse mathematisch analysiert, und mit der Coulomb-Kraft vergleicht.

6.3 Standardmodell: Teilchen

In der Zeit nach dem Rutherfordschen Streuversuch wurden die Bausteine der Atomkerne (Nukleonen) gefunden. Das positiv geladene, schwere Proton 1919 und das elektrisch neutrale, fast gleich schwere Neutron um 1930.

In den 1960er Jahren wurden Streuversuche mit hochenergetischen Elektronen an Protonen durchgeführt. Die Ergebnisse bestätigten die bereits bestehende Vermutung, dass die Nukleonen eine innere Struktur besitzen, also keine Elementarteilchen sind. Sie sind aus Quarks aufgebaut. Als Elementarteilchen gelten heute die Quarks, die Leptonen und die Wechselwirkungsteilchen (Austauschteilchen).



Quarks

Die Quarks sind die schweren Elementarteilchen. Die Masse der Teilchen nimmt von Generation zu Generation stark zu.

	1. Generation		2. Generation		3. Generation	
Symbol	u	d	c	s	t	b
Name	up	down	charm	strange	top	bottom
Ladung	$+\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$+\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$	$+\frac{2}{3}e$	$-\frac{1}{3}e$

Leptonen

Die Leptonen sind die leichten Elementarteilchen. Die Masse der Neutrinos ist so klein, dass man lange Zeit dachte sie hätten vielleicht gar keine Masse. Auch hier nimmt die Masse von Generation zu Generation stark zu.

	1. Generation		2. Generation		3. Generation	
Symbol	e^-	ν_e	μ^-	ν_μ	τ^-	ν_τ
Name	Elektron	Elektron-Neutrino	Myon	Myon-Neutrino	Tauon	Tauon-Neutrino
Ladung	$-1\,e$	0	$-1\,e$	0	$-1\,e$	0

➔ Die Masse der Elementarteilchen nimmt von Generation zu Generation bei beiden Teilchengruppen stark zu.

➔ Die Teilchen der 2. und 3. Generation sind alle nicht stabil. Sie zerfallen schrittweise in Teilchen der 1. Generation. Die uns umgebende Materie besteht also nur aus Teilchen der 1. Generation.

Teilchen der 2. Generation entstehen zum Beispiel durch die kosmische Strahlung in der oberen Atmosphäre und gelangen auch bis zum Erdboden (z.B. Myonen).

➔ Zu jedem Teilchen gibt es ein Antiteilchen mit der selben Masse, also auch derselben Ruheenergie, aber entgegengesetzter Ladung.

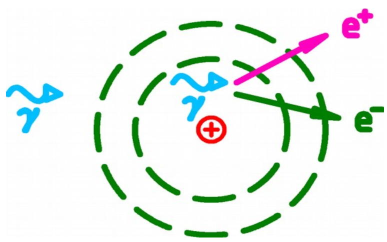
Für das Antiteilchen schreibt man einfach Quer ($\bar{u}$; $\bar{d}$; $\bar{\nu}_e$) und sagt Anti-.... (Anti-Elektron-Neutrino). Für die Antiteilchen der geladenen Leptonen schreibt man allerdings e^+ ; μ^+ und τ^+ und das Antiteilchen vom Elektron heißt Positron.

➔ Trifft ein Teilchen sein Antiteilchen, dann vernichten sie sich gegenseitig (Paarvernichtung, Anihilation) und zerstrahlen zu Energie (EM-Strahlung).

Man kann auch Teilchen-Antiteilchen-Paare aus EM-Strahlung erzeugen, wenn ein Photon genügend Energie für die Ruheenergien der beiden Teilchen besitzt. Es gibt jedoch auch Prozesse bei denen ein Teilchen ohne sein Antiteilchen entsteht (Beta-Zerfall).

Aufgabe 6.102:

Im Coulomb-Feld eines Atoms kann ein Gamma-Quant ein Elektron-Positron-Paar erzeugen und dabei vernichtet werden. Berechne die Wellenlänge, die ein Gamma-Quant haben muss, damit ein solcher Prozess energetisch möglich ist.



Lösung:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{h \cdot c}{2 \cdot E_0}$$;mit E_0 der Ruheenergie des Elektrons

$$\lambda = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{2 \cdot 511 \cdot 10^3 eV} = \underline{1{,}21 \cdot 10^{-12} m}$$

Die Wellenlänge darf also höchstens 1,2pm betragen.

➔ Quarks kommen niemals alleine vor, sondern bilden immer Teilchen aus zwei oder drei Quarks. Solche Teilchen, die aus Quarks bestehen nennt man

Hadronen

➔ Baryonen bestehen aus drei Quarks.

Neutron: udd;	Proton: uud

➔ Mesonen bestehen aus zwei Quarks, jeweils einem Quark und einem Anti-Quark, es müssen aber nicht die zusammengehörigen Quarks sein.

Beispiele für Mesonen wären das Pi-Meson $\pi^+ : \bar{d}\,u$ oder das K-Meson $K^0 : \bar{s}\,d$.

Größenordnungen: Auswendig

Atom	Atomkern	Proton	Quark
$10^{-10}\,m$	$10^{-14}\,m$	$10^{-15}\,m$	$10^{-18}\,m$

6.4 Standardmodell: Wechselwirkungen

Es gibt die vier grundlegenden Wechselwirkungen Gravitation, elektromagnetische Wechselwirkung, starke Kraft (starke Wechselwirkung) und schwache Kraft (schwache Wechselwirkung). Wechselwirkungen werden durch den Austausch von Teilchen beschrieben. Die Austauschteilchen gehören auch zu den Elementarteilchen.

Je schwerer die Austauschteilchen, desto kürzer ist die Reichweite der Kraft.

	notwendige Eigenschaft	wirkt auf	Austausch-Teilchen	Reichweite
Gravitation	Masse	alle Teilchen	?	unendlich
EM-Wechselw.	elektr. Ladung	geladene Teilchen; nicht auf Neutrinos	"virtuelle" Photonen	unendlich
starke WW	Farbladung	Quarks	Gluonen (schwer)	Protonendurch-messer
schwache WW	Flavor	alle Teilchen	Vektorbosonen (W- und Z-) (sehr schwer)	mehrere Quark-durchmesser

Alle Wechselwirkungen können Energie und Impuls übertragen. Die schwache Wechselwirkung hat jedoch eine Sonderstellung.

➔ Durch schwache Wechselwirkung können Teilchen umgewandelt werden.

Das klassische Beispiel ist der Betazerfall. Außerdem kann die schwache Wechselwirkung keine gebundenen Zustände erzeugen, so wie das alle anderen drei Wechselwirkungen können. Durch Gravitation werden Planetensysteme und Galaxien zusammengehalten. Durch EM-Wechselwirkung wird die Elektronenhülle am Atom festgehalten. Die starke Wechselwirkung hält die Quarks im Proton zusammen und sie hält auch die Protonen und Neutronen im Atomkern zusammen.

Farbladung

Von der Farbladung (starke Wechselwirkung) gibt es die drei Sorten Rot, Grün und Blau und die dazugehörigen Anti-Farben Anti-Rot, Anti-Grün und Anti-Blau. Jedes Hadron muss nach außen hin weiß sein. Die Baryonen enthalten alle die Farben Rot, Grün und Blau, die Mesonen enthalten jeweils eine Farbe und die dazugehörige Antifarbe. Z.B. Rot und Anti-Rot.

Restwechselwirkung, Kernkraft

Da die Protonen und Neutronen im Atomkern alle weiß sind, ist die starke Kraft zwischen den Nukleonen viel schwächer als zwischen den drei Quarks in einem Proton oder Neutron. Die Nukleonen sehen gewissermaßen nur einen Farbüberschuss der direkt benachbarten Quarks. Es kommt die so genannte Restwechselwirkung zustande, die den Atomkern zusammenhält, aber nur zwischen direkt benachbarten Nukleonen wirkt.

6.5 Erhaltungssätze

Ob bestimmte Reaktionen möglich oder unmöglich sind, oder ob vielleicht ein Reaktionsprodukt übersehen wurde, lässt sich anhand der Erhaltungssätze überprüfen. Dabei dürfen Impuls- und Ebnergieerhaltung nicht übersehen werden.

Energieerhaltung

Zur Überprüfung der Energieerhaltung benutzt man in erster Linie die Ruheenergieen der beteiligten Teilchen. Kinetische Energien oder Photonenenergien werden auf der richtigen Seite (vorher oder nachher) addiert.

Impulserhaltung

Da der Impuls ein Vorzeichen hat, müssen die Bewegungsrichtungen berücksichtigt werden.

Ladungserhaltung

Bei jeder Reaktion (Wechselwirkung) muss die elektrische Ladung vorher und nachher gleich groß sein.

Leptonenzahlerhaltung

Alle Leptonen haben die Leptonenzahl 1, die Antileptonen haben die Leptonenzahl -1, alle anderen Teilchen haben die Leptonenzahl Null. Bei jeder Reaktion muss die Leptonenzahl vorher und nachher gleich groß sein. D.h. wenn ein Lepton entsteht, muss zusätzlich auch ein Anti-Lepton entstehen.

Alle Quarks haben die Baryonenzahl $\frac{1}{3}$, alle Anti-Quarks die Baryonenzahl $-\frac{1}{3}$, alle anderen Teilchen haben die Baryonenzahl Null. Eine Baryonenzahlerhaltung gibt es wahrscheinlich nicht, allerdings ist noch kein Prozess beobachtet worden, der die Baryonenzahl verändert. Wir können also nicht mit der Baryonenzahl argumentieren, aber beim Ausgleichen von Reaktionsgleichungen darauf achten, dass sich die Baryonenzahl nicht verändert.

Aufgabe 6.103: Abitur ????

Ein Elektron und ein Positron, beide in Ruhe, vernichten sich gegenseitig.

a) Weshalb ist es unmöglich, dass die beiden Teilchen in ein einziges Gamma-Quant zerfallen?

Im Folgenden gehen wir davon aus, dass zwei Gamma-Quanten entstehen.

b) Machen Sie begründete Aussagen über die Richtungen und die Wellenlängen der beiden Gammaquanten.

c) Berechnen Sie die Wellenlänge der beiden Gamma-Quanten.

Lösung:

c) $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E}$ mit der Ruheenergie eines Elektrons.

$$\lambda = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15} eV \cdot s \cdot 3 \cdot 10^{8} m/s}{511 \cdot 10^{3} eV} = \underline{\underline{2{,}4 \cdot 10^{-12} m}}$$

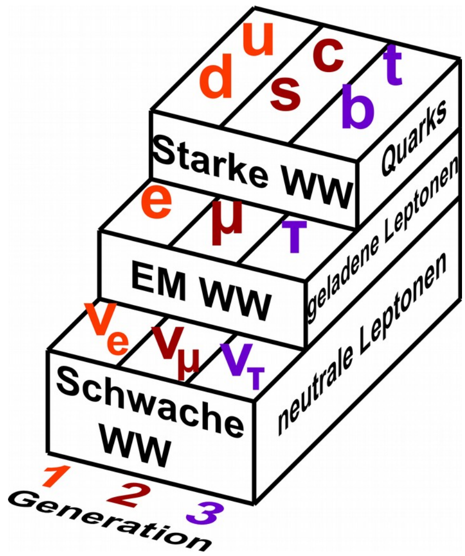
Aufgabe 6.104:

Ein Schüler schreibt folgende Reaktionsgleichung für den Beta-Zerfall von Tritium auf: ${}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He^{+} + e^{-}$

a) Weshalb ist das entstandene Helium positiv geladen?

b) Begründen Sie dass in der Reaktionsgleichung ein Teilchen fehlt. Von welcher Sorte muss das fehlende Teilchen sein wenn es rechts steht (wenn es links steht)?

Aufgabe 6.105:



Als Merkhilfe und zur Veranschaulichung von Elementarteilchen und Wechselwirkungen wird gern das Bild rechts benutzt.

a) Erklären Sie was die Anordnung der drei Wechselwirkungen in Form von Stufen bedeutet.

b) Wo im Bild sind die stabilen, wo die instabilen Teilchen?

c) Welche Elementarteilchen sind nicht im Bild enthalten?

d) Welche der Teilchen können Vektorbosonen, welche können Photonen und welche können Gluonen austauschen?

e) Welche der Teilchen im Bild kommen als einzelne Teilchen vor, welche nicht?

Aufgabe 6.106: Positronium-Atom , Abi 2014 (Ausschnitt)

Ein Positronium-Atom - bestehend aus einem Elektron und einem Positron - besitzt eine sehr kurze Lebensdauer. Von den nachfolgenden vier Zerfallsgleichungen beschreibt nur eine den Zerfall eines ruhenden Positronium-Atoms. Identifizieren Sie diese, indem Sie drei Zerfallsgleichungen argumentativ ausschließen.

i) $e^{+} + e^{-} \rightarrow 2n$

ii) $e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\gamma$

iii) $e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\mu^{-}$

iv) $e^{+} + e^{-} \rightarrow \gamma$

Aufgabe 6.107:

Alle genannten Reaktionen sind unmöglich. Gib jeweils einen Grund (wenn möglich mehrere) an, weshalb die Reaktion unmöglich ist. Dabei gehen wir davon aus, dass die Reaktionsedukte zu Anfang in Ruhe sind.

a) $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e$

b) $\mu^- \rightarrow \tau^- + \overline{\nu}_\tau + \nu_\mu$

c) $uud + \overline{u}\overline{u}\overline{d} \rightarrow \gamma$

d) $uud + \overline{u}\overline{u}\overline{d} \rightarrow 2\ udd$

e) $\tau^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu + e^-$

f) $\mu^+ + \mu^- \rightarrow uud + udd$

g) $\mu^+ + \mu^- \rightarrow e^-$

h) $p^+ \rightarrow n^0 + e^+ + \overline{\nu}_e$

i) $\tau^- + \tau^+ \rightarrow \mu^-$

k) $\nu_e + p^+ \rightarrow n^0 + e^+$

Aufgabe 6.108:

Überprüfe bei den gegebenen Reaktionsgleichungen Ladung q, Leptonenzahl L und Baryonenzahl B jeweils der gesamten linken und rechten Seiten der Reaktionsgleichung.

☠ Beachte jedoch, dass es keinen Baryonenzahl-Erhaltungssatz gibt!

Sie finden hier Beispiele für Zerfallsgleichungen von Teilchen der 2. und 3. Generation bzw. von aus solchen zusammengesetzten Teilchen. Was mit den Neutrinos der 2. und 3. Generation passiert weiß ich nicht.

a) $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$

q: ....

L: ....

B: ....

b) $\tau^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau$

q: ....

L: ....

B: ....

c) $\tau^- \rightarrow 2\overline{u}d + \overline{d}u + \nu_\tau$

q: ....

L: ....

B: ....

d) $uds \rightarrow uud + \overline{u}d$

q: ....

L: ....

B: ....

e) $\overline{u}d \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$

q: ....

L: ....

B: ....

f) $uud + \overline{u}d \rightarrow uds + \overline{s}d$

q: ....

L: ....

B: ....

Aufgabe 6.109: G8 Abi 2011; Antimaterie

Zur Herstellung von Antiprotonen werden Protonen aus einem Teilchenbeschleuniger mit hoher Energie auf ein Target (z.B. Kupfer) geschossen. Dabei entstehen durch Kernreaktionen Proton-Antiproton-Paare. Protonen und Antiprotonen unterscheiden sich im Vorzeichen ihrer Ladungen, besitzen aber gleich Massen.

a) Stellen Sie unter Verwendung des Standardmodells der Elementarteilchen den Aufbau von Protonen und Antiprotonen dar. Gehen Sie dabei auch auf die Ladungen ein.

b) Berechnen Sie die relativistische Masse eines Antiprotons mit der kinetischen Energie 7,5 GeV. Drücken Sie das Ergebnis als Vielfaches der Ruhemasse des Antiprotons aus.

c) Bei einem Proton-Antiproton-Paar kann eine so genannte Paarvernichtung stattfinden, d.h. die Masse beider Teilchen wird vollständig in Energie umgewandelt, die in Form von γ-Quanten abgestrahlt wird. Betrachten Sie den Spezialfall, dass die beiden Teilchen vor der Zerstrahlung ruhen und zeigen Sie hierfür mit Hilfe einer Impulsbetrachtung, dass ein Zerstrahlen in ein einziges γ-Quant nicht möglich ist.

Lösung:

a) Proton: $p^+ = uud$; Ladungen: $q_u = +\frac{2}{3}e$; $q_d = -\frac{1}{3}e$ $\Rightarrow$ $q_p = +1\,e$

Antiproton: $\overline{p^+} = \overline{u}\,\overline{u}\,\overline{d}$; Ladungen $q_{\overline{u}} = -\frac{2}{3}e$; $q_{\overline{d}} = +\frac{1}{3}e$ $\Rightarrow$ $q_{\overline{p}} = -1\,e$

b) $E = E_0 + E_{kin} = 0{,}938\,GeV + 7{,}5\,GeV = 8{,}44\,GeV = 9{,}0 \cdot E_0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{m = 9{,}0 \cdot m_0}}$

c) "... vorher in Ruhe ..." bedeutet, dass der Impuls zu Anfang gleich Null ist, deshalb muss der Gesamtimpuls am Ende auch gleich Null sein. Ein einziges γ-Quant besitzt aber wegen p = h/λ einen von Null verschiedenen Impuls, deshalb ist das Zerstrahlen in ein einziges γ-Quant nicht möglich.

7 Atomkerne

7.1 Bezeichnungen

Atomkerne bestehen aus Nukleonen (Kernbauteilchen), nämlich aus Protonen (uud) und Neutronen (udd).

Kernladungszahl Z: Die Anzahl der Protonen im Kern. Sie legt fest, um welches chemische Element es sich handelt und wird deshalb auch Ordnungszahl genannt. Ein vollständiges Atom besitzt genau soviel Elektronen in der Hülle, wie Protonen im Kern, und ist damit elektrisch neutral.

Massenzahl A: Die Anzahl der Nukleonen insgesamt, also Protonen und Neutronen zusammen.

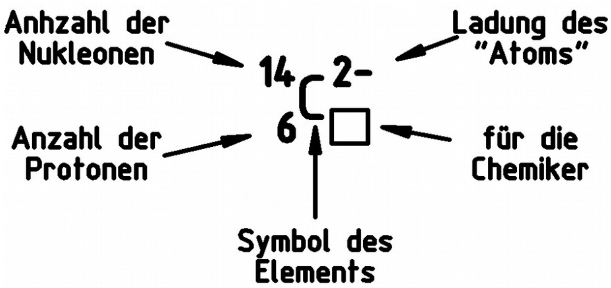
Neutronenzahl N: Die Anzahl der Neutronen im Kern.

Damit gilt: $A = Z + N$

Nuklid: Ein bestimmter Atomkern mit bestimmtem Z und A. Die bekannten Nuklide mit ihren Eigenschaften werden in einer Nuklidkarte (siehe Buch ganz hinten) dargestellt.

Isotope: Die verschiedenen Atome eines Elements haben gleiche Kernladungszahl, können aber verschiedene Neutronenzahl haben. Man nennt sie die verschiedenen Isotope eines Elements.

<u>Bezeichnung von Atomen:</u>



Im Bild ist ein zweifach negativ geladenes Kohlenstoffatom mit 8 Neutronen dargestellt. Das Atom hat also zwei Elektronen zu viel, ist also kein Atom sondern ein Ion. Der Platz rechts unten ist für die Chemiker zur Beschreibung von Molekülen reserviert. Die Angabe der Kernladungszahl ist wegen der Elementbezeichnung eigentlich überflüssig, man schreibt deshalb (für ungeladene Atome) oft einfach "C14" oder "U235", wobei die Zahl die Massenzahl des Isotops angibt.

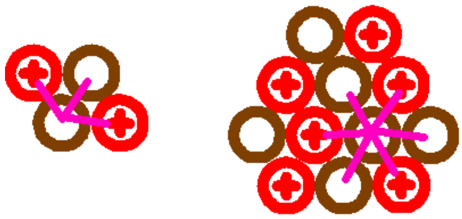
Als Bezeichnung für Proton, Neutron und Elektron ergibt sich damit

$$ {}^{1}_{1}p^{+} \;;\quad {}^{1}_{0}n \;;\quad {}^{0}_{-1}e^{-} $$

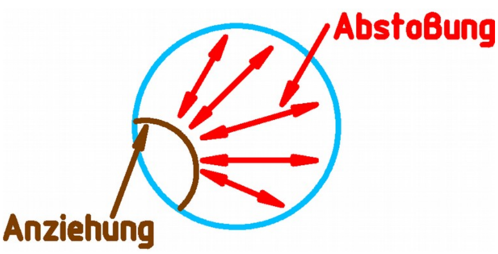
7.2 Kernkraft

Die Kraft mit der sich Nukleonen gegenseitig anziehen wird Kernkraft genannt. Sie ist ein Rest der starken Wechselwirkung zwischen den Quarks, und macht keinen Unterschied zwischen Neutronen und Protonen.

- ➔ Die Kernkraft ist wesentlich stärker als die Coulomb-Abstoßung zwischen zwei Protonen.
- ➔ Die Kernkraft hat nur eine geringe Reichweite ($10^{-15} m$) und wirkt nur zwischen benachbarten Nukleonen.
- ➔ Im Gegensatz dazu wirkt die Coulomb-Abstoßung zwischen den Protonen über beliebige Entfernungen und versucht den Kern auseinander zu treiben.



Bei zunehmender Anzahl von Nukleonen im Kern bekommt das einzelne Nukleon immer mehr direkte Nachbarn, wird also von mehr Nukleonen angezogen und deshalb stärker festgehalten. D.h. die Bindungsenergie eines Nukleons (die Energie, die man aufwenden müsste, um das Nukleon aus dem Kern zu entfernen) wird größer.



Bei immer größer werdenden Kernen nimmt die Anzahl der direkten Nachbarn eines Nukleons - also auch die anziehende Kraft auf ein Nukleon - nicht mehr zu, aber die gegenseitige Abstoßung der Protonen nimmt zu, weil es immer mehr Protonen gibt. Deshalb wird das einzelne Nukleon jetzt nicht mehr so stark festgehalten, und die Bindungsenergie des einzelnen Nukleons wird wieder kleiner. Schließlich ist die gegenseitige Abstoßung der Protonen so groß, dass der Kern nicht mehr stabil ist und auseinanderbricht.

Sehr große Kerne haben deshalb prozentual mehr Neutronen als kleine Kerne, weil dadurch der Abstand zwischen den Protonen vergrößert wird und so die gegenseitige Abstoßung zwischen den Protonen kleiner wird.

Ein Kern kann aber auch nicht beliebig viele Neutronen haben, weil ein einzelnes Neutron nicht stabil ist, also zerfällt. Die Neutronen im Kern brauchen die Protonen um stabilisiert zu werden.

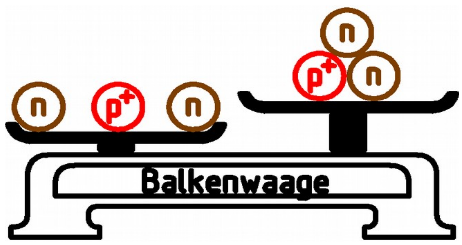
7.3 Bindungsenergie

Da in der Natur nackte Atomkerne so gut wie nie vorkommen behandeln wir in diesem Abschnitt vollständige Atome. Die Protonen und Neutronen im Kern halten sich gegenseitig fest. Elektronenhülle und Atomkern halten sich auch gegenseitig fest. Wenn man also ein Atom in seine Einzelteile zerlegen wollte (Protonen, Neutronen und Elektronen) müsste man Arbeit verrichten, also Energie aufwenden.

➔ Die Energie die man aufwenden müsste, um ein Atom in seine Bestandteile zu zerlegen, heißt Bindungsenergie des Atoms. Das ist genau dieselbe Energie die frei wird, wenn sich aus den einzelnen Teilchen das Atom bildet (was bei fast allen Atomen nur über viele Zwischenschritte geschieht).

Massendefekt

Wenn die Teilchen frei sind haben sie mehr Energie, als wenn sie in einem Atomkern gebunden sind. Wegen $E = m \cdot c^2$ haben sie auch mehr Masse. Den Unterschied Δm bezeichnet man als Massendefekt.



Der Effekt tritt nicht nur bei Kernreaktionen, sondern auch bei chemischen Reaktionen ein. Allerdings ist die umgesetzte Energie bei chemischen Reaktionen um das 100 000-fache kleiner als bei Kernreaktionen, weshalb die Veränderung der Masse nicht messbar ist.

Wir stellen uns vor, dass wir ein Atom mit Kernladungszahl Z und Neutronenzahl N in seine Bestandteile zerlegen. Der Unterschied zwischen Energie-Vorher und Energie-Nachher ist dann die Bindungsenergie. Die beiden Energien erhalten wir mit Hilfe von $E = m \cdot c^2$.

$$E_{vorher} = m_{Atom} \cdot c^2$$
$$E_{nachher} = Z \cdot m_P \cdot c^2 + N \cdot m_N \cdot c^2 + Z \cdot m_e \cdot c^2 = (Z \cdot m_P + N \cdot m_N + Z \cdot m_e) \cdot c^2$$

Bindungsenergie: $E_B = E_{nachher} - E_{vorher} = (Z \cdot m_P + N \cdot m_N + Z \cdot m_e) \cdot c^2 - m_{Atom} \cdot c^2$

$$\boxed{\begin{aligned} E_B &= (Z \cdot m_P + N \cdot m_N + Z \cdot m_e - m_{Atom}) \cdot c^2 = \\ &= \Delta m \cdot c^2 \\ &\text{mit dem Massendefekt } \Delta m \end{aligned}}$$

☠ Wenn Sie schlecht ausklammern brauchen Sie ewig zum eintippen!

Aufgabe 7.110: Massendefekt

a) Die Bindungsenergie eines C12-Atoms ist deutlich größer als die Bindungsenergie von 3 He4-Atomen. Begründe mit Hilfe des Massendefekts, was von beiden die größere Masse hat.

b) Auch bei einer chemischen Verbrennung wird Energie frei. Was hat die kleinere Masse, die Edukte oder die Produkte? Begründung! Weshalb ist der Unterschied der Massen hier nicht messbar?

Aufgabe 7.111:

a) Berechne die Bindungsenergie von He4, Kr84 und U238.

b) Berechne für die drei Atome jeweils die Bindungsenergie pro Nukleon.

c) Erkläre mit Hilfe der Wechselwirkungen im Kern, weshalb die Bindungsenergie pro Nukleon bei Kr84 größer ist als bei He4.

d) Erkläre mit Hilfe der Wechselwirkungen im Kern, weshalb die Bindungsenergie pro Nukleon bei Kr84 größer ist als bei U238.

Lösung:

a) He4:

$$E_B = (2 \cdot m_P + 2 \cdot m_N + 2 \cdot m_e - m_{He4}) \cdot c^2$$
$$E_B = (2 \cdot 1{,}007276 + 2 \cdot 1{,}008665 + 2 \cdot 5{,}4858 \cdot 10^{-4} - 4{,}002603) \cdot uc^2$$
$$\underline{\underline{E_B = 28{,}3\,MeV}}$$

Kr 84:

$$E_B = (36 \cdot m_P + 48 \cdot m_N + 36 \cdot m_e - m_{Kr84}) \cdot c^2$$
$$E_B = (36 \cdot 1{,}007276 + 48 \cdot 1{,}008665 + 36 \cdot 5{,}4858 \cdot 10^{-4} - 83{,}911507) \cdot uc^2$$
$$\underline{\underline{E_B = 732\,MeV}}$$

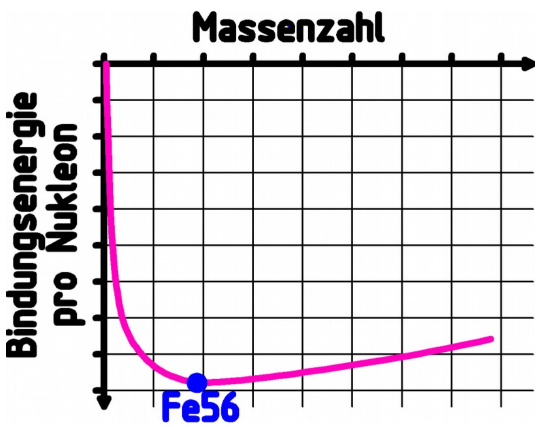
U238:

$$E_B = (92 \cdot m_P + 146 \cdot m_N + 92 \cdot m_e - m_{U238}) \cdot c^2$$
$$E_B = (92 \cdot 1{,}007276 + 146 \cdot 1{,}008665 + 92 \cdot 5{,}4858 \cdot 10^{-4} - 238{,}05078) \cdot uc^2$$
$$\underline{\underline{E_B = 1802\,MeV}}$$

b) Die Bindungsenergie durch die Anzahl der Nukleonen teilen gibt die Bindungsenergie pro Nukleon.

He4: $\frac{28{,}3\,MeV}{4} = \underline{\underline{7{,}08\,MeV}}$; Kr84: $\frac{732\,\text{MeV}}{84} = \underline{\underline{8{,}71\,MeV}}$; U238: $\frac{1802\,MeV}{238} = \underline{\underline{7{,}57\,MeV}}$

c) und d) klar



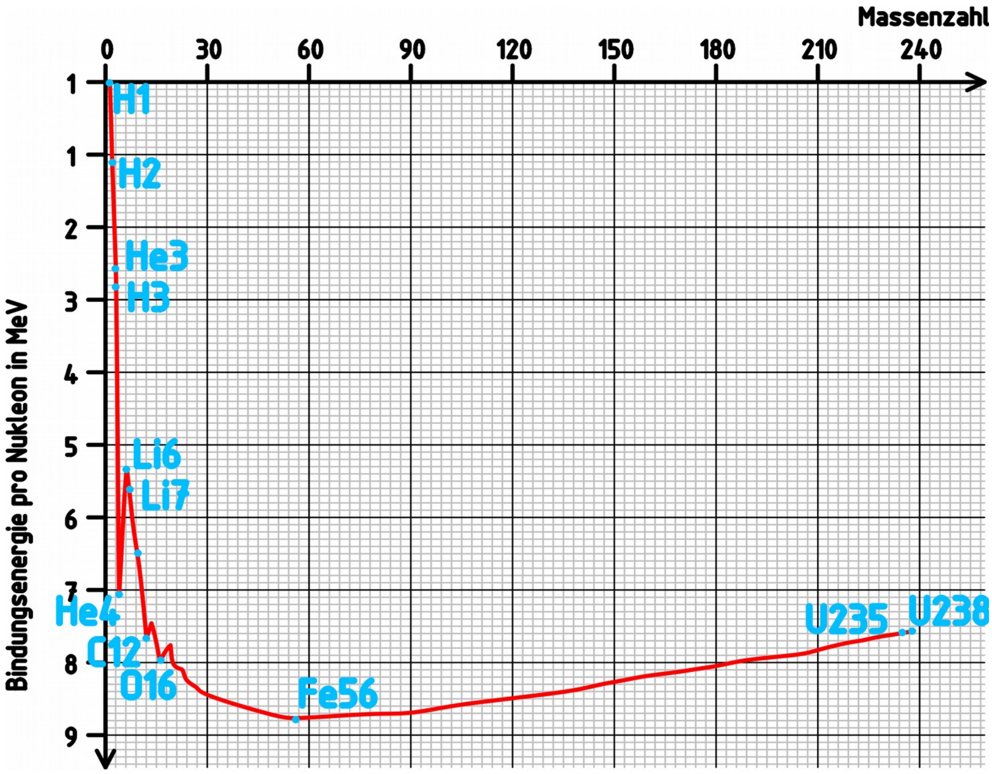
➔ Will man die Stabilität zweier Atome vergleichen, dann muss man die Bindungsenergie pro Nukleon vergleichen, und nicht die absolute Bindungsenergie.

In Diagrammen trägt man die Bindungsenergie oft (aber nicht immer) ins Negative auf. Das stabilste Nuklid ist Eisen Fe56. Nuklide mit sehr wenigen oder sehr vielen Nukleonen haben eine kleinere Bindungsenergie pro Nukleon.

<u>Aufgabe 7.112:</u>

Folgende Fragen sollen mit Hilfe des Diagramms rechts bearbeitet werden.

Das Bild zeigt allerdings die Bindungsenergie der Atomkerne, nicht der Atome. Deshalb bekommen wir jetzt andere Zahlen. Das soll uns aber für diese Aufgabe nicht stören.



a) Ein U238 Kern wird in zwei Kerne der Massenzahlen 150 und 88 gespalten. Bestimme die dabei freiwerdende Energie.

b) Zwei Kerne der Massenzahl 15 werden zu einem Kern der Massenzahl 30 fusioniert. Bestimme die dabei freiwerdende Energie.

c) Begründe mit Hilfe des Diagramms, weshalb die Energieausbeute pro Nukleon bei Kernfusionen tendenziell höher ist, als bei Kernspaltung.

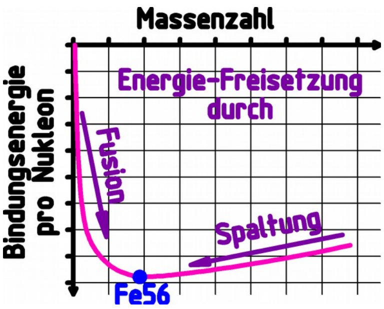
Lösung:

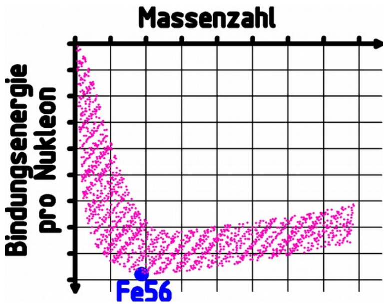
a) $\Delta\,E = 150\cdot 8{,}2\,MeV + 88\cdot 8{,}7\,MeV - 238\cdot 7{,}6\,MeV = \underline{\underline{187\,MeV}}$

b) $\Delta\,E = 30\cdot 8{,}5\,MeV - 2\cdot 15\cdot 7{,}7\,MeV = \underline{\underline{24\,MeV}}$

c) klar

Der Verlauf der Bindungsenergie pro Nukleon ermöglicht also zwei Möglichkeiten der Energiegewinnung, entweder Fusion oder Spaltung. Dabei muss sich aber immer alles in Richtung auf Fe56 hin bewegen.

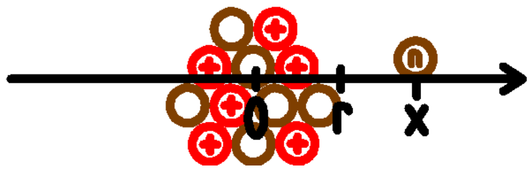




Ein ausführlicheres Bindungsenergie-Diagramm müsste etwas anders aussehen, als wir es bisher gezeichnet haben. Da es für jede Massenzahl mehrere, stabile Möglichkeiten für die Anzahl der Protonen und Neutronen gibt, gibt es für jede Massenzahl auch verschiedene mögliche Bindungsenergien (Bild links).

7.4 Potentialtopf-Modell des Kerns

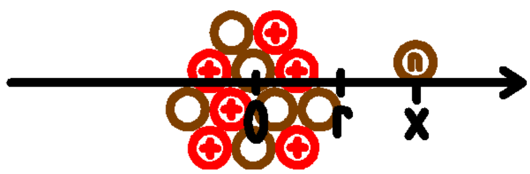
Potentielle Energie der Neutronen



Für die folgenden Überlegungen picken wir uns ein einzelnes Neutron des Atomkerns heraus und betrachten dieses einzelne Neutron im Feld des restlichen Atomkerns. Ziel ist, uns den prinzipiellen Verlauf der potentiellen Energie des Neutrons in Abhängigkeit von x zu überlegen.

Das Neutron wird niemals abgestoßen, sondern immer nur angezogen. Die anziehende Kraft ist jedoch bei Entfernung vom Kern schnell gleich Null. Sobald das Neutron am Rand des Kerns bei $x = r$ ist, wird die anziehende Kraft sehr groß, und sogar noch größer, wenn es in den Kern eindringt.

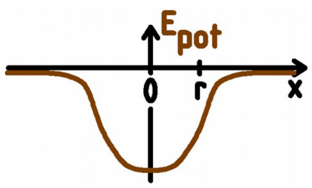
Aufgabe 7.113:



Nach der üblichen Konvention ist die potentielle Energie des Neutrons im Unendlichen gleich Null. Die geforderten Begründungen sollen mit Hilfe des Begriffs der Arbeit (und der Kraft) gegeben werden.

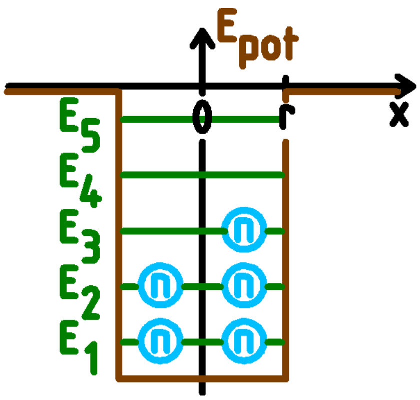
a) Begründe, dass die potentielle Energie des Neutrons schon in geringer Entfernung vom Kern genauso groß ist wie ganz weit weg (im Unendlichen). Wie groß?

b) Begründe, dass die potentielle Energie des Neutrons am Rand des Kerns (bei x = r) negativ ist, beim Eindringen in den Kern noch kleiner wird, und sich im Innern des Kerns - sobald das Neutron ringsum von Nukleonen umgeben ist - kaum mehr verändert.



Die Potentielle Energie des Neutrons hat also ungefähr den im Bild gezeigten Verlauf. Als Näherung benutzen wir eine Potentialtopf, dessen Breite ungefähr der Durchmesser des Atomkerns ist.

Für die Neutronen im Potentialtopf sind nur diskrete Energie-Werte möglich, wobei jeder Energie-Wert von zwei Neutronen besetzt werden kann, ein Neutron mit Spin up und eins mit Spin down.



Aufgabe 7.114:

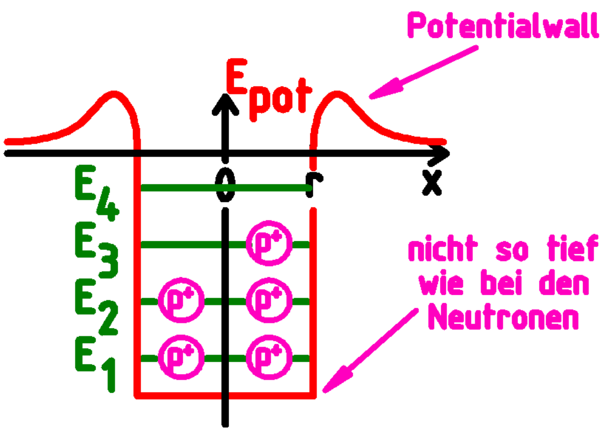
Zu jedem energetischen Zustand eines Neutrons im Atomkern gehört eine Wellenfunktion mit einer Wellenlänge λ. Begründen Sie damit und mit der de-Broglie-Beziehung, dass es keinen Zustand geben kann, in dem die Energie des Neutrons gleich der potentiellen Energie im Innern des Kerns ist (siehe Bild).

Potentielle Energie der Protonen

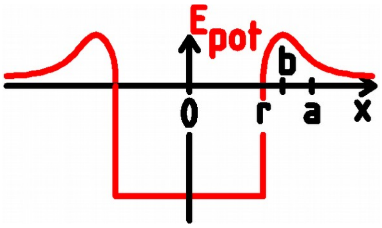
Für die Protonen im Kern erhalten wir ein ganz ähnliches Potential, nur mit zwei Unterschieden, die aus der Coulomb-Abstoßung der Protonen resultieren.

➔ Der Potentialtopf der Protonen ist nicht so tief wie der von den Neutronen.

➔ Am Rand befindet sich ein Potentialwall, in dem die potentielle Energie der Protonen positiv ist.



Aufgabe 7.115:



Im Unendlichen ist die potentielle Energie eines Protons gleich Null.

a) Begründe, weshalb bei x = a die potentielle Energie eines Protons positiv ist.

b) Begründe mit Hilfe des Diagramms, dass bei x = b die Kernkraft und die Coulomb-Abstoßung auf das Proton gleich groß sind.

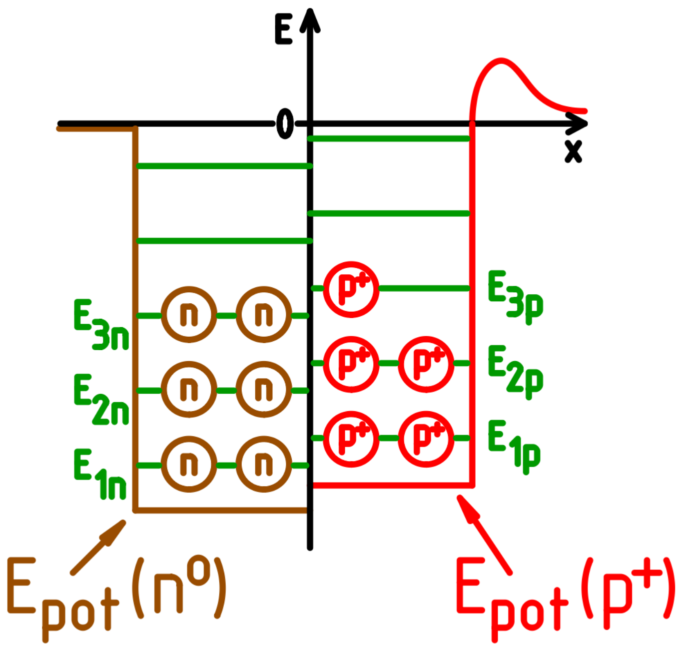
c) Das Diagramm sagt, dass es einem Proton schwer fällt von x = r nach x = b zu wechseln. Weshalb ist das so?

d) Das Diagramm sagt: Sobald ein Proton bei x = b ist gleitet es auf der Außenseite des Potentialwalls nach unten und hat das bestreben sich vom Kern zu entfernen. Weshalb ist das so?

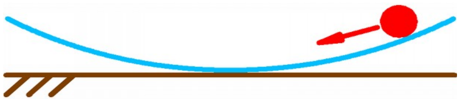
Potentialtopf des gesamten Kerns

Um den ganzen Kern darstellen zu können zeichnen wir in ein einziges Bild die linke Hälfte des Neutronen-Topfs und die rechte Hälfte des Protonen-Topfs. Dabei muss Ihnen bewusst sein, dass die Protonen nicht auf die linke Seite des so entstandenen Topfs wechseln können und die Neutronen nicht auf die rechte Seite.

Das Bild zeigt einen stabilen(siehe später) Atomkern mit unbesetzten Zuständen am oberen Rand des Potentialtopfes.



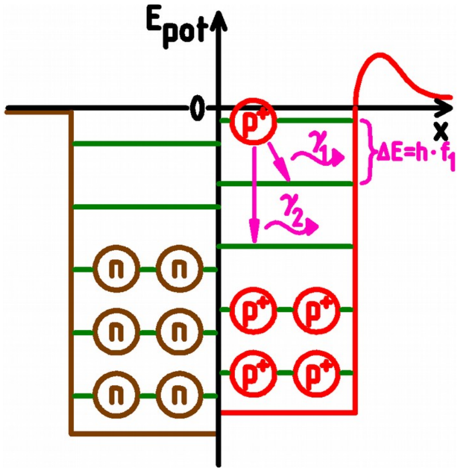
7.5 Instabilitäten im Atomkern



Jedes System versucht immer denjenigen Zustand mit minimaler Energie einzunehmen. Legt man eine Kugel in eine Schale, wird sie nach unten rollen, und schließlich am untersten Punkt der Schale zur Ruhe kommen. Deshalb fallen Atome, nachdem sie angeregt wurden wieder in den Grundzustand (den Zustand mit der niedrigsten Energie) zurück.

Gamma-Strahlung; Angeregte Zustände

Das Bild rechts zeigt einen Atomkern in einem angeregten Zustand. Genauer ist es ein Proton (es könnte natürlich genauso gut ein Neutron sein) das sich in einem angeregten Zustand befindet. Die beim Zurückfallen freiwerdende Energie wird in Form eines Photons von Kern abgegeben. Ein so entstandenes Photon nennt man ein Gamma-Quant. Da es in jedem Kern für die Protonen und Neutronen nur diskrete Energieniveaus gibt, sind für die Gamma-Quanten auch nur ganz bestimmte Energien möglich.

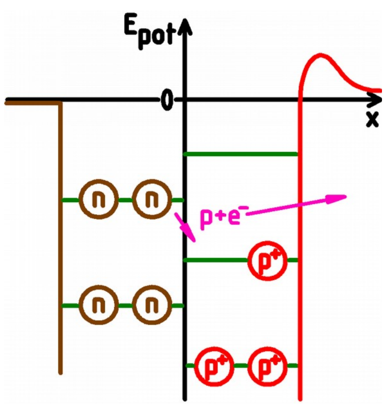


Gamma-Strahlung besitzt ein diskretes Spektrum (nur ganz bestimmte Wellenlängen) und ist charakteristisch für den Atomkern.

Beta-Minus-Zerfall

➔ bei zu vielen Neutronen

Wenn die Energie des höchsten Neutrons größer ist, als ein freier Platz bei den Protonen-Zuständen, kann sich ein Neutron in ein Proton umwandeln und dann den freien Zustand bei den Protonen besetzen. Das entstandene Elektron verlässt den Kern sofort.

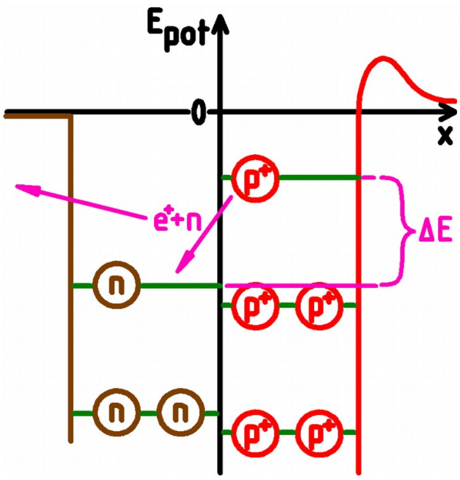


Die so entstandene Elektronenstrahlung nennt man Betastrahlung. Sie besitzt kein diskretes Spektrum, weil außer dem Elektron auch noch ein Antineutrino entsteht und sich die freiwerdende Energie fast beliebig auf Elektron und Antineutrino aufteilen kann.

Beta-Plus-Zerfall

➔ bei zu vielen Protonen

Das Gleiche kann passieren, wenn ein unbesetzter Neutronenzustand energetisch günstiger ist, als der höchste besetzte Protonenzustand. Bei der Umwandlung des Protons in ein Neutron entsteht ein Positron und ein Neutrino.



Allerdings ist die Ruheenergie des Neutrons bereits größer als die des Protons und zusätzlich muss noch die Ruheenergie der völlig neu entstandenen Teilchen zur Verfügung gestellt werden. Dafür muss die zur Verfügung stehende Energiedifferenz ΔE ausreichend groß sein.

☠ Beta-Plus-Zerfall ist relativ selten und kommt fast nur bei künstlich erzeugten Kernen vor.

Aufgabe 7.116:

Berechne mit Hilfe der Ruheenergien von Proton, Neutron und Positron die für Beta-Plus-Zerfall minimal notwendige Energiedifferenz zwischen höchstem besetzten Protonenzustand und freiem Neutronenzustand. Die Ruheenergie des Antineutrinos kann vernachlässigt werden (<2,2eV).

Lösung:

vorher: $E_0 = E_{0,p} = 938{,}28\,MeV$

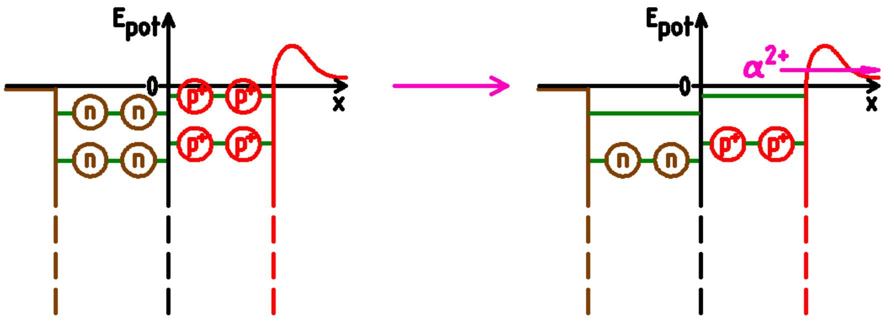
nachher: $E - 0 = E_{0,n} + E_{0,e} = 939{,}57\,MeV + 0{,}511\,MeV = 940{,}08\,MeV$

$940{,}08\,MeV - 938{,}28\,MeV = \underline{1{,}8\,MeV}$

Die Energiedifferenz der beiden Zustände muss also mindestens 1,8MeV betragen.

Alpha-Zerfall

➔ Bei sehr großen Atomkernen



Bei sehr großen Kernen sind Neutronen- und Protonenzustände bis nahe an den Rand des Potentialtopfs besetzt. Hier kann sich aus zwei Neutronen und zwei Protonen des Kerns ein Alphateilchen bilden, das in der Lage ist durch den Potentialwall zu tunneln und den Bereich der Coulomb-Abstoßung zu erreichen. Da es keine weiteren beteiligten Teilchen gibt, hat auch die Alphastrahlung ganz bestimmte Energien.

➔ diskretes Spektrum bei Alpha-Strahlung

Aufgabe 7.117:

Begründe, dass bei sehr großen Atomkernen mit zunehmender Anzahl von Nukleonen der Potentialtopf des Kern nicht mehr wesentlich tiefer wird, und sich deshalb bei zunehmender Nukleonenzahl der Potentialtopf des Kerns immer näher bis zum Rand hin füllt.

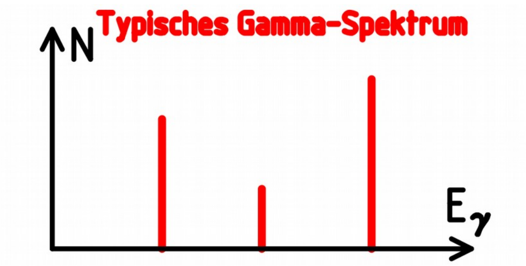
8 Radioaktivität

8.1 Zerfalls- bzw. Strahlungsarten

γ-Zerfall

Beim γ-Zerfall geht der Atomkern von einem angeregten Zustand in einen energetisch niedrigeren Zustand über und ein γ-Quant (EM-Strahlung, Gammastrahlung) wird emittiert. Zerfallsgleichung: $X^* \rightarrow X + \gamma$

Da der Atomkern nur bestimmte Zustände mit bestimmten Energien annehmen kann sind auch für die γ-Strahlung nur ganz bestimmte Energiewerte möglich.



➔ Diskretes Spektrum (Linienspektrum) bei Gammastrahlung

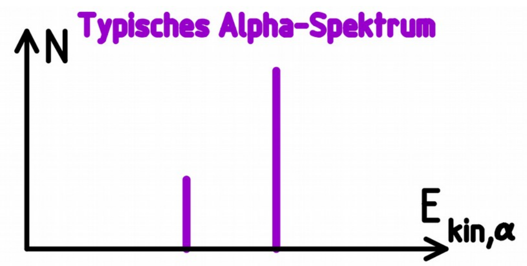
α-Zerfall

Beim Alpha-Zerfall emittiert der Atomkern ein Alphateilchen $\left({}^4_2\alpha^{2+} = {}^4_2He^{2+}\right)$. Der entstehende Tochterkern hat dann zwei Protonen und zwei Neutronen weniger.

➔ Das entstehende Tochter-Atom hat zwei Elektronen zu viel, ist also zweifach negativ geladen.

➔ Meistens entsteht der Tochterkern beim Alpha-Zerfall in einem angeregten Zustand. Der Tochterkern fällt dann durch einen oder mehrere Gamma-Zerfälle in den Grundzustand.

➔ Da Mutterkern und Tochterkern nur diskrete Energien annehmen können entsteht beim Alpha-Zerfall ein diskretes Spektrum. Das liegt daran, dass es ...



☠ ... für die Verteilung einer freiwerdenden Energie als kinetische Energie auf zwei Reaktionsprodukte (Alpha-Teilchen und Tochterkern) aufgrund des Impulserhaltungs-Satzes nur eine einzige Möglichkeit gibt.

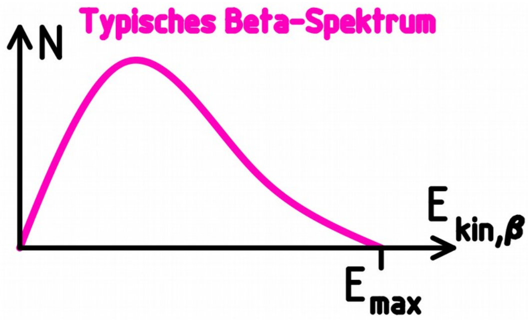
ß-Minus-Zerfall

Beim ß-Minus-Zerfall zerfällt ein Neutron des Kerns in ein Proton, ein Elektron (ß-Strahlung) und ein Anti-Elektron-Neutrino. Auch ein freies Neutron zerfällt auf diese Weise (Halbwertszeit ca. 10min). Neutronen sind also nur stabil, wenn sie in einem Atomkern gebunden sind.

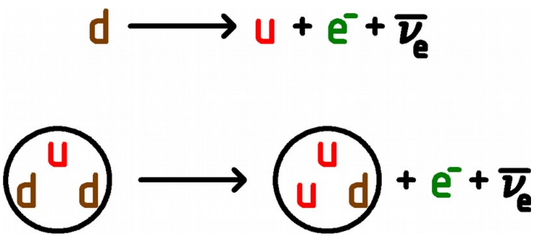
$$ {}_0^1n \rightarrow {}_1^1p^+ + e^- + \overline{\nu}_e $$

- ➔ Das entstehende Tochter-Atom hat ein Elektron zu wenig, ist also einfach positiv geladen.

- ➔ Die ß-Strahlung besitzt kein diskretes Spektrum, sondern ein kontinuierliches Spektrum mit einer maximalen Energie - wenn das Beta-Teilchen (Elektron) die ganze frei werdende Energie erhält. Das führte zur Vermutung, dass an dem Zerfall noch ein weiteres Teilchen beteiligt ist, welches je nach Situation einen beliebig großen Teil der freiwerdenden Energie mit nimmt, das Anti-Elektron-Neutrino (schwer nachzuweisen, weil kaum Wechselwirkung).



- ➔ Im Quark-Modell wandelt sich ein down-Quark in ein up-Quark um, wobei noch ein Elektron und ein Anti-Elektron-Neutrino entstehen.



ß-Plus-Zerfall

Ein Proton des Kerns wandelt sich in ein Neutron um und es entsteht ein Positron (ß-Plus-Strahlung) und ein Elektron-Neutrino.

$$ {}_1^1p^+ \rightarrow {}_0^1n + e^+ + \nu_e $$

- ☠ Ein einzelnes Proton kann dass aber niemals tun, weil die Ruheenergie eines Protons kleiner als die eines Neutrons ist, deshalb könnte man die Reaktionsgleichung oben als falsch bezeichnen.

- ➔ Das Tochter-Atom hat ein Elektron zu viel, ist also einfach negativ geladen.

➔ Das entstandene Positron wird in der Regel sehr schnell ein Elektron treffen mit dem es zur Anihilation kommt, wobei nochmal Energie frei wird.

➔ Beta-Plus-Zerfälle kommen in der Natur nicht vor. Es gibt sie nur bei künstlich erzeugten Elementen (aus Kernreaktoren oder Teilchenbeschleunigern).

Energiespektren

α-Strahlung: diskretes Spektrum

β-Strahlung: kontinuierliches Spektrum

γ-Strahlung: diskretes Spektrum

Ansonsten sind die Eigenschaften des Beta-Plus-Zerfalls dieselben wie beim Beta-Minus-Zerfall, insbesondere was das Energiespektrum anbelangt.

☠ Bei vielen Alpha- oder Beta-Zerfällen entsteht ein Teil der Tochter-Kerne in einem angeregten Zustand und emittiert in Folge Gamma-Strahlung. Da der Gamma-Zerfall immer eine extrem kurze Halbwertszeit hat lässt sich der Gamma-Zerfall fast nur als Folge von Alpha- oder Beta-Zerfällen beobachten.

Andere Zerfallsarten

Instabile Nuklide können auch auf andere Arten Zerfallen - ein Kern kann zum Beispiel in zwei große Bruchstücke zerfallen (spontane Spaltung; SF) oder einen C12-Kern emittieren - der radioaktive Zerfall kommt aber in der Natur mit Abstand am häufigsten vor.

Elektronen-Einfang

Jeder Kern, der zu Beta-Plus-Zerfall in der Lage ist kann auch durch Elektroneneinfang zerfallen (Epsilon-Zerfall; ε-Zerfall oder EC). Dabei fängt der Kern ein K-Elektron der Hülle ein. Aus diesem Elektron und einem Proton des Kerns entsteht dann ein Neutron und ein Neutrino. Die Kernumwandlung ist dieselbe wie beim Beta-Plus-Zerfall.

$$p^+ + e^- \rightarrow n_0 + \nu_e$$

Aufgabe 8.118:

Schreibe die Zerfallsgleichungen für die genannten instabilen Atome auf.
Beim Alpha-Zerfall entsteht das Tochter-Atom in einem angeregten Zustand und geht durch Gamma-Zerfall in den Grundzustand über. Schreibe beim Alpha-Zerfall beide Zerfallsgleichungen auf.

a) Alpha-Zerfall: ${}^{233}_{92}U$; ${}^{212}_{83}Bi$; ${}^{224}_{88}Ra$

b) Beta-Minus-Zerfall: ${}^{108}_{47}Ag$; ${}^{165}_{66}Dy$; ${}^{14}_{6}C$

Schreibe beim Beta-Plus-Zerfall zwei Reaktionsschritte. Im ersten Schritt nur den Zerfall und im zweiten Schritt die Anihilation des Positrons.

c) Beta-Plus-Zerfall: ${}^{43}_{21}Sc$; ${}^{38}_{19}K$; ${}^{14}_{8}O$

Lösung:

a) ${}^{233}_{92}U \rightarrow {}^{229}_{90}Th^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$; ${}^{212}_{83}Bi \rightarrow {}^{208}_{81}Tl^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$; ${}^{224}_{88}Ra \rightarrow {}^{220}_{86}Rn^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

b)

$${}^{108}_{47}Ag \rightarrow {}^{108}_{48}Cd^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$$

$${}^{165}_{66}Dy \rightarrow {}^{165}_{67}Ho^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$$

$${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$$

c)

$${}^{43}_{21}Sc \rightarrow {}^{43}_{20}Ca^{-} + e^{+} + \nu_e \rightarrow {}^{43}_{20}Ca + \nu_e$$

$${}^{38}_{19}K \rightarrow {}^{38}_{18}Ar^{-} + e^{+} + \nu_e \rightarrow {}^{38}_{18}Ar + \nu_e$$

$${}^{14}_{8}O \rightarrow {}^{14}_{7}N^{-} + e^{+} + \nu_e \rightarrow {}^{14}_{7}N + \nu_e$$

Aufgabe 8.119: Rechnen mit Massenzahlen und Ordnungszahlen

a) Das Nuklid Cf248 (Californium; Nr. 98) zerfällt durch Alpha- und Beta-Minus-Zerfälle schließlich in das stabile Nuklid Pb208. Wie viele Alpha- und wie viele Beta-Minus-Zerfälle sind dazu nötig?

b) Das Nuklid Bk247 (Berkelium; Nr. 97) zerfällt durch Alpha- und Beta-Minus-Zerfälle schließlich in das stabile Nuklid Pb207. Wie viele Alpha- und wie viele Beta-Minus-Zerfälle sind dazu nötig?

c) Das Nuklid Es253 (Einsteinium; Nr. 99) zerfällt durch Alpha- und Beta-Minus-Zerfälle schließlich in das stabile Nuklid Bi209. Wie viele Alpha- und wie viele Beta-Minus-Zerfälle sind dazu nötig?

d) Das Nuklid No251 (Nobelium; Nr. 102) zerfällt durch Alpha- und Beta-Minus-Zerfälle schließlich in das stabile Nuklid Pb207. Wie viele Alpha- und wie viele Beta-Minus-Zerfälle sind dazu nötig?

Und noch was mit Beta-Plus dabei:

e) Das Nuklid Fm245 (Fermium; Nr. 100) zerfällt durch Alpha-, Beta-Minus- und Beta-Plus-Zerfälle schließlich in das stabile Nuklid Bi209. Daran sind zwei Beta-Plus-Zerfälle beteiligt. Wie viele Alpha- und wie viele Beta-Minus-Zerfälle sind daran beteiligt?

f) Cm234 (Curium; Nr. 96) zerfällt durch Alpha-, Beta-Minus- und Beta-Plus-Zerfälle schließlich in das stabile Nuklid Pb206. Daran sind vier Beta-Plus-Zerfälle beteiligt. Wie viele Alpha- und wie viele Beta-Minus-Zerfälle sind daran beteiligt?

g) Das Nuklid Md246 (Mendelevium; Nr. 101) zerfällt durch Alpha-, Beta-Minus- und Beta-Plus-Zerfälle schließlich in das stabile Nuklid Pb206. Daran sind zwei Beta-Plus-Zerfälle beteiligt. Wie viele Alpha- und wie viele Beta-Minus-Zerfälle sind daran beteiligt?

Lösung:

a) Massenzahl: $248 - 208 = 40$; $40 : 4 = 10$ -> 10 Alpha-Zerfälle;

Ordnungszahl: $98 - 2 \cdot 10 = 78$; Ordnungszahl von Pb ist 82 -> 4 mal β^-

b) Massenzahl: $247 - 207 = 40$; $40 : 4 = 10$ -> 10 Alpha-Zerfälle

Ordnungszahl: $97 - 2 \cdot 10 = 77$; Ordnungszahl von Pb ist 82 -> 5 mal β^-

c) Massenzahl: $253 - 209 = 44$; $44 : 4 = 11$ -> 11 Alpha-Zerfälle

Ordnungszahl: $99 - 2 \cdot 11 = 77$; Ordnungszahl von Bi ist 83 -> 6 mal β^-

d) Massenzahl: $251 - 207 = 44$; $44 : 4 = 11$ -> 11 Alpha-Zerfälle

Ordnungszahl: $102 - 2 \cdot 11 = 80$; Ordnungszahl von Pb ist 82 -> 2 mal β^-

e) Massenzahl: $245 - 209 = 36$; $36 : 4 = 9$ -> 9 Alpha-Zerfälle

Ordnungszahl: $100 - 2 \cdot 9 - 2 = 80$; Ordnungszahl von Bi ist 83 -> 3 mal β^-

f) Massenzahl: $234 - 206 = 28$; $28 : 4 = 7$ -> 7 Alpha-Zerfälle

Ordnungszahl: $96 - 2 \cdot 7 - 4 = 78$; Ordnungszahl von Pb ist 82 -> 4 mal β^-

g) Massenzahl: $246 - 206 = 40$; $40 : 4 = 10$ -> 10 Alpha-Zerfälle

Ordnungszahl: $101 - 2 \cdot 10 - 2 = 79$; Ordnungszahl von Pb ist 82 -> 3 mal β^-

8.2 Zerfallsreihen, Nuklidkarte

Tochterkerne aus radioaktiven Zerfällen sind oft selbst instabil und zerfallen auch wieder. Auf diese Weise entsteht eine Zerfallsreihe. Bei Gamma- und Beta-Zerfall ändert sich die Massenzahl A nicht, bei Alpha-Zerfall sinkt die Massenzahl jedes mal um vier. Die Massenzahlen der Nuklide einer Zerfallsreihe unterscheiden sich deshalb immer um ein Vielfaches von vier, deshalb lässt sich jedes instabile Nuklid genau einer der vier Zerfallsreihen zuordnen (siehe FS).

$A = 4 \cdot n \rightarrow$ Thorium-Reihe	$A = 4 \cdot n + 1 \rightarrow$ Neptunium-Reihe
$A = 4 \cdot n + 2 \rightarrow$ Uran-Radium-Reihe	$A = 4 \cdot n + 3 \rightarrow$ Uran-Actinium-Reihe

Die instabilen Nuklide der Neptunium-Reihe kommen in der Natur nicht mehr vor, weil die ganze Reihe eine zu kurze Halbwertszeit hat.

Zerfallsreihen lassen sich auch gut auf einer Nuklidkarte (siehe Buch) verfolgen. Hierzu eine Aufgabe.

Aufgabe 8.120: mit Nuklidkarte aus dem Buch

Schreibe in einer Reihe alle Tochterkerne bis zum stabilen Endprodukt bei den gegebenen Ausgangskernen auf.

a) Pa 225 b) Pa 221 c) Rn 224

Lösung:

a) Pa 225; Ac 221; Fr217; At 213; Bi 209 stabil

b) Pa 221; Ac 217; Fr 213; At 209; Po 209; Pb 205; Tl 205 stabil

c) Rn 224; Fr 224; Ra 224; Rn 220; Po 216; Pb 212; Bi 212; Tl 208 oder Po 212; Pb 208 stabil

Aufgabe 8.121:

Zu welcher der vier Zerfallsreihen gehört jeweils das beschriebene Nuklid?

a) Ra227 ; Ra230 ; Th226 ; Th236 ; U239 ; U240

b) Ac224 ; Ac229 ; Ac230 ; Pa228 ; Pa235 ; Pa237

Lösung:

a)

$$\begin{array}{lll} Ra227 & : & 227 = 56\cdot 4 + 3 \rightarrow Uran - Actinium - Reihe \\ Ra230 & : & 230 = 57\cdot 4 + 2 \rightarrow Uran - Radium - Reihe \\ Th226 & : & 226 = 56\cdot 4 + 2 \rightarrow Uran - Radium - Reihe \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} Th236 & : & 236 = 59\cdot 4 \rightarrow Thorium - Reihe \\ U239 & : & 239 = 59\cdot 4 + 3 \rightarrow Uran - Actinium - Reihe \\ U240 & : & 240 = 60\cdot 4 \rightarrow Thorium - Reihe \end{array}$$

b) Ac224: Thorium-Reihe ; Ac229: Neptunium-Reihe ; Ac230: Uran-Radium-Reihe

Pa228: Thorium-Reihe ; Pa235: Uran-Actinium-Reihe ; Pa237: Neptunium-Reihe

Aufgabe 8.122: mit der Nuklidkarte im Buch

Aus welchem Nuklid und durch welche Zerfallsart könnte das gegebene Nuklid durch radioaktiven Zerfall entstanden sein?

a) Po210 ; At206 ; Ra210

b) Th228 ; Ac225 ; Bi211

Lösung:

a) Po210: durch Alpha-Zerfall aus Rn214; Beta-Minus-Zerfall aus Bi210 oder Elektronen-Einfang aus At210

At206: durch Alpha-Zerfall aus Fr210 oder Elektronen-Einfang aus Rn206

Ra210: durch Alpha-Zerfall aus Th214

b) Th228: durch Alpha-Zerfall aus U232; Beta-Minus-Zerfall aus Ac228 oder Elektronen-Einfang aus Pa228

Ac225: durch Beta-Minus-Zerfall aus Ra225 oder Elektronen-Einfang aus Th225

Bi211: durch Alpha-Zerfall aus At215 oder durch Beta-Minus-Zerfall aus Pb211

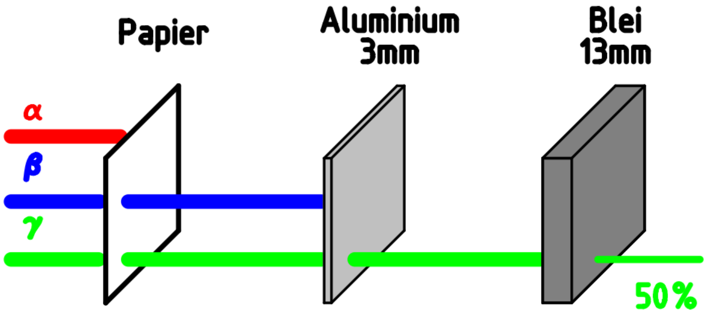
8.3 Nachweis radioaktiver Strahlung

Eigenschaften radioaktiver Strahlung

- ➔ schwärzen fotografischer Schichten (Filme) bei allen drei Strahlenarten

- ➔ Ionisierende Wirkung: Durch Zusammenstöße mit Atomen werden die Atome ionisiert. Auch Gamma-Strahlung ist ionisierend jedoch nicht so stark wie Alpha- oder Beta-Strahlung. Ein Alpha- oder Beta-Teilchen kann viele Atome hintereinander ionisieren. Ein Gamma-Quant dagegen kann nur ein einziges Atom ionisieren, das Gamma-Quant wird dabei vernichtet.

- ➔ Durchdringungsvermögen: Die verschiedenen Strahlungsarten haben stark unterschiedliches Durchdringungsvermögen (siehe Bild).

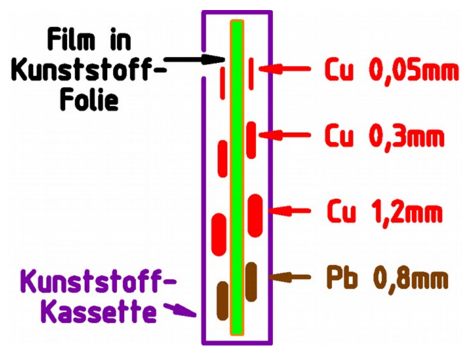


- ➔ Elektrische Ladung: Alpha- und Beta-Strahlung ist elektrisch geladen und wird deshalb in E- und B-Feldern abgelenkt, Gammastrahlung nicht.

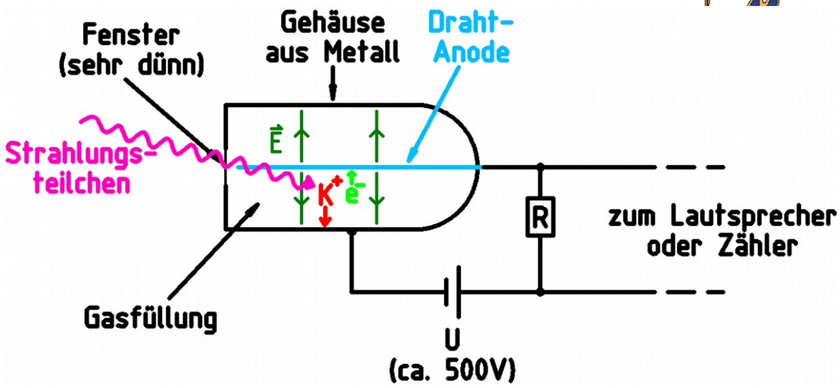
Die Eigenschaften der Strahlungsarten können zum Nachweis benutzt werden.

Filmdosimeter

Eine fotografische Schicht (Film) wird in verschiedenen Bereichen von verschiedenen Metallschichten abgedeckt. Aus der Beobachtung welcher Bereich des Films wie stark geschwärzt ist lassen sich Rückschlüsse auf die Strahlenbelastung ziehen. Die Metallschichten werden auf den beiden Seiten versetzt angebracht, dann kann man auch beurteilen, ob die Strahlung den Körper durchquert hat.



Geiger-Müller-Zählrohr:



Im Ausgangszustand fließt kein Strom, die Gesamte anliegende Spannung fällt am Rohr ab.

Ein Strahlungsteilchen dringt durch das Fenster ein und ionisiert ein Atom der Gasfüllung. Das Kation wird in Richtung der negativ geladenen Gehäusewand, das Elektron in Richtung der positiv geladenen Drahtanode beschleunigt.

Auf ihrem Weg ionisieren die beiden Teilchen andere Atome, die dann wieder andere Atome ionisieren usw., es entsteht eine Ionen-Lawine und ein Stromfluss im Stromkreis.

Durch den Stromfluss steigt die am Widerstand R abfallende Spannung plötzlich an, d.h. die Spannung am Rohr wird kleiner wodurch die Ionen-Bildung und der Stromfluss wieder abbrechen. Wenn kein Strom mehr fließt, fällt am Widerstand R wieder keine Spannung mehr ab.

Der Spannungsstoß am Widerstand kann zu einem Lautsprecher oder einem elektronischen Zähler geleitet werden.

Während der Ionenlawine kann ein neu eingeleiteter Ionisierungsprozess durch ein zweites Strahlungsteilchen nicht von dem ersten unterschieden werden. Während dieser Zeit (Totzeit, ca. 0,1ms) ist das Zählrohr also unempfindlich.

- ➔ Auch ohne ersichtliche radioaktive Substanzen in der Nähe wird ein Geiger-Müller-Zählrohr immer eine Zählrate (Nullrate) anzeigen. Dies rührt von der natürlichen Radioaktivität in der Umgebung her (Ursachen später).

- ➔ Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr kann man Alpha-, Beta- und Gamma-Strahlung nachweisen, da ja alle drei Strahlungsarten ionisierend sind. Es gibt aber Zählrohre, die sich für Gamma-Strahlung nicht eignen.

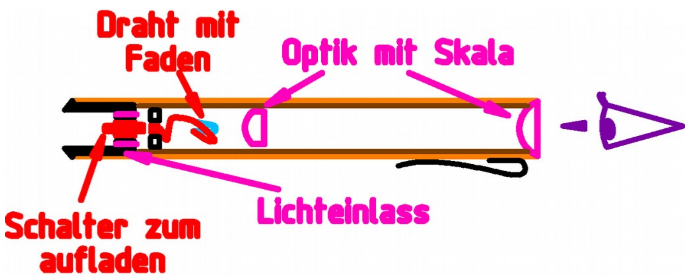
- ☠ Mit einem Geiger-Müller-Zählrohr kann man die verschiedenen Strahlungsarten nicht unterscheiden.

Ionisationskammer und Proportionalzähler

Ionisationskammer und Proportionalzähler haben einen ähnlichen Aufbau wie ein Geiger-Müller-Zählrohr. Sie werden jedoch mit kleineren Spannungen betrieben, so dass die ionisierten Atome und die ausgelösten Elektronen keine weiteren Atome ionisieren können. Ionen entstehen also ausschließlich durch die Strahlungsteilchen selbst. Gemessen wird der durch die Ionen und Elektronen erzeugte Strom und dadurch indirekt die Strahlungsleistung.

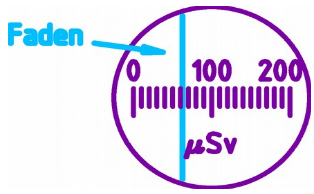
Stabdosimeter

Ein Quarzfaden wird so an eiem dünnen Metalldraht befestigt, dass er durch mechanische Spannung an den Draht gedrückt wird. Wird der Draht aufgeladen, und damit auch der Quarzfaden, dann stoßen sich beide ab und der Quarzfaden spreizt sich ab.



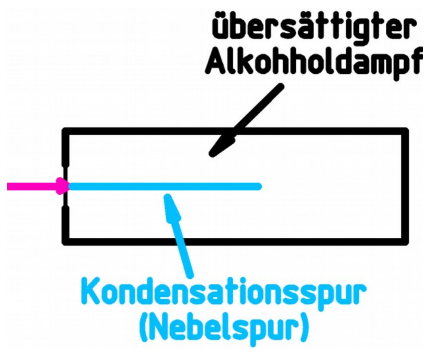
Vor der Benutzung muss das Stabdosimeter aufgeladen werden. Radioaktive Strahlung führt in der Kammer mit dem Draht zur Ionisierung und die Ionen entladen Draht und Quarzfaden, wodurch der Ausschlag des Fadens zurück geht.

Ein Blick in die Optik zeigt den Faden auf einer Skala, an der man die gesamte Strahlenbelastung ablesen kann. Das Dosimeter ist so gut isoliert, dass es sich im Lauf einer Woche nur um ca. 1% selbst entlädt. Die Geräte sind allerdings empfindlich gegen Herunterfallen und lassen sich leicht durch Wiederaufladen manipulieren.

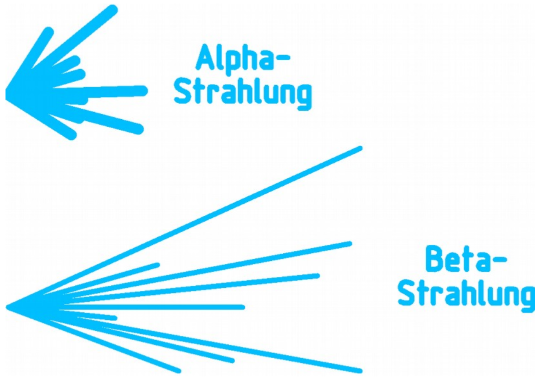


Nebelkammer

In der Nebelkammer befindet sich übersättigter Alkoholdampf. Dringt ein Strahlungsteilchen ein, dann ionisiert es entlang seiner Flugbahn viele Atome. Die so entstandenen Ionen bilden Kondensationskeime für kleine Alkoholtröpfchen, eine Nebelspur entsteht.



- ☠ Gammastrahlung kann in der Nebelkammer nicht nachgewiesen werden, weil ein Gamma-Quant nur ein Atom ionisieren kann und deshalb nur ein kleines nicht sichtbares Tröpfchen erzeugt aber keine Spur.



- ➔ Alpha-Strahlung ist sehr stark ionisierend und erzeugt deshalb sehr dicke aber relativ kurze Spuren bei denen nur ganz bestimmte Längen vorkommen (diskretes Spektrum bei Alpha-Strahlung). Es gibt meist auch nur wenige verschiedene Längen.

- ➔ Betastrahlung erzeugt dünne aber längere Spuren. Wegen des kontinuierlichen Spektrums der Betastrahlung, erzeugt diese Spuren aller möglichen verschiedenen Längen, bis zu einer maximalen Länge.

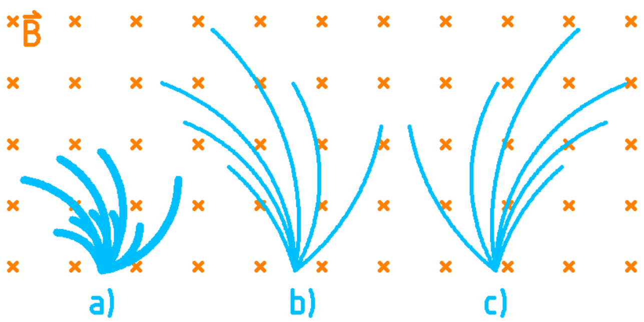
Zusätzlich kann man noch ein Magnetfeld oder ein Elektrisches Feld anbringen, um die Strahlungsarten anhand ihrer elektrischen Ladung besser unterscheiden zu können.

Unterscheidung der Strahlungsarten

- ➔ Gamma-Strahlung wird in elektrischen und magnetischen Feldern nicht abgelenkt

- ➔ Alpha- und Beta-Strahlung wird in elektrischen und magnetischen Feldern entsprechend ihrer Ladung abgelenkt.

Aufgabe 8.123:



Die Nebelkammer ist von einem in die Zeichenebene hinein gerichteten Magnetfeld durchsetzt.

Um welche Strahlungsarten handelt es sich jeweils? Begründung!

Im Buch S.127 ganz unten ist auch noch ein interessantes Experiment zur Unterscheidung der Strahlungsarten.

Aufgabe 8.124: Abi 2000

Ein Kombinationspräparat besteht aus den radioaktiven Elementen Cs137, Sr90 und Am241. Das Präparat sendet Alpha-, Beta- und Gamma-Strahlung aus. Mit einem Zählrohr wurde die Abhängigkeit der Zählrate bei zunehmender Entfernung untersucht. Messreihe M1 wurde ohne Abschirmung durchgeführt, bei Messreihe M2 wurde ein Blatt Papier vor das Präparat gestellt. Für die Zählraten Z1 und Z2 ergaben sich folgende Werte:

Abstand x in cm	1	2	3	4	5	10	20
M1: Zählrate Z1 in 1/s	133,1	64,6	38,4	22,2	16,4	5,3	2,4
M2: Zählrate Z2 in 1/s	125,4	57,2	34,9	20,0	16,5	5,2	2,5

Die Nullrate wurde im Versuchszeitraum zu Z_o = 1,5 1/s gemessen.

a) Wie viele Impulse pro s sind bei M1 im Abstand 1 cm allein der Alpha-Strahlung zuzuordnen?

b) Ermitteln Sie, bis zu welchem Abstand sich Alpha-Teilchen bei diesem Versuch nachweisen lassen. Erläutern Sie ihr Vorgehen.

c) Zeigen Sie durch Rechnung, dass die vom Präparat ausgehende - ohne Abschirmung gemessene - Impulsrate für $x \geq 5$ cm näherungsweise proportional zu $(1/(4 \cdot \pi \cdot x^2))$ ist und erklären Sie die Proportionalität durch eine geometrische Überlegung.

Lösung:

a) 133,1 - 125,4 = 7,7 ; Also sind 7,7 Impulse pro Sekunde auf Alpha-Strahlung zurückzuführen (Nullrate ist bei beiden Messreihen dabei)

b) Alpha-Teilchen können das Blatt Papier nicht durchringen; Beta- und Gamma-Strahlung wird durch das Blatt so gut wie gar nicht abgeschirmt. Sobald also kein Unterschied zwischen mit und ohne Papier mehr messbar ist, sind keine Alpha-Teilchen mehr nachweisbar -> nachweisbar also bis ca. 4 cm

c) Zum Rechnen muss man die Nullrate abziehen.

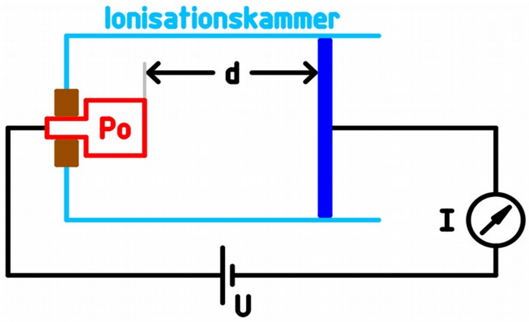
$(Z1 - 1{,}5\ 1/s) \cdot 4 \cdot \pi \cdot x^2$ in cm^2/s: 4687 ; 4775 ; 4524

Die Werte sind in etwa gleich groß, damit ist die Proportionalität gezeigt. $4 \cdot \pi \cdot x^2$ ist die Oberfläche einer Kugel im Abstand x vom Präparat. Die gesamte vom Präparat ausgehende Strahlung geht durch jede dieser Kugelflächen A(x). Die Zählrohrfensterfläche A ist jedoch immer gleich groß. Deshalb gibt Z(x)·A(x)/A die Gesamtaktivität (ohne Alpha-Strahlung) und ist deshalb immer gleich groß.

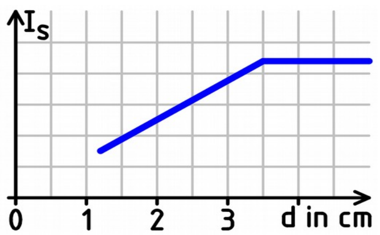
Aufgabe 8.125: Abi 2002

Ein Po209-Präparat sendet Alpha-Teilchen einheitlicher Energie aus.

a) Beschreiben Sie einen Versuch, mit dem gezeigt werden kann, dass Po209 nur Alpha-Teilchen einheitlicher Energie, aber keine Beta-Strahlen aussendet.



Das Po209-Präparat befindet sich nun in einer Ionisationskammer, die hinreichend dicht mit einem leicht ionisierbaren Gas gefüllt ist. Der Abstand der Gegenelektrode vom Präparat wird ausgehend von d1 = 1,0 cm kontinuierlich bis zu d2 = 6,0 cm vergrößert (siehe Skizze). Die anliegende Spannung wird jeweils so gewählt, dass die Sättigungsstromstärke Is gerade erreicht wird. D.h. es werden alle entstandenen Ionen zur Gegenelektrode gezogen, allerdings ist die Spannung nicht so groß, dass die Ionen selbst wieder ionisieren könnten.



Für Is ergibt sich idealisiert der im nebenstehenden Graphen skizzierte Verlauf.

b) Geben Sie eine qualitative Erklärung, wie es zu diesem Kurvenverlauf der Sättigungsstromstärke kommt.

c) Ein Alpha-Teilchen erzeugt im Schnitt ca. 40 000 Ionenpaare pro cm. Zur Bildung eines Paares wird im Mittel die Energie 35 eV benötigt. Berechnen Sie daraus unter Zuhilfenahme des Diagramms von Teilaufgabe b) die Energie eines Alpha-Teilchens. (Kontrolle: 4,9 MeV)

Lösung:

b) Sobald das Alpha-Teilchen auf die Gegenelektrode trifft kann es keine weiteren Atome ionisieren. Je länger die Flugstrecke eines Alpha-Teilchens desto mehr Ionen werden erzeugt, desto größer die Stromstärke. Ab ca. d = 3,5 cm werden nicht noch mehr Ionen erzeugt, weil die Alpha-Teilchen ihre Energie vollständig abgegeben haben und nun keine Atome mehr ionisieren können -> Stromstärke bleibt konstant.

8.4 Strahlungsbelastung aus der Umwelt

Jede ionisierende Strahlung ist biologisch wirksam. Dazu gehören neben der radioaktiven Strahlung auch die Röntgenstrahlung und die kurzwellige UV-Strahlung. Gemessen wird die Strahlenbelastung mit zwei verschiedenen Größen.

Energiedosis, D:

Die Energiedosis gibt die aufgenommene Energie pro Kilogramm Körpergewicht an.

$$\boxed{D=\frac{E}{m} \;\; ; \;\; [D]=1\frac{J}{kg}=1\,Gy \quad \text{(Gray)}}$$

Äquivalentdosis, H:

Die Energiedosis multipliziert man mit dem Qualitätsfaktor der Strahlung Q, um der biologischen Wirksamkeit der verschiedenen Strahlungsarten Rechnung zu tragen.

$$\boxed{H=D\cdot Q \;\; ; \;\; [H]=1\frac{J}{kg}=1\,Sv \quad \text{(Sievert)}}$$

➔ Um die Gefährdung durch eine Strahlungsbelastung für Menschen einzuschätzen, braucht man also die Äquivalentdosis.

Qualitätsfaktoren von Röntgen-, Gamma- und Betastrahlung sind Q=1. Qualitätsfaktor für Alpha-Strahlung ist Q=20. Alpha-Strahlung ist also wesentlich gefährlicher.

☠ Eine kurzzeitige Belastung von 4Sv ist in 50% der Fälle tödlich.

Qualitätsfaktor; biologische Wirksamkeit

Alpha-Strahlung ionisiert auf kurzen Strecken wesentlich mehr Atome als Beta- oder Gamma-Strahlung. Deshalb ist die Alpha-Strahlung biologisch wirksamer und hat eine geringere Reichweite, da das Alpha-Teilchen seine Energie schon auf kürzerem Weg verbraucht. Die Reichweite der Strahlungsteilchen in Wasser (bzw. im menschlichen Körper) ist stark abhängig von ihrer Energie. Typische Werte sind:

Alpha -> 50 µm ; Beta-Strahlung -> mm bis cm ; Gamma-Strahlung -> einige Meter

Ein Alpha-Zerfall im Innern des Körpers führt also zur Aufnahme der gesamten Zerfallsenergie; ein Beta-Zerfall im Innern zur teilweisen Aufnahme und die folgenden Gamma-Zerfälle im Innern des Körpers nur zu geringer Energie-Aufnahme im Körper. Ein Alpha-Teilchen gibt seine Energie außerdem auf einer kurzen Strecke ab, die nur wenige Zellen lang ist. Deshalb ist eine ernste Schädigung der durchquerten Zellen sehr wahrscheinlich. Von außen auf den Körper treffende Alpha-Strahlung ist dagegen nicht so gefährlich, da sie kaum die äußersten bereits abgestorbenen Hautschichten durchquert.

Biologische Wirkung

Radioaktive Strahlung kann im Innern einer Zelle Atome oder Moleküle anregen, ionisieren oder Atome innerhalb ihrer chemischen Bindung räumlich verschieben. Durch diese Prozesse werden unerwünschte chemische Reaktionen ausgelöst und es bilden sich freie Radikale, die ebenfalls chemische Reaktionen im Innern der Zelle auslösen. Dabei werden Aminosäuren oder Enzyme beschädigt und die DNA verändert oder zerbrochen.

Bei kurzzeitig hohen Belastungen kommt es zu:

- ➔ Veränderungen des Blutbildes (Blutarmut; Mangel an Blutkörperchen)
- ➔ Übelkeit, Schädigung oder sogar Zerstörung der Schleimhäute (z.B. im Verdauungstrakt)
- ➔ vorübergehender oder dauerhafter Unfruchtbarkeit
- ➔ Haarausfall
- ➔ der Mangel an Blutkörperchen führt auch zu einem erhöhten Infektionsrisiko

Auch nach langer Zeit ohne Symptome (z.B. 10 Jahre) kann es durch krankhaft veränderte Zellen zu Spätschäden kommen:

- ➔ Trübung der Augenlinse
- ➔ Krebserkrankungen (Leukämie, Lungenkrebs, Schilddrüsenkrebs)
- ➔ Unfruchtbarkeit

Natürliche Strahlenbelastung

➔ Radon

Durch Radioaktive Zerfälle (Thorium-Reihe, Uran-Radium-Reihe) entsteht in der Erdkruste Radon. Das gasförmige Radon tritt aus dem Erdboden aus und dringt auch in Keller ein. Hohe Belastung deshalb in schlecht gelüfteten Kellern und Höhlen.

➔ Kalium 40

Kalium ist ein wichtiger Elektrolyt und wird vom menschlichen Körper benötigt. Das natürliche Kalium besteht zu 0,01% aus dem radioaktiven Kalium 40.

➔ Radionuklide im Erdboden

➔ Kosmische Strahlung

Kosmische Strahlung ist selbst ionisierend und führt in der Atmosphäre zu Kernreaktionen, durch welche Radionuklide entstehen. Die Belastung ist stark von der Höhe abhängig. Fliegendes Personal ist deshalb einer hohen Dosis ausgesetzt.

Künstliche Strahlenbelastung

➔ Medizinische Anwendungen, Röntgenuntersuchungen bilden mit Abstand den größten Teil der künstlichen Strahlenbelastung

➔ Tabak ist mit Po210 und Pb210 belastet

➔ Kohleförderung und Verbrennung

Kohle enthält Uran, Thorium und Radon, die durch Verbrennung in die Umwelt gelangen.

➔ Kernwaffenversuche und kerntechnische Anlagen

Über den ganzen Planeten gemittelt ist die Belastung vernachlässigbar klein. Erhebliche Belastungen treten natürlich in der Umgebung von schweren Unfällen auf.

8.5 Strahlenschutz

Die drei A, Abstand halten, Abschirmen (Bleiplatten) und Aufnahme (von radioaktiven Substanzen) vermeiden. Außerdem muss die zeitliche Dauer der Strahlenexposition möglichst gering gehalten werden.

Abstand

Die Reichweite der Strahlungsteilchen in Luft ist stark von der Energie abhängig. Typische Werte sind:

Alpha -> dm ; Beta -> mehrere Meter ; Gamma -> praktisch unbegrenzt

Trotzdem hilft auch bei Gamma-Strahlung der Abstand, da sich die Gamma-Quanten in größerem Abstand auf einen größeren Raum verteilen und man so weniger Treffer abbekommt ($1/r^2$-Gesetz). Wenn radioaktive Substanzen in die Umwelt gelangen (Reaktorunfälle) kann man immer noch Abstand zu überdurchschnittlich kontaminierten Flächen halten.

Abschirmen

Alpha-Strahlen lassen sich durch dünne Papier- oder Kunststoff-Schichten abschirmen. Zur Abschirmung von Beta-Strahlen braucht man schon mehrere Millimeter dicke Materialschichten (3mm Aluminium). Zur Abschirmung von Gamma-Strahlen benutzt man dicke Blei-Platten (Gamma-Strahlen werden durch viel Masse abgeschirmt; Blei -> hohe Dichte). Schutzanzüge schirmen also nur Alpha- und bestenfalls Beta-Strahlung (bei ausreichender Materialdicke) ab.

Aufnahme vermeiden

Behälter mit radioaktiven Substanzen luftdicht verschließen. Schutzanzüge dienen hauptsächlich zur Vermeidung der Aufnahme durch einatmen oder durch die Haut.

Zeitliche Dauer

Die Energiedosis ist direkt proportional zur Dauer der Einwirkung, Röntgenuntersuchungen also mit möglichst kurzer Belichtungszeit (und möglichst langwelliger Röntgenstrahlung).

Bemerkung: Eine über das Jahr verteilte gleichmäßige Belastung ist weniger gefährlich, als dieselbe Energiedosis in einer kurzen Zeitspanne.

Aufgabe 8.126: Abi 2013 (Ausschnitt)

In Folge des Reaktorunfalls in Fukushima wurde Cäsium 137 - welches mit einer Halbwertszeit von 30 Jahren in stabiles Barium 137 zerfällt - in die Umgebung freigesetzt.

a) Geben Sie die Zerfallsgleichung für den Zerfall von Cs137 an.

b) Techniker, die nach dem Unfall Messungen in der Nähe des Kraftwerks vornahmen, waren Alpha-, Beta- und Gamma-Strahlung ausgesetzt. Beurteilen Sie die Wirksamkeit der Schutzanzüge aus Kunststoff-Folie, die hierbei zum Einsatz kamen, in Hinblick auf diese drei Strahlungsarten.

c) Geben Sie drei allgemeine Strahlenschutzmaßnahmen an und diskutieren Sie, inwiefern diese von den Technikern, die die Messungen am Kraftwerk vornahmen, eingehalten werden konnten.

Im Dorf Iitate nahe Fukushima wurde nach dem Unfall pro Quadratmeter Bodenoberfläche eine Cs137-Aktivität von 3,3 Millionen Zerfällen pro Sekunde gemessen. Die Bewohner wurden daraufhin evakuiert.

d) Berechnen Sie die Äquivalentdosis, die eine Person der Masse 75 kg in einem Jahr aufnehmen würde, falls sie pro Sekunde 3,3 Millionen Beta-Minus-Teilchen der mittleren kinetischen Energie 190 keV absorbieren würde. Vergleichen Sie diese Dosis mit einer natürlichen Strahlenbelastung von 2,4 mSv pro Jahr.

Lösung:

d) $$H = q \cdot \frac{E}{m} = 1 \cdot \frac{3{,}3 \cdot 10^{6} \cdot 190 \cdot 10^{3} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365{,}25}{75\, kg} = \underline{\underline{42\, mSv}}$$

Die Belastung ist das 17,6-fache der natürlichen Strahlenbelastung.

9 Zerfallsgesetz und Altersbestimmung

9.1 Zerfallsgesetz

Ob ein instabiler Kern in der nächsten Millisekunde zerfällt, lässt sich nicht mit Sicherheit vorhersagen, man kann nur eine Wahrscheinlichkeit dafür angeben. Die Zeit, nach der der Kern mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 zerfallen ist, nennt man die Halbwertszeit des Nuklids.

Halbwertszeit: $T_{1/2}$

Wenn zu Anfang sehr viele Kerne des Nuklids vorhanden sind, kann man davon ausgehen, dass nach der Halbwertszeit ziemlich genau die Hälfte zerfallen ist, nach einer weiteren Halbwertszeit wieder die Hälfte der noch vorhandenen usw. (falls ein Kern in der letzten Sekunde nicht zerfallen ist, beeinflusst das nicht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er in der nächsten Sekunde zerfällt). Man kann also eine Tabelle anlegen, die den Zeitlichen Verlauf der Anzahl der noch vorhandenen Kerne beschreibt.

Zeit, t	0	$T_{1/2}$	$2\cdot T_{1/2}$	$3\cdot T_{1/2}$	$4\cdot T_{1/2}$
noch vorhandene Kerne	$N_0\cdot 1$	$N_0\cdot\frac{1}{2}$	$N_0\cdot\frac{1}{4}$	$N_0\cdot\frac{1}{8}$	$N_0\cdot\frac{1}{16}$
$\frac{t}{T_{1/2}}$	0	1	2	3	4
	$1=\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Für die Anzahl der noch vorhandenen Kerne in Abhängigkeit von der t ergibt sich damit

$$N(t)=N_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}=N_0\cdot\frac{1}{2^{\frac{t}{T_{1/2}}}}=N_0\cdot 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}=N_0\cdot\left(e^{ln2}\right)^{-\frac{t}{T_{1/2}}}=N_0\cdot e^{-\frac{t}{T_{1/2}}\cdot ln2}=N_0\cdot e^{-\frac{ln2}{T_{1/2}}\cdot t}$$

Für $\frac{ln2}{T_{1/2}}$ führt man die Abkürzung λ ein und erhält das Zerfallsgesetz:

noch vorhandene Kerne: $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$; Zerfallskonstante: $\lambda=\frac{ln2}{T_{1/2}}$

Die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde nennt man Aktivität A. Da jeder Zerfall zu einem Strahlungsteilchen führt, kann man die Aktivität mit einem Geigerzähler messen. Weil die Anzahl der vorhandenen Kerne immer kleiner wird, aber die Aktivität positiv ist, kommt ein Minus.

$$A(t)=-\frac{\Delta N}{\Delta t} \rightarrow -\frac{dN}{dt}=-\dot{N}(t)=\lambda\cdot N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=\lambda\cdot N(t)$$

Aktivität: $A(t)=\lambda\cdot N(t)=\lambda\cdot N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$

und wegen $A_0=\lambda\cdot N_0$ ergibt sich

$$A(t)=A_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$$

$$[A]=\frac{1}{s}=1\,Bq$$ (Bequerel)

Aufgabe 9.127: U238

a) Wie viele Atome enthält 1,0mg U238?

b) Wie viele der Atome sind nach $5\cdot 10^9 a$ noch vorhanden?

c) Wie viel Prozent des U238 sind nach der in b) gegebenen Zeit zerfallen?

d) Berechne die Aktivität der Probe ganz zu Anfang (Die Aktivität zu einem späteren Zeitpunkt lässt sich nur schwer berechnen, weil die Tochterkerne ebenfalls wieder instabil sind).

Lösung:

a) $N_0=\frac{m}{m_{U238}}=\frac{1{,}0\cdot 10^{-6}\,kg}{238{,}05\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{\underline{2{,}5\cdot 10^{18}}}$

b) $N(t)=N_0\cdot e^{-\frac{ln2}{T_{1/2}}\cdot t}=2{,}5\cdot 10^{18}\cdot e^{-\frac{ln2}{4{,}5\cdot 10^9\,a}\cdot 5\cdot 10^{10}\,a}=\underline{\underline{1{,}13\cdot 10^{18}}}$

c) $\frac{1{,}13\cdot 10^{18}}{2{,}5\cdot 10^{18}}=0{,}458=45{,}8\,\%$ noch vorhanden → <u>54,2% zerfallen</u>

d) $A_0=\lambda\cdot N_0=\frac{ln2}{T_{1/2}}\cdot N_0=\frac{ln2}{4{,}5\cdot 10^9\cdot 365{,}25\cdot 24\cdot 3600\,s}\cdot 2{,}5\cdot 10^{18}=\underline{\underline{12{,}2\,Bq}}$

Aufgabe 9.128:

Die Probe eines Nuklids hat eine Aktivität von 2,3 kBq, nach einer Woche nur noch 0,45 kBq. Berechne die Halbwertszeit des Nuklids unter der Annahme, dass der Tochterkern stabil ist.

Lösung:

$$A(t)=A_0\cdot e^{-\lambda\cdot t} \rightarrow -\lambda\cdot t=\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \rightarrow -\frac{ln2}{T_{1/2}}\cdot t=\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$T_{1/2}=\frac{-ln2\cdot t}{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}=\frac{-ln2\cdot 7\,d}{\ln\left(\frac{0{,}45\,kBq}{2{,}3\,kBq}\right)}=\underline{\underline{2{,}97\,d}}$$

Aufgabe 9.129:

Ein Geigerzähler hat eine Fensterfläche von 0,27cm² und misst in einem Abstand von 20cm von der Probe 30 Impulse pro Sekunde.

Wie groß ist die gesamte Aktivität der Probe?

Lösung:

Der Anteil der Fensterfläche des Geigerzählers an der Kugelfläche mit 20cm Radius um die Probe ist genauso groß wie der Anteil der gemessenen Impulse an der gesamten Aktivität.

$$\frac{F_{Rohr}}{F_{Kugel}}=\frac{A_{mess}}{A_{ges}} \rightarrow A_{ges}=\frac{A_{mess}\cdot F_{Kugel}}{F_{Rohr}}=\frac{30\,Bq\cdot 4\cdot\pi\cdot 0{,}2^2\,m^2}{0{,}27\cdot 10^{-4}\,m^2}=\underline{\underline{559\,kBq}}$$

Aufgabe 9.130:

Zum Zeitpunkt Null enthält eine Probe 1,0g reines Jod 131, das mit einer Halbwertszeit von 8,04d in das stabile Xenon 131 zerfällt. Die Atommasse von Jod 131 schätzen wir auf 131.

a) Berechne die Aktivität des Präparats zum Zeitpunkt Null.

b) Berechne die Aktivität des Präparats nach 1,0 Jahren.

c) Wie alt ist die Probe, wenn sie nur noch eine Aktivität von 10Bq hat?

Lösung:

a)

$$N_0 = \frac{m}{m_{131}} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}\,kg}{131 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = 4{,}6 \cdot 10^{21}$$

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 = \frac{ln2}{T_{1/2}} \cdot N_0 = \frac{ln2}{8{,}04 \cdot 24 \cdot 3600\,s} \cdot 4{,}6 \cdot 10^{21} = \underline{\underline{4{,}6 \cdot 10^{15}\,Bq}}$$

b)

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-ln2 \cdot \frac{t}{T_{1/2}}} = 4{,}6 \cdot 10^{15}\,Bq \cdot e^{-ln2 \cdot \frac{365\,d}{8{,}04\,d}} = \underline{\underline{99\,Bq}}$$

c)

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \rightarrow \quad -\lambda \cdot t = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$t = -\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \cdot \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = -\ln\left(\frac{10\,Bq}{4{,}6 \cdot 10^{15}\,Bq}\right) \cdot \frac{8{,}04\,d}{\ln 2} = \underline{\underline{392\,d}}$$

Aufgabe 9.131:

Eine Probe hat eine Aktivität von 500Bq. Bestimme die durchschnittliche Dauer zwischen zwei Zerfällen.

Lösung:

500 Zerfälle pro Sekunde; Dauer zwischen zwei Zerfällen $\frac{1\text{s}}{500} = \underline{\underline{2\text{ms}}}$

Aufgabe 9.132:

Welche Halbwertszeit besitzt ein Radionuklid, das in 2000a zu 99% zerfallen ist?

Lösung:

$$N(t) = 0{,}01 \cdot N_0 \quad \rightarrow \quad 0{,}01 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \rightarrow \quad 0{,}01 = e^{-\lambda \cdot t}$$

$$-\lambda \cdot t = \ln(0{,}01) \quad \rightarrow \quad -\frac{ln2}{T_{1/2}} \cdot t = \ln(0{,}01)$$

$$T_{1/2} = \frac{-ln2 \cdot t}{\ln(0{,}01)} = \frac{-ln2 \cdot 2000\text{a}}{\ln(0{,}01)} = \underline{\underline{301\,a}}$$

Aufgabe 9.133: Zum geschickten Umgang mit Exponentialfunktionen

Gemessen wird die Aktivität einer Probe zu verschiedenen Zeitpunkten.
Die Nullrate ist bereits abgezogen. Die Messung zum Zeitpunkt t=0 hat der Lehrling verschlampt.

t in h	0	1	2
Impulsrate in 1/min		9535	8190

a) Wie hoch war die Impulsrate zum Zeitpunkt t=0 ?

b) Bestimme die Halbwertszeit des Präparats.

Lösung:

a) Bei gleich großen zeitlichen Abständen sinkt die Aktivität immer um den selben Faktor (Exponentialfunktion, Mathe 10).

t in h	0	1	2
Imp. in 1/min		9535	8190
		$\xrightarrow{\cdot k}$	$\xrightarrow{\cdot k}$

Den Faktor findet man durch Division und kann damit den fehlenden Wert ausrechnen.

$$\frac{8190}{9535}=0{,}86 \rightarrow Imp.(t=0)=\frac{9535}{0{,}86}=\underline{\underline{11087}}$$

$$A(t=1\text{h})=A_0\cdot e^{-\lambda\cdot 1\text{h}}=A_0\cdot 0{,}86 \rightarrow e^{-\lambda\cdot 1\text{h}}=0{,}86$$

b)
$$-\lambda\cdot 1\text{h}=-\frac{ln2}{T_{1/2}}\cdot 1\text{h}=\ln 0{,}86 \rightarrow T_{1/2}=\frac{-ln2\cdot 1\text{h}}{\ln 0{,}86}=\underline{\underline{4{,}6\,h}}$$

Messung von Halbwertszeiten

➔ Bei relativ kurzen Halbwertszeiten misst man die Aktivität der Probe zu verschiedenen Zeitpunkten und rechnet damit Halbwertszeit aus.

☠ So einfach geht das nur, wenn der Tochterkern stabil ist, ansonsten muss man die Folgezerfälle in die Rechnung mit einbeziehen.

Aufgabe 9.134:

a) Die Probe eines Nuklids hat zu Beginn der Messung eine gesamte Aktivität von 345 Bq. Exakt drei Tage später hat die Probe noch eine Aktivität von 182 Bq. Berechne die Halbwertszeit des Nuklids.

b) Die Probe eines Nuklids hat zu Beginn der Messung eine gesamte Aktivität von 1,83 kBq. 420 min später beträgt die Aktivität noch 1,25 kBq. Berechne die Halbwertszeit des Nuklids.

Lösung:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} \rightarrow -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \rightarrow T_{1/2} = \frac{-t \cdot \ln 2}{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}$$

a) $$T_{1/2} = \frac{-3\,d \cdot \ln 2}{\ln\left(\frac{182}{345}\right)} = \underline{\underline{3{,}25\,d}}$$

b) $$T_{1/2} = \frac{-420\,min \cdot \ln 2}{\ln\left(\frac{1{,}25}{1{,}83}\right)} = \underline{\underline{764\,min}}$$

➔ Bei sehr langen Halbwertszeiten muss man eine Probe ohne "fremde" Radioaktivität erzeugen, die Teilchenzahl N und dann noch die Aktivität A messen.

Aufgabe 9.135:

a) Ein Probe enthält $3{,}5 \cdot 10^{18}$ Atome eines instabilen Nuklids. Die Aktivität der Probe beträgt 38 Bq. Berechne die Halbwertszeit in Jahren.

b) Eine Probe der Masse 1,4 g besteht zu 1,2% aus einem Radionuklid der Massenzahl 185 (<- ungefähre Atommasse). Wir gehen davon aus, dass die gesamte Aktivität der Probe von diesem Radionuklid erzeugt wird. Die Probe hat eine Aktivität von 124 Bq. Bestimme die Halbwertszeit dieses Radionuklids in Jahren.

Lösung:

a) $$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N \rightarrow T_{1/2} = \frac{N \cdot \ln 2}{A} = \frac{3{,}5 \cdot 10^{18} \cdot \ln 2}{38\,Bq} = \underline{\underline{6{,}38 \cdot 10^{16}\,s \;=\; 2{,}02 \cdot 10^{9}\,a}}$$

b) Zuerst die Teilchenzahl bestimmen:

$$N = \frac{m}{m_N} = \frac{0{,}012 \cdot 0{,}0014\,kg}{185 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{5{,}47 \cdot 10^{19}}$$

Und jetzt wie in a) die Halbwertszeit bestimmen:

$$T_{1/2} = \frac{N \cdot \ln 2}{A} = \frac{5{,}47 \cdot 10^{19} \cdot \ln 2}{124\,Bq} = \underline{3{,}058 \cdot 10^{17}\,s \;=\; 9{,}7 \cdot 10^{9}\,a}$$

Aufgabe 9.136: Aktivitäten von Mischungen

Wenn eine Probe mehrere verschiedene Radionuklide enthält, berechnet man die Aktivität jedes einzelnen Nuklids und addiert anschließend die Aktivitäten.

a) Ein Thalliumprobe von 50 mg besteht zu 0,5% aus Tl206 (Halbwertszeit 4,2 min; Atommasse ca. 206 u) und zu 1,2% aus Tl208 (Halbwertszeit 3,1 min, Atommasse ca. 208 u). Der Rest ist Tl203 und Tl205, beide stabil. Die beiden Radioisotope zerfallen beide in stabile Bleiisotope, so dass es keine Folgezerfälle gibt. Bestimme die Aktivität der Probe.

b) Das Thalliumisotop Tl209 (Halbwertszeit 2,2 min; Atommasse ca. 209 u) zerfällt zu Blei Pb209 (Halbwertszeit 3,25 h; Atommasse ca. 209 u) zerfällt zu Bismut Bi209. Das Bismutisotop Bi209 ist stabil. Eine Probe aus 2,0 μg Tl209 beginnt zum Zeitpunkt t = 0 zu zerfallen.

i) Wie hoch ist die Aktivität der Probe zum Zeitpunkt t = 0?

ii) Bestimme die Aktivität zum Zeitpunkt t = 8,8 min. Dabei kann davon ausgegangen werden, dass der Anteil des bereits zerfallenen Pb209 verschwindend gering ist.

Lösung:

a) $$A_{206} = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{m_{206}} = \frac{\ln 2}{4{,}2 \cdot 60\,s} \cdot \frac{0{,}005 \cdot 50 \cdot 10^{-6}\,kg}{206 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{2{,}0 \cdot 10^{15}\,Bq}$$

$$A_{208} = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{m_{208}} = \frac{\ln 2}{3{,}1 \cdot 60\,s} \cdot \frac{0{,}012 \cdot 50 \cdot 10^{-6}\,kg}{208 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{6{,}5 \cdot 10^{15}\,Bq}$$

$$A = A_{206} + A_{208} = 2{,}0 \cdot 10^{15}\,Bq + 6{,}5 \cdot 10^{15}\,Bq = \underline{8{,}5 \cdot 10^{15}\,Bq}$$

bi) $$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{m_{Tl}} = \frac{\ln 2}{2{,}2 \cdot 60\,s} \cdot \frac{2{,}0 \cdot 10^{-9}\,kg}{209 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{3{,}0 \cdot 10^{13}\,Bq}$$

bii) 8,8 min sind vier Halbwertszeiten des Tl209, also ist die Aktivität des Thalliums auf 1/16 des Anfangswertes gefallen. Die Anzahl der Pb209-Atome beträgt dann 15/16 der anfänglichen Tl209-Atome.

$$A_{Tl} = \frac{1}{16} \cdot 3{,}0 \cdot 10^{13}\,Bq = \underline{1{,}9 \cdot 10^{12}\,Bq}$$

$$A_{Pb} = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{m}{m_{Tl}} = \frac{\ln 2}{3{,}25 \cdot 3600\,s} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{2{,}0 \cdot 10^{-9}\,kg}{209 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{3{,}2 \cdot 10^{11}\,Bq}$$

$$A_{ges} = A_{Tl} + A_{Pb} = 1{,}9 \cdot 10^{12}\,Bq + 3{,}2 \cdot 10^{11}\,Bq = \underline{2{,}2 \cdot 10^{12}\,Bq}$$

Aufgabe 9.137: aus ISB

In einem Experiment wird die Aktivität A(t) eines radioaktiven Elements in Abhängigkeit von der Zeit t bestimmt. In der folgenden Messreihe ist das um den Nulleffekt bereinigte Verhältnis A(t)/A(0) angegeben.

t in s	0	80	160	240	320	400
A(t)/A(0)	1	0,71	0,46	0,32	0,23	0,16

a) Zeigen Sie allgemein, dass sich die Gesetzmäßigkeit $A(t) = A(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ auch in der Form $\ln\left(\frac{A(t)}{A(0)}\right) = -\lambda \cdot t$ schreiben lässt.

b) Stellen Sie obige Messreihe in einer t-ln(A(t)/A(0))-Wertetabelle dar und fertigen Sie damit ein t-ln(A(t)/A(0))-Diagramm an.

c) Erklären Sie die besondere Bedeutung der Zerfallskonstante λ in ihrem Diagramm. Bestimmen Sie graphisch mit Hilfe ihres Diagramms die Zerfallskonstante λ und berechnen Sie daraus die Halbwertszeit.

d) Berechnen Sie nach welcher Zeit die Aktivität auf 10% der Anfangsaktivität gesunken ist.

e) Aus den bisherigen Ergebnissen soll ein t-N(t)-Diagramm angefertigt werden. Dabei ist N(t) die Anzahl der unzerfallenen Kerne zum Zeitpunkt t. Beschreiben Sie, wie Sie vorgehen würden und welche weiteren Daten erforderlich wären.

Aufgabe 9.138: Aus Abi 2013

Nach dem Reaktorunfall in Fukushima wurde in einem Dorf in der Nähe eine Aktivität von 3,3 MBq pro Quadratmeter Bodenfläche - ausgelöst durch in die Umwelt gelangtes Cs137 (Halbwertszeit 30 Jahre) - gemessen. Das Dorf wurde daraufhin evakuiert. Ab einer Cs137-Aktiviät von 4,0 kBq pro Quadratmeter Bodenfläche wird die Wiederbesiedlung durch die Behörden erlaubt. Berechnen Sie, wie lange auf Grund der Aktivitätsannahme durch den radioaktiven Zerfall bis zur Wiederbesiedlung gewartet werden müsste.

Lösung:

$$A = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} \quad \rightarrow \quad -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{30\,a}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{4 \cdot 10^3\,Bq}{3{,}3 \cdot 10^6\,Bq}\right) = \underline{\underline{291\,a}}$$

Aufgabe 9.139: Aus Abi 2014

In Wildschweinfleisch enthaltenes Cäsium 137 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 30,2 a in den Grundzustand des stabilen Tochterkerns Ba137. Dabei entsteht der Tochterkern in einem angeregten Zustand der durch Gamma-Zerfall in den Grundzustand übergeht. Die gesamte beim Zerfall freiwerdende Energie beträgt 1,18MeV.

a) Erläutern Sie, weshalb bei einem Cs137-Zerfall im menschlichen Körper nicht die gesamte freiwerdende Energie im Inneren des Körpers absorbiert wird.

Die biologische Halbwertszeit - die Zeit, die der Körper braucht, um die Hälfte des aufgenommenen Cs137 wieder auszuscheiden - beträgt 110 Tage.

b) Erklären Sie unter Bezugnahme auf die Halbwertszeit des Zerfalls und die biologische Halbwertszeit, dass die Aktivität von aufgenommenem Cs137 im menschlichen Körper im Laufe eines Jahres deutlich abnimmt.

Für den Verkauf von Wildschweinfleisch ist ein Grenzwert von 600Bq pro Kilogramm vorgegeben, der nicht überschritten werden darf.

c) Berechnen Sie die Äquivalentdosis H, die eine Person der Masse 75 kg in einem jahr aufnimmt, wenn sie einmalig 250 g Wildschweinfleisch verzehrt, das mit dem Grenzwert belastet ist. Gehen Sie hierbei davon aus, dass im menschlichen Körper die Hälfte der Energie Q pro Cs137-Zerfall absorbiert wird und die mittlere Aktivität von Cs137 über einen Zeitraum von einem Jahr 40% der Anfangsaktivität beträgt.

d) Nach einer Meldung des Bundesamtes für Strahlenschutz wurden bei Stichproben im Jahr 2012 vereinzelt Werte bis zu 9,8 kBq pro Kilogramm Wildschweinfleisch gemessen. Beurteilen Sie die Strahlenbelastung durch den Verzehr von unkontrolliertem Wildschweinfleisch unter Berücksichtigung dieser Meldung, des Ergebnisses der Teilaufgabe c) und der mittleren Strahlenbelastung in Deutschland von 4,0 mSv pro Jahr.

Lösung:

a) Durchdringungsvermögen von Beta- und Gamma-Strahlung beachten

b) Halbwertszeit des Zerfalls wirkt sich nicht aus, aber durch Ausscheiden ist die Cs-Menge im Körper nach einem Jahr auf weniger als ein Achtel der anfänglichen Menge gesunken.

c) $$H = q \cdot \frac{E}{m} = 1 \cdot \frac{0{,}4 \cdot 0{,}25 \cdot 600 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}18 \cdot 10^{6} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J}{75\, kg} = \underline{\underline{2{,}38\, \mu Sv}}$$

d) $$\frac{9{,}8 \cdot 10^{3}}{600} = 16{,}3 \quad ; \quad 16{,}3 \cdot 2{,}38\, \mu Sv = 39\, \mu Sv = 0{,}039\, mSv$$

Die zusätzliche Belastung beim Verzehr von 250g macht ein Hundertstel der natürlichen Strahlenbelastung aus. Beim Verzehr von 25kg hoch belastetem Wildschweinfleisch pro Jahr würde die Strahlenbelastung verdoppelt, wodurch sie aber immer noch nicht größer wäre als die natürliche Belastung in anderen Gebieten der Erde.

➔ Genauso wie mit Halbwertszeiten kann man auch mit anderen Halbwerts-Größen rechnen.

Aufgabe 9.140:

a) Gammastrahlung soll durch Bleiplatten abgeschirmt werden. Durch ein 13 mm dicke Bleiplatte gelangt noch die Hälfte der auf einer Seite eintretenden Gammaquanten. Wie viele solche Bleiplatten müsste man hintereinander legen, damit mindestens 99% der auftreffenden Gammastrahlung abgeschirmt wird.

b) Die Abschirmung von Neutronen erfordert erhebliche Materalstärken. Eine 1,0 m dicke Betonwand lässt nur noch 0,01% der auftreffenden Neutronen durch. Wie dick ist eine Betonwand, die genau die Hälfte der Neutronen durchlässt?

Lösung:

a) $$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0{,}01 \;\rightarrow\; n = \log_{0{,}5}(0{,}01) = \underline{6{,}6}$$

Man müsste also mindestens 7 solche Bleiplatten hintereinander legen.

b) $$0{,}5^{n} = 0{,}0001 \;\rightarrow\; n = {}_{0{,}5}\log(0{,}0001) = \underline{13{,}3} \;\rightarrow 1{,}0\, m : 13{,}3 = \underline{7{,}5\, cm}$$

9.2 C14-Methode; Altersbestimmung

Der Anteil des Radioisotops C14 (Halbwertszeit 5730 a) in der Atmosphäre ist relativ gut konstant, und zwar aus folgendem Grund.

Mechanismus

In der oberen Atmosphäre prallen kosmische Strahlungsteilchen auf Atomkerne und schlagen aus diesen Neutronen heraus (Spallation).

Diese Neutronen treffen auf Stickstoffkerne und führen zu folgender Reaktion:

$$^{14}_{7}N + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{14}_{6}C + ^{1}_{1}H$$

Das C14 zerfällt durch Beta-Minus-Zerfall wieder zu Stickstoff.

$$^{14}_{6}C \rightarrow ^{14}_{7}N^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_{e}$$

Durch ständige Neubildung und Zerfall stellt sich ein Gleichgewicht ein, dass zu einem konstanten Anteil an C14 in der Atmosphäre führt.

Lebende Organismen nehmen ständig direkt und indirekt Kohlenstoff aus der Atmosphäre auf, weshalb sich im lebenden Organismus dasselbe Verhältnis von C14 zu C12 einstellt wie in der Atmosphäre. Sobald der Organismus stirbt, nimmt er kein neues C14 mehr auf und der Anteil an C14 sinkt gemäß dem Zerfallsgesetz.

➔ Die C14-Methode eignet sich also nur für organisches Material und bestimmt immer die seit dem Tod vergangene Zeit. Man bestimmt also den Zeitpunkt, an dem der Baum gefällt wurde, nicht den Zeitpunkt, an dem das Haus damit gebaut wurde.

☹ Ist die verstrichene Zeit zu lange (länger als 50000a), dann sinkt der C14-Anteil soweit ab, dass nicht mehr sinnvoll gemessen werden kann.

☠ Aktivitätsmessungen sind besonders störanfällig. Sobald die C14-Aktivität in den Bereich der Nullrate (natürliche Radioaktivität der Umgebung) fällt werden die Messungen extrem ungenau und sind nicht mehr sinnvoll.

☺ Weil die Bildung und der Zerfall von C14 nichts mit dem sonstigen Kohlenstoff C12 zu tun hat, gilt die Zerfallsgleichung auch für Teilchen-Verhältnisse, Massen oder Massenverhältnisse.

$$\left(\frac{N_{14}}{N_{12}}\right)=\left(\frac{N_{14}}{N_{12}}\right)_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$m_{14}=m_{14,0} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad \text{bzw.} \qquad \left(\frac{m_{14}}{m_{12}}\right)=\left(\frac{m_{14}}{m_{12}}\right)_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

☺ Weil der Anteil der C14-Atome an den Kohlenstoff-Atomen so klein ist, kann man beim Rechnen auch einfach für die Masse der C12-Atome einfach die Gesamtmasse der Kohlenstoffatome einsetzen. Genauso bei der Teilchenzahl.

$$N_{12} \approx N_C \qquad m_{12} \approx m_C$$

$$\left(\frac{N_{14}}{N_C}\right)=\left(\frac{N_{14}}{N_C}\right)_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{m_{14}}{m_C}\right)=\left(\frac{m_{14}}{m_C}\right)_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Zur Bestimmung des Alters muss man die Gleichungen natürlich nach dem t auflösen.

Fehlerquellen bei der C14-Methode

Voraussetzung für die C14-Methode ist ein konstantes Verhältnis von C14 zu C12 in der Atmosphäre. Alles, was in der Vergangenheit dieses Verhältnis verändert hat führt zu Fehlern in dieser Altersbestimmungsmethode.

- Schwankungen in der Sonnenaktivität, Schwankungen im Erdmagnetfeld oder nahe Supernova beeinflussen den Einfall kosmischer Strahlung und damit den C14 Gehalt der Atmosphäre.
- Die Verbrennung fossiler Brennstoffe (seit mehreren hundert Jahren) trägt C12 ohne C14 in die Atmosphäre ein und verringert so das C14/C12-Verhältnis.
- Kernwaffentests führten zu einem deutlich erhöhten C14-Anteil in der Atmosphäre.

Aufgabe 9.141:

In lebendem Holz findet man unter einer Billion stabiler C12-Atome je ein instabiles C14-Atom (Halbwertszeit 5730a). Ein ausgegrabenes Holzstück, bei dem der Kohlenstoffanteil die Masse 50g hat, zeigt eine Restaktivität von 480 Zerfällen pro Minute.

a) Wie viele C14-Atome sind noch in diesem Holzstück enthalten?

b) Vor wie vielen Jahren starb das Holzstück ab.

Lösung:

a) $A=\lambda\cdot N \;\rightarrow\; N=\frac{A}{\lambda}=\frac{A\cdot T_{1/2}}{ln2}=\frac{(480:60)\,Bq\cdot 5730\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,s}{ln2}=\underline{\underline{2{,}08\cdot 10^{12}}}$

$\frac{0{,}05\,kg}{12{,}01\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{2{,}508\cdot 10^{24}}$ Kohlenstoffatome insgesamt

$2{,}508\cdot 10^{24}:1\;000\;000\;000\;000=\underline{2{,}508\cdot 10^{12}\;=N_0}$ C14-Atome

b)

$N=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=N_0\cdot e^{\frac{-ln2\cdot t}{T_{1/2}}} \;\rightarrow\; t=-\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)\cdot\frac{T_{1/2}}{ln2}=-\ln\left(\frac{2{,}08\cdot 10^{12}}{2{,}508\cdot 10^{12}}\right)\cdot\frac{5730\,a}{ln2}$

$\underline{\underline{t\approx 1{,}5\cdot 10^{3}\,a}}$

Aufgabe 9.142:

Im atmosphärischen Gleichgewicht hat 1,0g Kohlenstoff eine Aktivität von 0,208Bq. Bestimmen Sie das Alter einer Mumie, wenn bei der Mumie die Aktivität von 1,0g Kohlenstoff noch 0,135Bq beträgt.

Lösung:

$A=A_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=A_0\cdot e^{\frac{-ln2\cdot t}{T_{1/2}}} \;\rightarrow\; t=-\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)\cdot\frac{T_{1/2}}{ln2}=-\ln\left(\frac{0{,}135\,Bq}{0{,}208\,Bq}\right)\cdot\frac{5730\mathrm{a}}{ln2}=\underline{\underline{3573\,a}}$

9.3 Tochter-Mutter-Verhältnis; Uran-Blei-Methode

U238 zerfällt über mehrere Schritte in Pb206 $\left(T_{1/2}=4{,}5\cdot 10^{9}\,a\right)$. Ausgehend von der Vermutung, das bei der Bildung eines Gesteins kein Pb206 im Gestein enthalten war, lässt sich aus dem Verhältnis von Pb206 zu U238 das Alter des Gesteins bestimmen.

Geg: $\frac{N_{Pb}}{N_U}$ das Verhältnis der beiden Isotope von oben

Ges: Alter des Gesteins t Lös:

$N_U=N_{U,0}\cdot e^{-\lambda\cdot t}\quad ;\quad N_{Pb}=N_{U,0}-N_U=N_{U,0}-N_{U,0}\cdot e^{-\lambda\cdot t}=N_{U,0}\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot t}\right)$

$\frac{N_{Pb}}{N_U}=\frac{N_{U,0}\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot t}\right)}{N_{U,0}\cdot e^{-\lambda\cdot t}}=\frac{1-e^{-\lambda\cdot t}}{e^{-\lambda\cdot t}}=\frac{1}{e^{-\lambda\cdot t}}-1=e^{\lambda\cdot t}-1$

$$e^{\lambda \cdot t} = \frac{N_{Pb}}{N_U} + 1$$

$$\lambda \cdot t = \ln\left(\frac{N_{Pb}}{N_U} + 1\right)$$ und mit $$\lambda = \frac{ln2}{T_{1/2}}$$

$$t = \ln\left(\frac{N_{Pb}}{N_U} + 1\right) \cdot \frac{T_{1/2}}{ln2}$$

Aufgabe 9.143: Abitur 1979

a) Die Halbwertszeit eines radioaktiven Präparats liegt in der Größenordnung von 10min. Beschreibe eine Methode inklusive Auswertung zur Bestimmung der Halbwertszeit ausschließlich mit Hilfe von Aktivitätsmessungen.

b) Wenn die Halbwertszeit in der Größenordnung von 1000a liegt, muss man zur Bestimmung der Halbwertszeit anders vorgehen. Welche Messungen sind dann auszuführen und wie sind diese auszuwerten? Keine Einzelheiten der Versuchsanordnung!

c) U238 zerfällt zu Pb206 (Halbwertszeit 4,5 Mrd. Jahre). Bestimmen Sie das Massenverhältnis von Blei und Uran, das sich in einer Gesteinsprobe nach einer Zeit von 1,2 Mrd. Jahren einstellt. (Zahlenwerte aus unserer Tabelle)

Lösung:

a) A_0 und zu einem beliebigen Zeitpunkt t die Aktivität A messen

Einsetzen in $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{\frac{-ln2 \cdot t}{T_{1/2}}}$ gibt $T_{1/2} = \frac{-ln2 \cdot t}{\ln(A/A_0)}$

b) Gemessen werden muss die Teilchenzahl N der Probe (z.B. über die Masse und über die Atommasse des Isotops) und die Aktivität A der Probe. Dann ist

$$A = \lambda \cdot N = \frac{ln2}{T_{1/2}} \cdot N \rightarrow T_{1/2} = \frac{ln2 \cdot N}{A}$$

c) $N_U = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ und $N_{Pb} = N_0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)$

$$\frac{m_{Pb}}{m_U} = \frac{m_{A,Pb} \cdot N_{Pb}}{m_{A,U} \cdot N_U} = \frac{m_{A,Pb} \cdot N_0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)}{m_{A,U} \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}} = \frac{m_{A,Pb}}{m_{A,U}} \cdot \left(e^{\lambda \cdot t} - 1\right) = \frac{205,974}{238,051} \cdot \left(e^{\frac{ln2 \cdot 1,2 \cdot 10^9 a}{4,5 \cdot 10^9 a}} - 1\right) = \underline{0,176}$$

Aufgabe 9.144: Abi 2000

Bei Altersbestimmungen in der Geologie spielt die Kalium-Argon-Methode eine große Rolle. Das Nuklid K40 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 1,3 Mrd Jahren. 11% der Zerfälle führen zu stabilem Ar40, der Rest zu stabilem Calcium. Aus geschmolzenem Gestein entweicht das Edelgas Argon durch Diffusion, so dass eine heute untersuchte Probe nur das seit der Erstarrung entstandene Ar40 enthält. Über das Mutter-Tochter-Isotopenverhältnis lässt sich die verstrichene Zeit t seit der Erstarrung bestimmen.

Benötigte Zahlenwerte entnehmen Sie der ausgeteilten Tabelle.

a) Leiten Sie für diese Zeit t die Gleichung $t=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\cdot\ln\left(1+\frac{N_A}{0{,}11\cdot N_K}\right)$ her. Dabei ist $T_{1/2}$ die Halbwertszeit für den Zerfall von K40. N_A ist die Anzahl der Ar40-Atome in der Probe und N_K die Anzahl der K40 Atome.

b) Aus dem Nördlinger Ries wird eine Gesteinsprobe genommen. Die Masse des Ar40 in der Probe wird zu 0,028 mg bestimmt. Die Messung der Aktivität des enthaltenen K40 ergibt 7,7 kBq. Berechnen Sie N_A und N_K in der Probe. Vor wie vielen Jahren erstarrte das Gestein?

Lösung:

$$N_K=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}\quad;\quad N_A=0{,}11\cdot(N_0-N_K)=0{,}11\cdot N_0\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot t}\right)$$

$$\frac{N_A}{0{,}11\cdot N_K}=\frac{0{,}11\cdot N_0\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot t}\right)}{0{,}11\cdot N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}}=\frac{1-e^{-\lambda\cdot t}}{e^{-\lambda\cdot t}}=e^{\lambda\cdot t}-1$$

a)

$$e^{\lambda\cdot t}=1+\frac{N_A}{0{,}11\cdot N_K}\ \rightarrow\ \lambda\cdot t=\ln\left(1+\frac{N_A}{0{,}11\cdot N_K}\right)\ \rightarrow\ t=\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(1+\frac{N_A}{0{,}11\cdot N_K}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{t=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\cdot\ln\left(1+\frac{N_A}{0{,}11\cdot N_K}\right)}$$

b)

$$N_A=\frac{m}{m_A}=\frac{0{,}028\cdot 10^{-6}\,kg}{39{,}96\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{4{,}22\cdot 10^{17}}$$

$$A_K=\lambda\cdot N_K\ \rightarrow\ N_K=\frac{1}{\lambda}\cdot A_K=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\cdot A_K=\frac{1{,}27\cdot 10^9\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,s}{\ln 2}\cdot 7{,}7\cdot 10^3\,Bq=\underline{4{,}45\cdot 10^{20}}$$

Einsetzen in die Formel gibt ein Alter von 15,7 Mio Jahren.

Aufgabe 9.145:

Eine Probe von ca. 1mg besteht aus einem Isotop der ungefähren Massenzahl 200. In einem Kalorimeter produziert die Probe eine Wärmeleistung von 4,7nW. Die Probe hat eine Aktivität von 10,9kBq.

a) Schätzen Sie aus den gegebene Daten die Halbwertszeit der Probe ab.

b) Welche Energie (in MeV) wird etwa pro Zerfall frei?

Lösung:

a)
$$N \approx \frac{1 \cdot 10^{-6}\,kg}{200 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{3{,}01 \cdot 10^{18}}$$

$$A = \lambda \cdot N = \frac{ln2}{T_{1/2}} \cdot N \;\rightarrow\; T_{1/2} = \frac{ln2 \cdot N}{A} \approx \frac{ln2 \cdot 3{,}01 \cdot 10^{18}}{10{,}9 \cdot 10^{3}\,Bq} = \underline{\underline{1{,}91 \cdot 10^{14}\,s = 6{,}07 \cdot 10^{6}\,a}}$$

b) $10{,}9 \cdot 10^{3}$ Zerfälle pro Sekunde produzieren $4{,}7\,nJ$

$$Q = \frac{4{,}7\,nJ}{10{,}9 \cdot 10^{3}} = 4{,}3 \cdot 10^{-13}\,J = \underline{\underline{2{,}7\,MeV}}$$

Aufgabe 9.146:

Die Aktivität lebenden Holzes beträgt aufgrund seines C14-Gehalts 0,208Bq pro Gramm Kohlenstoff.

a) Bestimmen Sie das Alter von Holz, das eine Aktivität von 6,5 Zerfällen pro Minute je Gramm Kohlenstoff aufweist.

b) Eine 0,25g Kohlenstoffprobe aus dem Buch Jesaja (am Toten Meer gefunden) weist eine Aktivität von 153 Zerfällen pro Stunde auf. Bestimme das Alter des Bibeltextes.

Lösung:

a)
$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{\frac{-ln2 \cdot t}{T_{1/2}}} \;\rightarrow\; t = -\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \cdot \frac{T_{1/2}}{ln2} = -\ln\left(\frac{6{,}5 : 60\,Bq}{0{,}208\,Bq}\right) \cdot \frac{5730\text{a}}{ln2} = \underline{\underline{5393\,a}}$$

b) Auf ein Gramm bezogen $A = 4 \cdot 153 : 3600\,Bq = \underline{0{,}17\,Bq}$

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{\frac{-ln2 \cdot t}{T_{1/2}}} \;\rightarrow\; t = -\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \cdot \frac{T_{1/2}}{ln2} = -\ln\left(\frac{0{,}170\,Bq}{0{,}208\,Bq}\right) \cdot \frac{5730\text{a}}{ln2} = \underline{\underline{1668\,a}}$$

9.4 Abi mit Lösung

Aufgabe 9.147: Abi ????

1991 wurde in den Ötztaler Alpen eine mumifizierte Leiche (Ötzi) gefunden. Zur Altersbestimmung wurde die C14-Methode eingesetzt.

a) Erklären Sie, weshalb C14 (Halbwertszeit 5730a) Beta-Minus-instabil ist und geben Sie die Zerfallsgleichung an.

b) Die Aktivität der Ötzi-Probe betrug 58% der Aktivität eines lebenden Organismus (pro Gramm Kohlenstoff). Berechnen Sie vor wie vielen Jahren Ötzi gestorben ist.

c) Andere Untersuchungsmethoden, die genauer arbeiten, ergeben ein Alter von 5300 Jahren. Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung des Wertes aus b) von diesem genaueren Wert und geben Sie eine plausible Erklärung für das fehlerhafte Arbeiten der C14-Methode.

Lösung:

a) C14 hat zu viele Neutronen, deshalb ist der Potentialtopf der Neutronen höher aufgefüllt als der von den Protonen. Durch Umwandlung eines Neutrons in ein Proton wird ein niedrigeres Energie-Niveau des Kerns erreicht.

$$^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$$

b) $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{\frac{-ln2 \cdot t}{T_{1/2}}} \rightarrow t = -\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) \cdot \frac{T_{1/2}}{ln2} = -\ln(0{,}58) \cdot \frac{5730\text{a}}{ln2} = \underline{\underline{4503\,a}}$

c) $\frac{4503}{5300} = \underline{0{,}85}$ d.h. die Abweichung beträgt 15%

Der C14-Anteil am Kohlenstoff muss zu Ötzis Zeiten höher gewesen sein. Deshalb ist jetzt noch mehr C14 vorhanden, es scheint also noch nicht so viel C14 zerfallen zu sein, und wir halten die Leiche für jünger als sie ist.

Aufgabe 9.148: Abi ????

Kalium 40 zerfällt mit einer Halbwertszeit von $1{,}3 \cdot 10^9 a$ und ist in der Milch enthalten. Der Rest des Kaliums ist Kalium 39 (stabil). 1kg Milch enthält insgesamt 1,5g Kalium. Die Milch hat eine Aktivität von 60Bq. Beim Rechnen schätzen wir die Atommassen der beiden Kaliumisotope auf 39 bzw. 40u.

a) Wie viele K40-Atome sind in 1kg Milch enthalten? Welche Masse haben diese Atome?

b) Zu wie viel Prozent besteht das Milch-Kalium aus K40?

Lösung:

a) $A = \lambda \cdot N \rightarrow N = \frac{A}{\lambda} = \frac{60\,Bq}{\left(\frac{ln2}{1,3\cdot 10^9 \cdot 365,25 \cdot 24 \cdot 3600\,s}\right)} = \underline{\underline{3,55\cdot 10^{18}}}$

$m_{40} = 3,55\cdot 10^{18} \cdot 40 \cdot 1,66\cdot 10^{-27}\,kg = \underline{\underline{0,24\cdot 10^{-6}\,kg}}$

b) $\frac{m_{40}}{m_K} = \frac{0,24\cdot 10^{-6}\,kg}{1,5\cdot 10^{-3}\,kg} = \underline{\underline{0,00016 = 0,016\,\%}}$

Aufgabe 9.149: Nach Abi 2014

Überall in der Raumluft findet sich ein Gemisch aus radioaktivem Radon 222 (Halbwertszeit 3,8 d) und seinen Zerfallsprodukten. In einem geschlossenen leeren Kellerraum wird über einen längeren Zeitraum eine mittlere Rn222-Aktivität von 358 Bq pro Kubikmeter Raumluft festgestellt. Der Raum ist 4,0m lang, 3,0m breit und 2,5m hoch.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Rn222-Atome, die in einem Kubikmeter des Kellerraums vorhanden sind, und vergleichen Sie diese mit der Anzahl von $3\cdot 10^{25}$ Luftteilchen pro Kubikmeter.

b) Das Rn222-Gas dringt fortwährend durch die Wände und durch den Boden in den Keller ein, so dass die Strahlenbelastung im Raum nicht zurückgeht. Nehmen Sie vereinfachend an, dass die Aktivität konstant 358 Bq pro Kubikmeter Raumluft beträgt und im Laufe eines Tages keine Raumluft aus dem Keller entweicht. Berechnen Sie, wie viel Gramm Rn222 pro Tag in den Kellerraum einströmen.

Eine Person im Kellerraum atmet mit der Raumluft das Edelgas Rn222 ein; dieses wird fast vollständig wieder ausgeatmet. Das Zerfallsprodukt Polonium ist dagegen ein Metall. Po218-Atome lagern Sich an Staubteilchen der Luft an und werden ebenso eingeatmet. Po218 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 3,1 min unter Emission eines Alpha-Teilchens der kinetischen Energie 6,0 MeV.

c) Begründen Sie jeweils kurz:

ci) Trotz der wesentlich kürzeren Halbwertszeit ist die Aktivität von Po218 in der Raumluft nicht größer als die von Rn222.

cii) Von eingeatmetem Po218 geht eine höhere Stahlenbelastung aus als von eingeatmetem Rn222.

d) Alpha-Strahlung besitzt eine hohe biologische Wirksamkeit. Ein Alpha-Teilchen des Po218-Zerfalls gibt beim Durchqueren des menschlichen Gewebes auf einer Strecke der Länge 2,0 nm im Mittel die Energie 350eV ab. Berechnen sie die Reichweite des Alpha-Teilchens und vergleichen Sie diese mit dem Durchmesser einer Zelle von rund 20 μm.

Lösung:

a) $A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N \rightarrow N = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot A = \frac{3{,}8 \cdot 24 \cdot 3600\,s}{\ln 2} \cdot 358\,Bq = \underline{\underline{0{,}17 \cdot 10^9}}$

Vergleich: $\frac{3 \cdot 10^{25}}{0{,}17 \cdot 10^9} = \underline{1{,}8 \cdot 10^{17}}$; Es sind also ca. 180 Billiarden mal so viel Luftteilchen in der Raumluft wie Rn222-Atome.

b) Anzahl der Zerfälle im ganzen Kellerraum pro Tag:

$$358 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2{,}5 \cdot 3600 \cdot 24 = \underline{0{,}928 \cdot 10^9}$$

Eindringendes Radium pro Tag:

$$m = 0{,}928 \cdot 10^9 \cdot 222 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg = \underline{3{,}4 \cdot 10^{-16}\,kg}$$

ci) Jedes Poloniumatom ist aus einem Radonatom entstanden. Damit ein Poloniumatom zerfallen kann muss also zuerst ein Radonatom zerfallen. Deshalb kann die Anzahl der Poloniumzerfälle auf Dauer nicht größer sein als die Anzahl der Radonzerfälle.

cii) Da eingeatmetes Radon auch wieder ausgeatmet wird, ist die Radon-Aktivität in der Lunge nicht größer als in der Raumluft. Eingeatmete Staubteilchen lagern sich aber an den Wänden der Atemwege und der Lunge ab, wodurch sich Polonium anreichert. Die Poloniumkonzentration im Körper ist deshalb höher als in der Raumluft und das Polonium verbleibt im Körper bis es zerfällt.

d) Mittlere Reichweite: $\Delta x = \frac{6{,}0 \cdot 10^6\,eV}{350\,eV} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-9}\,m = \underline{34\,\mu m}$

Das ist das 1,7-fache eines Zell-Durchmessers. Das Alpha-Teilchen gibt also in den ersten beiden durchquerten Zellen seine Energie vollständig ab.

Aufgabe 9.150: Abi 2003; Altersbestimmung mit Tritium

Bei Bohrungen in Gletscher- bzw. Grönlandeis werden Eisproben aus Schichten verschiedener Tiefe entnommen. Ihr Alter lässt sich mit Hilfe ihres Tritiumgehalts bestimmen.

Das Nuklid Tritium H3 ist in der Atmosphäre auf Grund fehlender natürlicher Erzeugungsprozesse fast nicht vorhanden. In den 60er Jahren wurde es jedoch durch Kernwaffentests in höherem Maße freigesetzt. H3 ist radioaktiv (Halbwertszeit 12,3 Jahre) und geht durch Beta-Minus-Zerfall in das stabile Edelgasisotop He3 über.

Das Zerfallsprodukt kann das Eis nicht verlassen und reichert sich darin an. Daher kann zur Altersbestimmung der Proben das Anzahlverhältnis von Mutter- und Tochterkernen des Tritiumzerfalls verwendet werden.

a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass zum Zeitpunkt des Tritiumeinschlusses kein He3 im Eis vorhanden war. Weisen Sie nach, dass dann für das Anzahlverhältnis k von Mutter- zu Tochterkernen

$$k = \frac{1}{e^{\lambda \cdot t} - 1}$$

gilt, wobei λ die Zerfallskonstante für Tritium ist. Welches Alter ergibt sich für eine Eisprobe, bei der k = 0,14 gemessen wird?

b) Ist das tatsächliche Alter der Probe größer oder kleiner als der berechnete Wert, wenn die zum Zeitpunkt der Entstehung der Probe bestehende He3 Konzentration nicht vernachlässigbar ist? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Nennen Sie zwei Gründe, warum die Tritiummethode zur Altersbestimmung von Eisschichten, die deutlich älter als 60 Jahre sind, nicht geeignet ist.

Lösung:

$$N_T = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad ; \quad N_{He} = N_0 - N_T = N_0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)$$

a) $$k = \frac{N_T}{N_{He}} = \frac{N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{N_0 \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)} = \frac{e^{-\lambda \cdot t}}{1 - e^{-\lambda \cdot t}} = \frac{e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{\lambda \cdot t}}{\left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right) \cdot e^{\lambda \cdot t}} = \frac{1}{e^{\lambda \cdot t} - 1}$$

Damit ist der gesuchte Term gefunden. k = 0,14 einsetzen gibt:

$$k = \frac{1}{e^{\lambda \cdot t} - 1} \quad \rightarrow \quad e^{\lambda \cdot t} = \frac{1}{k} + 1 = \frac{1}{0{,}14} + 1 = \underline{8{,}143}$$

$$\lambda \cdot t = \ln 6{,}143 \;\rightarrow\; t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln 8{,}143 = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln 8{,}143 = \frac{12{,}3\,a}{\ln 2} \cdot \ln 8{,}143 = \underline{\underline{37\,a}}$$

b) Ohne das bereits vorhandene He3 hätte es länger gedauert, bis das gemessene He3 entstanden wäre. Diese längere Zeitdauer ist die berechnete, deshalb ist das tatsächliche Alter kleiner als das gemessene.

c) 1. Die Halbwertszeit von Tritium ist nur ca. 12 Jahre. Nach mehr als 5 Halbwertszeiten ist für genaue Messungen der Tritiumanteil zu klein geworden.

2. Vor den Kernwaffentests gab es zu wenig Tritium in der Atmosphäre, so dass im Eis auch zu wenig eingeschlossen wurde um sinnvoll messen zu können.

Aufgabe 9.151: Abi 1999

Am 15. Oktober 1997 startete die Raumsonde Cassini zum Saturn. Da Solarzellen im sonnenfernen Weltraum nicht ausreichen, hat Cassini Plutonium zur Energieversorgung an Bord. Die α-Strahlung des verwendeten Isotops Pu238 dient als Wärmequelle für Thermoelemente, die elektrische Energie erzeugen. Diese Stromquelle wird im Folgenden kurz als Isotopengenerator bezeichnet.

a) Geben Sie die Reaktionsgleichung für den α-Zerfall von Pu238 an.

Beim Start befanden sich 28,8 kg Pu238 an Bord von Cassini. Zu diesem Zeitpunkt lieferte der Isotopengenerator eine elektrische Leistung von 888 W. Die Halbwertszeit von Pu238 beträgt 87,7 Jahre.

b) Bestimmen Sie die Aktivität des mitgeführten Plutoniums beim Start der Sonde Cassini. (Kontrolle: ca. 18 300 TBq)

c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad η des Isotopengenerators, wenn beim α-Zerfall eines Pu238-Kerns 5,59 MeV frei werden.

d) Welche elektrische Leistung kann der Isotopengenerator zum Zeitpunkt der Ankunft der Sonde beim Saturn im Juli 2004 (6,75 Jahre nach dem Start) noch liefern, wenn der Wirkungsgrad als unverändert angenommen wird?

Lösung:

a) ${}^{238}_{94}Pu$ → ${}^{234}_{92}U^{2-}$ + ${}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

b) Atommasse schätzen wir auf 238u

$$N=\frac{m}{m_{Pu}} \quad ; \quad A=\lambda\cdot N=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot\frac{m}{m_{Pu}}=\frac{\ln 2\cdot 28{,}8\,kg}{87{,}7\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,s\cdot 238\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{\underline{1{,}83\cdot 10^{16}\,Bq}}$$

c) 888 W macht pro Sekunde 888 J an Nutzenergie. Die Aktivität gibt die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde, mal den Q-Wert gibt die insgesamt freiwerdende Energie.

$$\eta=\frac{E_{nutz}}{E_{ges}}=\frac{888\,J}{1{,}83\cdot 10^{16}\cdot 5{,}59\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}=\underline{\underline{0{,}054}}$$

Der Wirkungsgrad ist also ca. 5,4%.

d) $P=P_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=888\,W\cdot e^{-\frac{\ln 2}{87{,}7\,a}\cdot 6{,}75\,a}=\underline{\underline{842\,W}}$

Aufgabe 9.152: Abi 2005; C14-Methode

Unter dem Einfluss kosmischer Strahlung entstehen in der Atmosphäre schnelle Neutronen. Trifft ein solches Neutron auf einen Stickstoffkern N14, so kommt es gelegentlich zur Kernumwandlung in das Kohlenstoffisotop C14.

a) Geben Sie die Reaktionsgleichung an.

C14 ist radioaktiv. Es zerfällt unter Aussendung eines Beta-Minus-Teilchens mit einer Halbwertszeit von ca. 5700 Jahren.

b) Erläutern Sie die Entstehung des Beta-Minus-Teilchens und geben Sie die Zerfallsgleichung beim C14-Zerfall an. Die entstandenen Beta-Minus-Teilchen besitzen keine einheitliche Energie. Skizzieren Sie das Energiespektrum der Beta-Minus-Teilchen und erklären Sie sein Zustandekommen.

In der Atmosphäre stellt sich zwischen dem radioaktiven und dem stabilen Kohlenstoff ein Gleichgewicht ein, so dass pro Gramm Kohlenstoff 15,3 Zerfälle pro Minute stattfinden. In diesem Gleichgewichtsverhältnis findet man den radioaktiven Kohlenstoff auch in lebenden Organismen. Beim Absterben des Organismus hört jegliche Aufnahme von Kohlenstoff auf und die Aktivität nimmt im Lauf der Zeit ab.

c) In einem alten Holzstück ist Kohlenstoff der Masse 50 g enthalten. Darin berägt der C14-Anteil 4,4 billionstel Gramm. Berechnen Sie die Anzahl der darin enthaltenen

C14-Atome und damit die Aktivität pro 1 g Masse dieser Probe aus altem Holz. (Kontrolle: A = 0,015 Bq pro Gramm)

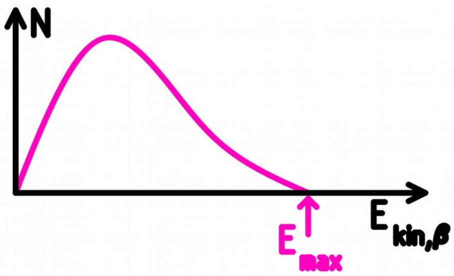
d) Schätzen Sie mit Hilfe der Halbwertszeit ab, ob diese Probe älter als 20 000 a sein kann.

Lösung:

a) ${}^{1}_{0}n + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{14}_{6}C^{-} + {}^{1}_{1}p^{+}$

b) Im Kern wandelt sich - vermittelt durch die schwache Wechselwirkung - ein Neutron in ein Proton und ein Elektron um, dabei entsteht noch ein Anti-Elektronneutrino.

$${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$$



Bei den Beta-Minus-Teilchen kommen alle möglichen Energien bis zu einer maximalen Energie vor. Das liegt daran, dass bei dem Zerfall noch ein drittes Teilchen entsteht, und die Energieaufteilung deshalb nicht durch die Impulserhaltung vorgegeben ist. Die freiwerdende Energie kann sich so auf viele verschiedene Arten auf die drei Reaktionsprodukte verteilen.

c) $$N_{14} = \frac{m}{m_{14}} = \frac{4{,}4 \cdot 10^{-15}\,kg}{14 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{\underline{1{,}89 \cdot 10^{11}}}$$

$$A = \frac{1}{50} \cdot \lambda \cdot N = \frac{1}{50} \cdot \frac{\ln 2}{5700 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,s} \cdot 1{,}89 \cdot 10^{11} = \underline{\underline{14{,}6\,mBq}}$$

d) Aktivität beim Tod pro Gramm: $A_0 = \frac{15{,}3}{60\,s} = \underline{\underline{0{,}255\,Bq}}$

Aktivität nach 20 000 Jahren: $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 0{,}255\,Bq \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5700\,a} \cdot 20000\,a} = \underline{\underline{22{,}4\,mBq}}$

Die tatsächliche Aktivität ist deutlich kleiner, also ist die Probe wahrscheinlich noch älter als 20 000 Jahre.

Aufgabe 9.153: Abi 2004; Kernzerfall

Das gasförmige radioaktive Rn220 entsteht durch zwei aufeinander folgende Zerfälle aus Th228.

a) Geben Sie die dabei entstehenden Zerfallsprodukte an.

t in s	0	30	60	120	180
I(t) in pA	30	21	14	6,6	3,0

Der Zerfall von Rn220 soll nun mit Hilfe einer Ionisationskammer untersucht und damit eine Gesetzmäßigkeit des radioaktiven Zerfalls festgestellt werden. Ein Experiment ergibt die nebenstehende Messtabelle für die Ionisationsstromstärke in Abhängigkeit von der Zeit.

b) Zeichnen Sie zu der Messreihe ein Diagramm, in dem ln(I(t)/I(0)) gegen t aufgetragen wird.

c) Begründen Sie, dass die Ionisationsstromstärke I(t) direkt proportional zur momentanen Teilchenzahl N(t) an noch nicht zerfallenen Rn220-Kernen ist.

Die sich ergebende Gerade in Teilaufgabe b) ist eine Konsequenz des Zerfallsgesetzes. Wegen der Proportionalität aus c) gilt ein Zerfallsgesetz für die Ionisationsstromstärke mit der Zerfallskonstante von Rn220.

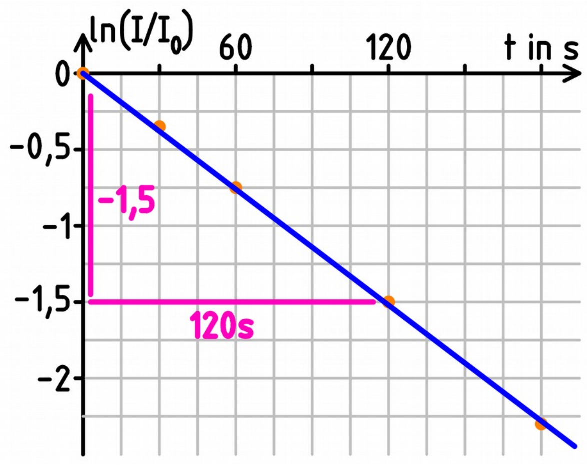
d) Bestimmen Sie mit Hilfe des Diagramms aus b) die Zerfallskonstante und damit die Halbwertszeit von Rn220.

e) Das zur Messung der Ionisationsstromstärke benutzte Messgerät zeigt praktisch keinen Ausschlag mehr an, wenn die Stromstärke unter 1/64 der Anfangsstromstärke I(0) sinkt. Berechnen Sie damit die bei diesem Experiment sinnvolle Gesamtdauer in Minuten.

Lösung:

a) Aus dem Th228 entsteht ein Ra224 und ein Alpha-Teilchen und aus dem Ra224 entsteht ein Rn220 und ein Alpha-Teilchen.

b) siehe Bild



c) Wegen A = λ·N ist die Aktivität, also die Anzahl von Zerfällen pro Sekunde proportional zu Teilchenzahl N. Da Anzahl der Strahlungsteilchen ist proportional zur Anzahl der Ionisationen und deshalb auch zur Ionisationsstromstärke. -> Beh.

d) $I = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\lambda \cdot t$

Deshalb ist -λ die Steigung im Diagramm.

$$-\lambda=\frac{-1{,}5}{120\,s}=-0{,}0125\,s^{-1}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\lambda=0{,}0125\,s^{-1}}}\ ;\quad T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{\ln 2}{0{,}0125\,s^{-1}}=\underline{\underline{55\,s}}$$

e) $$I=\frac{1}{64}\cdot I_0=I_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}\ \rightarrow\ t=-\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\left(\frac{1}{64}\right)=-\frac{1}{0{,}0125\,s^{-1}}\cdot\ln\left(\frac{1}{64}\right)=\underline{\underline{333\,s}}$$

Man kann also etwa 5½ min lang messen.

Aufgabe 9.154: Abi 2009; Radiologische Untersuchung von Mondgestein

Bei den Apollo-Missionen wurden von Astronauten einige Kilogramm Mondgestein zur Erde gebracht. Viele dieser Steine enthalten eine sehr kleine Menge des radioaktiven Isotops Rb87. Dieses besitzt die Atommasse 86,909181 u und zerfällt mit einer Halbwertszeit von 48,8 Mrd. Jahre in das stabile Strontium-Isotop Sr87.

a) Geben Sie die Reaktionsgleichung für diesen Zerfall an.

b) Berechnen Sie die gesamte Reaktionsenergie.

c) Die Mondgesteinsproben enthielten weniger als 100 µg Rb87. Berechnen Sie die Aktivität einer Probe, die 100 µg Rb87 enthält. Begründen Sie, warum eine genaue Altersbestimmung durch Aktivitätsmessung kaum möglich ist, wenn wie hier die Aktivität der Probe sehr gering ist.

Mithilfe eines Massenspektrometers kann man für eine Gesteinsprobe das Verhältnis der Zahl N(Rb) der Rb87-Atome zur Zahl N(Sr) der Sr87-Atome bestimmen.

d) Erläutern Sie anhand einer geeigneten Skizze einen möglichen Aufbau und die Funktionsweise eines Massenspektrometers.

Aufgrund des Zerfalls von Rb87 verändert sich das Verhältnis N(Rb) : N(Sr) mit der Zeit.

e) Nehmen Sie zunächst an, dass sich in einer Gesteinsprobe zum Zeitpunkt der Entstehung $4{,}0\cdot 10^{17}$ Atome des Isotops Rb87 und keine Atome des Isotops Sr87 befinden. Übertragen und vervollständigen Sie die nebenstehende Tabelle.

t	0	$1\cdot T_{1/2}$	$2\cdot T_{1/2}$	$3\cdot T_{1/2}$	$4\cdot T_{1/2}$
N(Rb)	$4{,}0\cdot 10^{17}$				
N(Sr)	0				
N(Rb) : N(Sr)	—				

f) Zeichnen Sie mithilfe der Daten aus Teilaufgabe e) ein Diagramm, in dem das Verhältnis N(Rb) : N(Sr) gegen die Zeit t aufgetragen wird.

Bei einer Probe des Mondgesteins wurde für das Verhältnis N(Rb) : N(Sr) der Wert 0,19 gemessen.

g) Welcher Wert ergibt sich aus dem Diagramm von Teilaufgabe f) für das Alter des Gesteins.

Das Ergebnis aus Teilaufgabe g) ist deutlich zu groß (geeignete Methoden führen zu 3,2 Mrd. Jahren), da nicht berücksichtigt wurde, dass zum Zeitpunkt der Entstehung bereits Sr87 im Gestein vorhanden war.

h) Wie verändert sich der Verlauf des Diagramms aus Teilaufgabe f), wenn man dies berücksichtigt? Erklären Sie, warum man damit ein geringeres Alter erhält, als in Teilaufgabe g) ermittelt wurde.

Lösung:

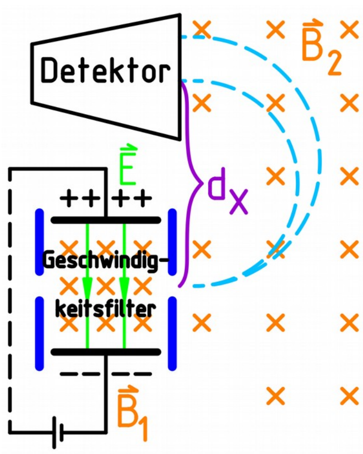
a) $^{87}_{37}Rb \rightarrow {}^{87}_{38}Sr^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$

b) $\Delta E = (m_{Rb} - m_{Sr}) \cdot c^2 = (86{,}909181 - 86{,}908884) \cdot uc^2 = \underline{\underline{0{,}277\,MeV}}$

c) $A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-9}\,kg}{m_{Rb}} = \frac{\ln 2}{48{,}8 \cdot 10^{9} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,s} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-9}\,kg}{86{,}9 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{\underline{0{,}312\,Bq}}$

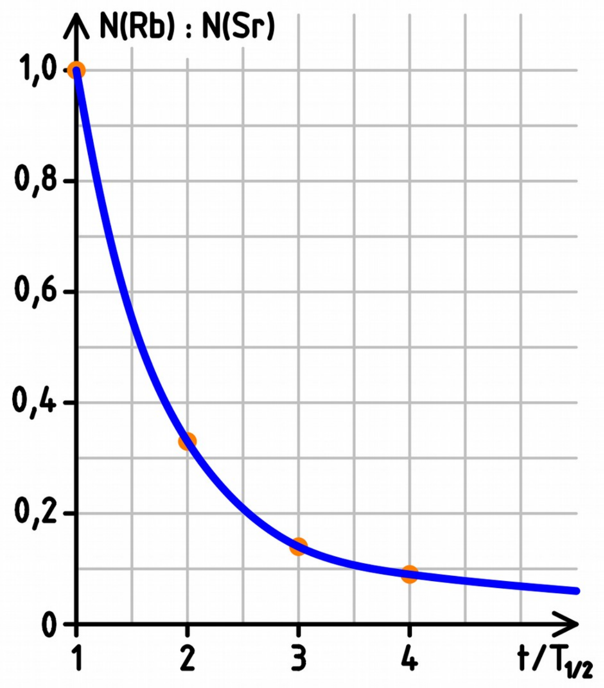
Bei einer sehr geringen Gesamtaktivität der Probe ist der Nulleffekt durch natürliche Radioaktivität größer als die von der Probe gemessene Zählrate. Da der Nulleffekt außerdem noch leicht schwankt erhält man nur noch eine grobe Schätzung der Aktivität der Probe. Einen Messraum völlig frei von natürlicher Radioaktivität zu halten ist kaum möglich.

d) Die Teilchen werden ionisiert und gelangen durch einen Geschwindigkeitsfilter - den geladene Teilchen nur passieren können, wenn sie die Geschwindigkeit v = E/B1 besitzen - in ein Magnetfeld B2. Der Durchmesser der Kreisbahn der einfach geladenen Ionen ist wegen ihrer einheitlichen Geschwindigkeit nur abhängig von ihrer Masse. Der Detektor registriert damit die Anzahl der Teilchen in Abhängigkeit von ihrer Masse.



e) Tabelle

t	0	$1\cdot T_{1/2}$	$2\cdot T_{1/2}$	$3\cdot T_{1/2}$	$4\cdot T_{1/2}$
N(Rb)	$4{,}0\cdot 10^{17}$	$2{,}0\cdot 10^{17}$	$1{,}0\cdot 10^{17}$	$0{,}5\cdot 10^{17}$	$0{,}25\cdot 10^{17}$
N(Sr)	0	$2{,}0\cdot 10^{17}$	$3{,}0\cdot 10^{17}$	$3{,}5\cdot 10^{17}$	$3{,}75\cdot 10^{17}$
N(Rb) : N(Sr)		1	0,333	0,143	0,091



f) Diagramm

g) Aus dem Diagramm liest man ab:

$$t \approx 2{,}6\cdot T_{1/2} = 2{,}6\cdot 48{,}8\cdot 10^{9}\,a = \underline{1{,}27\cdot 10^{11}\,a}$$

Also 127 Mrd. Jahre, viel älter als das Universum.

h) Wenn zu Anfang schon Sr vorhanden ist, sind alle Verhältnisse in Wirklichkeit kleiner als die im gezeichneten Diagramm. Das Diagramm, welches die tatsächlichen Verhältnisse wiedergibt ist also im Vergleich zu f) in y-Richtung gestaucht; deshalb wird der Wert 0,19 schon viel früher erreicht und man erhält ein geringeres Alter.

Aufgabe 9.155: Abi 2011; Radiocarbon-Methode

In Luft ist neben dem stabilen Kohlenstoffisotop C12 auch das radioaktive Isotop C14 mit einem sehr geringen Anteil vorhanden. In der Atmosphäre wird für das Verhältnis der Teilchenzahlen N(C14) : N(C12) der Wert $1{,}2\cdot 10^{-12}$ gemessen. Durch den Stoffwechsel von Pflanzen und Tieren werden beide Nuklide in organische Moleküle eingebaut, so dass sich in Organismen zu deren Lebzeiten das gleiche Mengenverhältnis wie in Luft einstellt.

Nach dem Absterben des Organismus findet kein Austausch von Kohlenstoff mit der Umgebung mehr statt; das radioaktive Nuklid zerfällt und das Teilchenzahl-Verhältnis N(C14) : N(C12) nimmt ab. Auf dieser Tatsache beruht die Altersbestimmung archäologischer Fundstücke aus organischem Material.

a) Geben Sie die Zerfallsgleichung des Beta-Minus-Zerfalls von C14 und den zugrunde liegenden Vorgang im Kern an.

b) Die Beta-Minus-Strahlung weist ein kontinuierliches Energiespektrum auf, obwohl die bei dem Zerfallsprozess frei werdende Gesamtenergie einen festen Betrag hat. Klären Sie diesen scheinbaren Widerspruch auf.

c) Vor der dänischen Insel Seeland wurden mehrere versunkene Wikingerschiffe entdeckt. In einem Stück Holz aus einem dieser Schiffe wurde das Teilchenzahl-Verhältnis N(C14) : N(C12) zu $1{,}06 \cdot 10^{-12}$ bestimmt. Berechnen Sie daraus das Alter des Holzes.

d) Begründen Sie, warum sich die Radiocarbon-Methode nicht zur Bestimmung des Erdalters eignet.

e) Nennen Sie eine wesentliche Annahme, auf der ie Verlässlichkeit der Altersbestimmung mit der Radiocarbon-Methode beruht.

Lösung:

a) $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$

Im Kern zerfällt ein Neutron zu einem Proton, einem Elektron und einem Anti-Elektron-Neutrino.

b) Da es nicht nur zwei Reaktionsprodukte gibt sondern mit dem Neutrino drei, ist die Energieverteilung nicht durch die Impulserhaltung vorgegeben. Die frei werdende Energie kann sich in verschiedenen Verhältnissen auf die drei Reaktionsprodukte verteilen. Deshalb kann das Elektron (Beta-Minus-Teilchen) jeden Energiebetrag bis hin fast zur gesamten frei werdenden Energie erhalten.

c)
$$V = V_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{V}{V_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\lambda \cdot t = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t$$
$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) = -\frac{5730\,a}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{1{,}06}{1{,}2}\right) = \underline{\underline{1025\,a}}$$

d) 1. Die C14-Methode funktioniert nur bei organischem Material, und der Planet (das Gestein) ist nicht organisch.

2. Zum Zeitpunkt der Planetenentstehung waren die Verhältnisse in der Atmosphäre völlig anders als heute, deshalb war der C14-Anteil sicher auch ganz anders als heute.

3. Die C14-Methode ist nur sinnvoll bei einem Alter unter 50 000 Jahren, weil danach nur noch so wenig C14 vorhanden ist, dass sich nicht mehr sinnvoll messen lässt.

e) Die grundlegende Annahme der Methode ist, dass durch ständige Neubildung (kosmische Strahlung; Bildung aus N14) von C14 und anschließenden Zerfall sich in der Atmosphäre ein stabiles Gleichgewicht zwischen C12 und C14 einstellt, welches sich im Verlauf von Jahrtausenden nicht verändert.

Aufgabe 9.156: Abi 2008; Herstellung von Po210

Um Po210 (instabil; Halbwertszeit 138 Tage) künstlich zu erzeugen, setzt man das stabile Isotop Bi209 für kurze Zeit Neutronenstrahlung aus. Es entsteht ein Zwischenprodukt, das nach einem Beta-Minus-Zerfall mit einer Halbwertszeit von 5,0 Tagen zu Po210 wird. Die emittierten Elektronen haben dabei eine maximale Geschwindigkeit von 0,95 c.

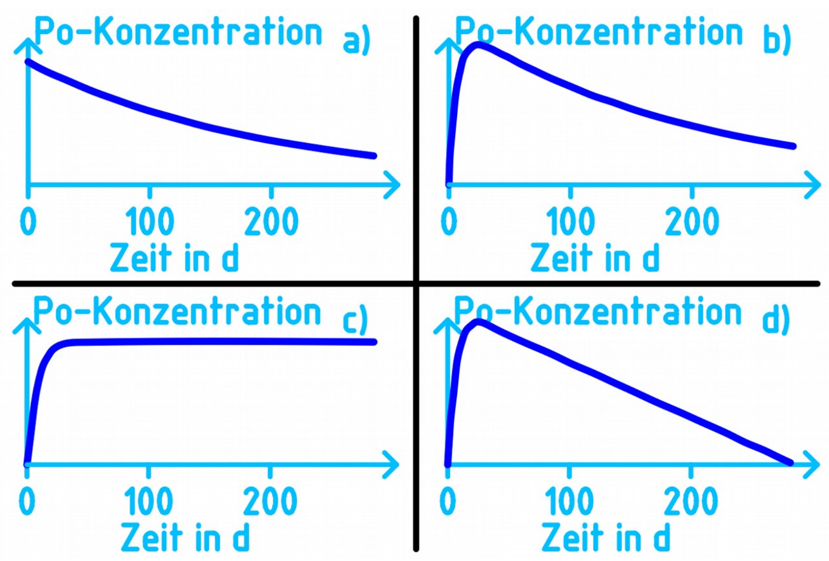
a) Geben Sie die Zerfallsgleichung für den obigen Beta-Minus-Zerfall an.

b) Skizzieren Sie qualitativ das Energiespektrum eines Beta-Minus-Strahlers und erklären Sie den wesentlichen Unterschied zum Energiespektrum eines Alpha-Strahlers.

c) Berechnen Sie die maximale kinetische Energie der emittierten Elektronen.

d) Welcher Anteil des erzeugten Zwischenprodukts ist 15 Tage nach dem Neutronenbeschuss schon zerfallen?

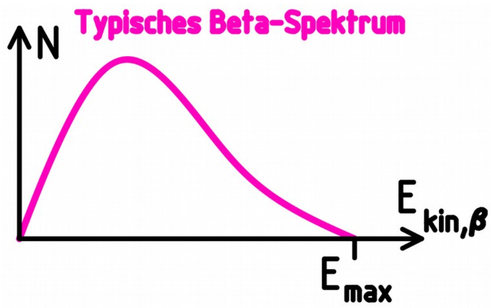
e) In einer Skizze soll qualitativ die Po210-Konzentration in einer Bi209-Probe in Abhängigkeit von der Zeit (in Tagen) nach dem Neutronenbeschuss dargestellt werden. Wählen Sie die geeignete Skizze und begründen Sie Ihre Wahl.



Lösung:

a) $^{210}_{83}Bi \rightarrow ^{210}_{84}Po^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$

b) Ein Beta-Spektrum ist ein kontinuierliches Spektrum bis hin zu einer maximalen Energie. Im Gegensatz dazu ist ein Alpha-Spektrum ein diskretes Spektrum in dem nur wenige Energien vorkommen.



c) $E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{511\,keV}{\sqrt{1-0{,}95^2}} = \underline{1637\,keV}$

$E_{kin} = E - E_0 = 1637\,keV - 511\,keV = \underline{\underline{1126\,keV = 1{,}13\,MeV}}$

d) 15 Tage sind 3 Halbwertszeiten; $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; d.h. $\frac{1}{8}$ der Mutterkerne ist noch da;

d.h. $\frac{7}{8}$ des Zwischenprodukts ist schon zerfallen.

e) Die Halbwertszeit für die Entstehung des Poloniums ist viel kürzer als die Halbwertszeit für den Zerfall des entstandenen Poloniums. Deshalb geschieht die Entstehung schneller als der anschließende Zerfall.

Bild a) kommt nicht in Frage, weil der Zerfall des Zwischenprodukts eine Halbwertszeit von 5 Tagen hat, es dauert also ein paar Wochen, bis die maximale Konzentration entstanden ist. Deshalb kann nicht gleich zu Anfang die maximale Konzentration vorhanden sein.

Bild c) kommt nicht in Frage, weil der Zerfall von Po210 eine Halbwertszeit von 138 Tagen hat. Im Lauf von mehr als 200 Tagen zerfällt also ein erheblicher Teil des entstandenen Poloniums.

Bild d) kommt nicht in Frage, weil der Zerfall exponentiell geschieht und nicht wie im Bild linear. Außerdem sinkt die Konzentration im Lauf von ca. 300 Tagen nicht auf Null sondern ist immer noch über ein Achtel.

Also kommt nur Bild b) in Frage: Schnelle exponentielle Entstehung - im Lauf von wenigen Wochen - und anschließend langsamerer exponentieller Zerfall.

Aufgabe 9.157: Abi 2012; Altersbestimmung mit der C14-Methode

Wandmalereien, wie z.B. die Darstellung in der Chauvet-Höhle in Frankreich, gehören zu den ältesten Kulturleistungen der Menschheit. Ihr Alter kann mit der sogenannten C14-Methode, auch bekannt als Radiokohlenstoff- oder Radiokarbonmethode, bestimmt werden.

Gegebene Atommassen: m(C14) = 14,0032420 u ; m(N14) = 14,0030744 u ; m(H1) = 1,0078252 u

Das Kohlenstoffisotop C14 entsteht, wenn ein Neutron der kosmischen Strahlung in der Atomosphäre auf ein N14-Atom trifft.

a) Stellen Sie die Reaktionsgleichung auf und zeigen Sie, dass es sich um einen exothermen Prozess handelt.

C14 ist radioaktiv und zerfällt mit einer Halbwertszeit von etwa 5730 a durch Beta-Minus-Zerfall.

b) Geben Sie die Gleichung für den C14-Zerfall an. Erklären Sie, wie es möglich ist, dass trotz des Zerfalls das Teilchenzahlverhältnis des instabilen C14-Isotops zum stabilen C12-Isotop in der Atmosphäre konstant bleibt.

Solange Organismen leben, ist in ihnen das Teilchenzahlverhältnis der beiden genannten Kohlenstoffisotope ebenfalls konstant. Danach sinkt der Anteil der C14-Atome aufgrund des Beta-Minus-Zerfalls, was zur Altersbestimmung verwendet werden kann. Einem Höhlenbildnis wird etwas Farbe entnommen und daraus auf chemischem Weg eine Kohlenstoffprobe der Masse 10 mg gewonnen. Die Anzahl der C14-Atome in der Probe ist 13 Millionen.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Masse der C14-Atome einen verschwindend geringen Anteil der Probe ausmacht.

d) Berechnen Sie die Aktivität der Probe und beurteilen Sie, ob sich eine Aktivitätsmessung zur Altersbestimmung dieser Probe eignet, wenn das verwendete Zählrohr eine Nullrate von 10 pro Minute misst.

e) Mit Hilfe eines Massenspektrographen wird festgestellt, dass die Anzahl der C14-Atome in der Probe gegenüber einer Vergleichsprobe aus der Atmosphäre um 97,9% abgenommen hat. Ermitteln Sie daraus das Alter des Höhlenbildes.

f) Bei genauerer Untersuchung stellt sich heraus, dass der C14-Anteil am atmosphärischen Kohlenstoff über einen langen Zeitraum nicht konstant war. Zur Zeit der

Felsmalerei waren mehr Neutronen in der kosmischen Strahlung vorhanden als heute. Begründen Sie, ob das in Teilaufgabe 2.e) berechnete Alter des Höhlenbildes geringer oder höher als das tatsächliche Alter ist.

Lösung:

a) ${}^{1}_{0}n + {}^{14}_{7}N \rightarrow {}^{14}_{6}C^{-} + {}^{1}_{1}p^{+}$

$$Q=(m_n+m_N-m_C-m_H)\cdot c^2=(1{,}008665+14{,}003074-14{,}003242-1{,}007825)\cdot uc^2=\underline{\underline{0{,}626\,MeV}}$$

Da der Q-Wert der Reaktion positiv ist, ist die Reaktion exotherm.

b) ${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N^{+} + e^{-} + \overline{\nu_e}$

Durch ständige Neubildung mit Hilfe von Neutronen der kosmischen Strahlung und permanenten Zerfall stellt sich in der Atmosphäre ein Gleichgewicht ein, deshalb ist der C14-Anteil in der Atmosphäre näherungsweise konstant.

c) Kohlenstoffatome insgesamt: $N_C=\frac{m}{m_C}=\frac{10\cdot 10^{-6}\,kg}{12{,}01\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{5{,}0\cdot 10^{20}}$

Anteil der C14-Atome: $\frac{N_{14}}{N_C}=\frac{13\cdot 10^6}{5{,}0\cdot 10^{20}}=\underline{0{,}000\,000\,000\,0026\,\%}$ ist sehr klein.

d) Aktivität der Probe: $A=\lambda\cdot N=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot N=\frac{\ln 2}{5730\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,s}\cdot 1{,}3\cdot 10^{7}=\underline{\underline{49{,}9\cdot 10^{-6}\,Bq}}$

Nullrate: $A_N=\frac{10}{60\,s}=\underline{0{,}17\,Bq}$

Die Nullrate ist mehrere tausend mal so groß sie Aktivität der Probe, deshalb eignet sich eine Aktivitätsmessung gar nicht.

e) 2,1% = 0,021 ist der noch übrige Anteil.

$$0{,}021\cdot N_0=N=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=N_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t} \rightarrow -\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t=\ln(0{,}021)$$

$$t=-\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\cdot\ln(0{,}021)=-\frac{5730\,a}{\ln 2}\cdot\ln(0{,}021)=\underline{\underline{32\,Tsd.\ \ Jahre}}$$

f) Bei einem höheren C14-Anteil dauert es länger, bis der C14-Anteil auf den gemessenen Wert absinkt. D.h. das tatsächliche Alter ist größer, bzw. das in e) berechnete Alter ist kleiner als das tatsächliche.

10 Energie und Impuls bei Kernreaktionen

Dies ist ein reines Übungskapitel. Es geht um Energiebilanzen, Energieerhaltung und Impulserhaltung. Beim Rechnen müssen sie ein bisschen geschickt sein, weil sie sonst zu viel Zeit verschwenden. Vor der Übung aber zuerst noch ein neuer Begriff.

10.1 Q-Wert einer Reaktion

Atommassen lassen sich sehr genau messen. Deshalb berechnet man die bei Kernreaktionen umgesetzte Energie am genausten mit Hilfe der Masse-Energie-Äquivalenz.

$$\boxed{E = m \cdot c^2}$$

Die freiwerdende Energie wird als kinetische Energie an die Reaktionsprodukte und als Photonenenergie an Gamma-Quanten übertragen. Letztendlich geben diese ihre Energie meist als Wärme an die Umgebung ab. Deshalb nennt man den Betrag der freiwerdenden Energie den Q-Wert der Reaktion. Er ergibt sich zu:

$$Q = \Delta E = E_{vorher} - E_{nachher} = m_{vorher} \cdot c^2 - m_{nachher} \cdot c^2 = (m_{vorher} - m_{nachher}) \cdot c^2$$

$$\boxed{Q = (m_{vorher} - m_{nachher}) \cdot c^2}$$

- ☠ Wenn hier was negatives raus kommt, dann ist die Reaktion entweder energetisch nicht möglich oder es muss Energie investiert werden, um die Reaktion ablaufen zu lassen (endotherme Reaktion).

- ➔ Eventuell an der Reaktion beteiligte Neutrinos berücksichtigen wir in der Rechnung nicht. Die Ruheenergie der Neutrinos ist so klein, dass sich das auf die Genauigkeit gar nicht auswirkt.

- ➔ Bei solchen Rechnungen benutzen wir grundsätzlich die Atommassen, und nicht die Kernmassen. Die Bindungsenergie der inneren Elektronen ist bei großen Atomen so groß (keV), dass sich ohne Berücksichtigung der Elektronenhülle falsche Q-Werte oder sogar falsche Reaktionsrichtungen ergeben.

10.2 Übungen

Aufgabe 10.158:

Das Krypton-Isotop Kr85 ist instabil und zerfällt durch Beta-Minus-Zerfall.

Massen: m(Kr85) = 84,912530u ; m(Tochteratom) = 84,911792u

a) Schreibe die Reaktionsgleichung für den Zerfall auf.

b) Berechne die beim Zerfall freiwerdende Energie.

Im weiteren betrachten wir den Extremfall, dass das Krypton-Atom zu Anfang in Ruhe war, und dass das entstandene Neutrino so gut wie keine Energie mitnimmt und auch keine Gammaquanten entstehen. Die freigewordene Energie verteilt sich also als kinetische Energie auf das Elektron und das entstandene Ion. Für die Masse des Ions setzen wir näherungsweise die Atommasse ein.

c) Bestimme mit Hilfe der Impulserhaltung das Verhältnis der Geschwindigkeiten von Elektron und Ion in Abhängigkeit der Massen der beiden.

d) Bestimme mit Hilfe von c) die Rückstoßenergie des Tochterions. Wie viel Prozent der Energie macht diese Rückstoßenergie aus?

Lösung:

a) ${}^{85}_{36}Kr \rightarrow {}^{85}_{37}Rb^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$

b) Das Elektron schlagen wir zum Rechnen dem Rubidium-Ion zu und erhalten ein neutrales Rubidium-Atom. Als Fehler erhalten wir einen Q-Wert, der um die Ionisierungsenergie des Rubidiums zu groß ist. Der Fehler ist allerdings minimal, und wir gehen beim Rechnen grundsätzlich so vor.

$$Q=\left(m(Kr85)-m(Rb85)\right)\cdot c^2=\left(84{,}912530-84{,}911792\right)\cdot u\cdot c^2=\underline{0{,}687\,MeV}$$

c)
$$p=p'$$
$$0=m_e\cdot v_e+m_R\cdot v_R$$
$$\underline{\underline{\frac{v_e}{v_R}=-\frac{m_R}{m_e}}}$$

d) Wir rechnen mit Beträgen und erhalten

$v_e=\frac{m_R}{m_e}\cdot v_R$ was wir in $E=\frac{1}{2}\cdot m_e\cdot v_e^2+\frac{1}{2}\cdot m_R\cdot v_R^2$ einsetzen. Das gibt

$$E=\frac{1}{2}\cdot m_e\cdot\frac{m_R^2}{m_e^2}\cdot v_R^2+\frac{1}{2}\cdot m_R\cdot v_R^2=\frac{1}{2}\cdot m_R\cdot v_R^2\cdot\left(\frac{m_R}{m_e}+1\right)=E_{kin,R}\cdot\left(\frac{m_R}{m_e}+1\right)$$

$$E_{kin,R}=\frac{E}{\frac{m_R}{m_e}+1}=\frac{0{,}687\cdot 10^6\,eV}{\frac{84{,}911792\,u}{5{,}4858\cdot 10^{-4}\,u}+1}=\underline{\underline{4{,}4\,eV}}$$ Rückstoßenergie

$$\frac{4{,}4\,eV}{0{,}687\cdot 10^6\,eV}=\underline{\underline{0{,}00064\,\%}}$$

Ganz allgemein gilt: Wenn beim Zerfall ein großes und ein sehr kleines Teilchen entstehen, dann nimmt das kleinere Teil den Großteil der Energie mit.

Aufgabe 10.159:

Berechne die freiwerdende Energie beim Beta-Plus-Zerfall von Phosphor30. Beachte, dass ein negativ geladenes Ion entsteht, und also bei den Massen der Reaktionsprodukte noch eine Elektronenmasse berücksichtigt werden muss.

Das beim Zerfall entstehende Positron wird später durch Paarvernichtung mit einem Elektron zerstrahlen. Berechne den Q-Wert einmal ohne Vernichtungsenergie und einmal mit Vernichtungsenergie. Schreibe zuerst die Reaktionsgleichung auf.

Massen: m(P30) = 29,978313u ; m(Tochteratom) = 29,973770u

Lösung:

$${}^{30}_{15}P \rightarrow {}^{30}_{14}Si^{-} + e^{+} + \nu_e$$

ohne Vernichtungsenergie

$$\begin{aligned}Q&=\left(m(P30)-m(Si30)-2\cdot m_e\right)\cdot c^2\\&=\left(29{,}978313-29{,}973770-2\cdot 5{,}486\cdot 10^{-4}\right)\cdot u\cdot c^2=\underline{\underline{3{,}21\,MeV}}\end{aligned}$$

mit Vernichtungsenergie

$$\begin{aligned}Q+2\cdot m_e\cdot c^2&=\left(m(P30)-m(Si30)\right)\cdot c^2\\&=\left(29{,}978313-29{,}973770\right)\cdot u\cdot c^2=\underline{\underline{4{,}232\,MeV}}\end{aligned}$$

Aufgabe 10.160:

Berechne die freiwerdende Energie beim Beta-Minus-Zerfall von Rhenium187. Schreibe zuerst die Reaktionsgleichung auf.

Massen: m(Re197) = 186,955751u ; m(Tochteratom) = 186,955748u

Lösung:

$^{187}_{75}Re \rightarrow {}^{187}_{76}Os^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$

$$Q = (m(Re187) - m(Os187)) \cdot c^2$$
$$= (186{,}955751 - 186{,}955748) \cdot u \cdot c^2 = \underline{\underline{3\,\mathrm{keV}}}$$

Bemerkung: Dies ist ein Beispiel für einen Zerfall, der vom Unterschied der Bindungs-energien in den Atomhüllen gespeist wird. Mit nackten Atomkernen kann dieser Zer-fall nicht ablaufen.

Aufgabe 10.161:

Polonium210 ist instabil und zerfällt durch Alpha-Zerfall.

a) Schreibe die Reaktionsgleichung auf und berechne die beim Zerfall freiwerdende Energie.

b) Bestimme die Rückstoßenergie und Geschwindigkeit des Tochteratoms unter der Annahme, dass das Polonium-Atom zu Anfang in Ruhe war.

Massen: m(Po210) = 209,982858u ; m(Tochteratom) = 205,974449u

Lösung:

a) $^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{206}_{82}Pb^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

$$Q = (m(Po210) - m(Pb206) - m(He4)) \cdot c^2$$
$$= (209{,}982858 - 205{,}974449 - 4{,}0026032) \cdot u \cdot c^2 = \underline{\underline{5{,}408\,MeV}}$$

mit Beträgen gilt $m_\alpha \cdot v_\alpha = m_{Pb} \cdot v_{Pb} \rightarrow v_\alpha = \frac{m_{Pb}}{m_\alpha} \cdot v_{Pb}$

einsetzen in $E = \frac{1}{2} \cdot m_\alpha \cdot v_\alpha^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{Pb} \cdot v_{Pb}^2$ gibt

b) $$E = \frac{1}{2} \cdot m_\alpha \cdot \frac{m_{Pb}^2}{m_\alpha^2} \cdot v_{Pb}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{Pb} \cdot v_{Pb}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{Pb} \cdot v_{Pb}^2 \cdot \left(\frac{m_{Pb}}{m_\alpha} + 1\right) = E_{kin,Pb} \cdot \left(\frac{m_{Pb}}{m_\alpha} + 1\right)$$

$$E_{kin,Pb} = \frac{E}{\left(\frac{m_{Pb}}{m_\alpha} + 1\right)} = \frac{5{,}408 \cdot 10^6\,eV}{\frac{205{,}97}{4{,}00} + 1} = \underline{\underline{103\,\mathrm{keV}}}$$ Rückstoßenergie

$$E_{kin,Pb} = \frac{1}{2} \cdot m_{Pb} \cdot v_{Pb}^2$$

$$v_{Pb}=\sqrt{\frac{2\cdot E_{kin,Pb}}{m_{Pb}}}=\sqrt{\frac{2\cdot 103\cdot 10^3\cdot 1{,}6022\cdot 10^{-19}\,J}{205{,}97\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}}$$

$\underline{\underline{v_{Pb}=3{,}11\cdot 10^5\,m/s}}$ Rückstoßgeschwindigkeit

Aufgabe 10.162:

Radon 222 entsteht durch Alphazerfall.

a) Geben Sie die Zerfallsgleichung bei der das Radon entsteht an.

b) Das beim Zerfall emittierte Alpha-Teilchen hat eine Energie von 4,78 MeV. Bestimme mit Hilfe dieses Zahlenwertes die Rückstoßenergie und damit den Rückstoßimpuls des beim Zerfall entstehenden Rn-Atoms.

c) Zeigen Sie, dass die Zahlenwerte in b) dem Impulserhaltungssatz gehorchen. Versuchen Sie eine klassische und eine relativistische Rechnung.

Lösung:

a) $^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Ra^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

b) $$\Delta E = Q = \left(m_{Ra} - m_{\alpha} - m_{Rn} - 2\cdot m_e\right)\cdot c^2$$
$$=\left(226{,}02536 - 222{,}01753 - 4{,}001506 - 2\cdot 5{,}4858\cdot 10^{-4}\right)\cdot uc^2 = \underline{4{,}87\,MeV}$$

$$E_{Rn} = E_{ges} - E_{\alpha} = 4{,}87\,MeV - 4{,}78\,MeV = \underline{0{,}09\,MeV}$$

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2\cdot m} \rightarrow p_{Rn} = \sqrt{2\cdot E_{kin}\cdot m} = \sqrt{2\cdot 0{,}09\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\cdot 222\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}$$

$\underline{\underline{p_{Rn} = 1{,}036\cdot 10^{-19}\,kg\cdot m/s}}$

c) $$E = E_0 + E_{kin} = 3{,}72712\cdot 10^9\,eV + 4{,}78\cdot 10^6\,eV = \underline{3{,}7319\cdot 10^9\,eV}$$

$$E^2 = p^2\cdot c^2 + E_0^2 \rightarrow p = \sqrt{\frac{E^2 - E_0^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{\left(3{,}7319^2 - 3{,}72712^2\right)\cdot 10^{18}\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\right)^2}{9\cdot 10^{16}\,m^2/s^2}}$$

$p_{\alpha} = \underline{1{,}01\cdot 10^{-19}\,kg\cdot m/s}$

Die Impulse von Alpha-Teilchen und Tochter-Atom sind gleich groß, haben aber verschiedene Richtungen, weshalb der Gesamtimpuls Null bleibt.

Aufgabe 10.163:

Eine mögliche Reaktionsgleichung für die Spaltung eines Urankerns lautet:

$$^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{100}_{40}Zr + {}^{133}_{52}Te + 3\,{}^{1}_{0}n$$

Die beiden Neutronenreichen Spaltprodukte erreichen nach zwei bzw. drei anschließenden Beta-Minus-Zerfällen stabile Endzustände:

$$\ldots \rightarrow {}^{100}_{42}Mo^{2+} + 2\ e^{-} + 2\ \overline{\nu}_e + {}^{133}_{55}Cs^{3+} + 3\ e^{-} + 3\ \overline{\nu}_e + 3\ {}^{1}_{0}n$$

a) Berechne die bei Spaltung und anschließendem Zerfall freiwerdende Energie.

b) Wie viele Spaltungen sind pro Sekunde notwendig, um eine Wärmeleistung von 3,0GW zu erreichen?

c) Wie viel U235 (Masse) muss dann pro Tag gespalten werden? Wie viel auf 4% angereichertes Uran verbraucht der Reaktor dann in einem Jahr?

Entnehme die notwendigen Massen der ausgeteilten Tabelle

Lösung:

a)
$$Q = \left(m_n + m(U235) - m(Mo100) - m(Cs133) - 3 \cdot m_n \right) \cdot c^2$$
$$= \left(1{,}008665 + 235{,}04392 - 99{,}90748 - 132{,}90536 - 3 \cdot 1{,}008665 \right) \cdot u \cdot c^2 = \underline{\underline{199{,}1\,MeV}}$$

b) Pro Sekunde $3{,}0\,GJ = 3 \cdot 10^9\,J$ macht

$$\frac{3 \cdot 10^9\,J}{199{,}1 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,J} = \underline{\underline{9{,}08 \cdot 10^{19}}}$$ notwendige Spaltungen

c) $9{,}08 \cdot 10^{19} \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 235{,}04 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg = \underline{\underline{3{,}06\,kg}}$ U235 pro Tag

$3{,}06\,kg \cdot 365 \cdot 25 = \underline{\underline{27{,}9\,t}}$ angereiertes Uran pro Jahr

Aufgabe 10.164: aus ISB

Ein ruhendes Rn219-Atom zerfalle unter Aussendung eines Alpha-Teilchens. Seine Atommasse beträgt 219,0094748u, die Atommasse des Tochter-Atoms ist 214,9994146u.

a) Geben Sie die Reaktionsgleichung an und berechnen Sie den Q-Wert der Reaktion.

Laut Nuklidtabelle beträgt die kinetische Energie der schnellsten von Rn219 emittierten Alpha-Teilchen 6,82MeV. Bei der Emission dieser schnellsten Alpha-Teilchen tritt keine Gamma-Strahlung auf.

b) Erklären Sie weshalb die schnellsten Alpha-Teilchen eine kleinere Energie als den Q-Wert der Reaktion besitzen.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der gegebenen Energie-Werte die Geschwindigkeiten aller beim Alpha-Zerfall beteiligten Teilchen und bestätigen Sie damit rechnerisch die Gültigkeit des Impulserhaltungssatzes für diese Reaktion.

Allgemein gilt bei jedem Alpha-Zerfall wegen des Impulserhaltungssatzes, dass ein Alpha-Teilchen höchstens die kinetische Energie

$$E_{kin,max,\alpha}=\frac{m_T}{m_T+m_\alpha}\cdot Q \quad \text{mit } m_T \text{ der Masse des Tochterkerns}$$

haben kann.

d) Bestätigen Sie mit Hilfe der Energie-Werte die Gültigkeit dieser Gesetzmäßigkeit für den Alpha-Zerfall von Rn219.

e) Begründen Sie mit Hilfe obiger Gesetzmäßigkeit folgende Merkregel:

> Je leichter ein Alpha-Strahler, desto kleiner ist das Verhältnis $\frac{E_{kin,max,\alpha}}{Q}$

f) Schätzen Sie eine untere Grenze für das Verhältnis aus e) für alle Nuklide der natürlichen Zerfallsreihen ab. Beschreiben Sie wie Sie dabei vorgehen.

<u>Lösung:</u>

a) $^{219}_{86}Rn \rightarrow {}^{215}_{84}Po^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

$$Q=(m(Rn219)-m(Po215)-m(He4))\cdot c^2$$
$$=(219{,}0094748-214{,}9994146-4{,}002603)\cdot u\cdot c^2=\underline{\underline{6{,}95\,MeV}}$$

b) Wegen der Impulserhaltung muss das Tochter-Atom auch einen Impuls und also eine kinetische Energie mitnehmen.

c)

$$v_\alpha=\sqrt{\frac{2\cdot E_{kin,\alpha}}{m_\alpha}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}82\cdot 10^6\cdot 1{,}6022\cdot 10^{-19}\,J}{6{,}64\cdot 10^{-27}\,kg}}=\underline{\underline{1{,}81\cdot 10^7\,m/s}}$$

$$v_{Po}=\sqrt{\frac{2\cdot E_{kin,Po}}{m_{Po}}}=\sqrt{\frac{2\cdot(6{,}95-6{,}82)\cdot 10^6\cdot 1{,}6022\cdot 10^{-19}\,J}{215\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}}=\underline{\underline{3{,}41\cdot 10^5\,m/s}}$$

Für die Masse des Polonium-Ions kann man die Atommasse einsetzen. Die Masse der fehlenden Elektronen spürt man frühestens an der 6ten geltenden Ziffer.

$$p_\alpha=m_\alpha\cdot v_\alpha=\underline{\underline{1{,}2\cdot 10^{-19}\,Ns}}$$
$$p_{Po}=m_{Po}\cdot v_{Po}=\underline{\underline{1{,}2\cdot 10^{-19}\,Ns}}$$

Da die beiden Impulse in entgegengesetzte Richtungen gehen, ist der Gesamtimpuls nach dem Zerfall gleich Null, genauso wie vor dem Zerfall (Impulserhaltung).

d) $E_{kin,max,\alpha} = \frac{m_T}{m_T + m_\alpha} = \frac{215}{215+4} \cdot 6{,}95\, MeV = \underline{6{,}82\, MeV}$ passt!

$$\frac{E_{kin,\alpha}}{Q} = \frac{m_T}{m_T + m_\alpha} = \frac{m_T}{m_T \cdot \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_T}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{m_\alpha}{m_T}}$$

e) Je leichter ein Alpha-Strahler, desto leichter ist das Tochteratom.
Je kleiner m_T desto größer ist $\frac{m_\alpha}{m_T}$ desto größer ist $\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_T}\right)$
und desto kleiner wird der Bruch und damit das Verhältnis.

f) In einer Nuklidkarte oder Tabelle identifiziert man Po210 (Uran-Radium-Reihe) als den leichtesten Alpha-Strahler einer natürlichen Zerfallsreihe, der zum Tochter-Atom Pb206 zerfällt. Das kleinste mögliche Verhältnis ist damit

$$\frac{E_{kin,\alpha}}{Q} = \frac{m_T}{m_T + m_\alpha} = \frac{m(Pb206)}{m(Pb206) + m_\alpha} = \frac{209{,}98}{209{,}98 + 4{,}001} = \underline{\underline{98{,}1\,\%}}$$

<u>Aufgabe 10.165:</u>

Stößt ein Proton auf einen B11-Kern, dann kann es im Bor-Kern steckenbleiben und ein Neutron herausschlagen.

a) Stelle die Reaktionsgleichung auf und zeige, dass die Reaktion endotherm ist. Wie hoch ist die für die Reaktion notwendige Aktivierungsenergie? Entnehme die notwendigen Massen der ausgeteilten Tabelle.

Kontrolle: Aktivierungsenergie 2,76 MeV

Im Folgenden betrachten wir eine solche Reaktion, die von einem Proton der kinetischen Energie 8,0 MeV - welches auf einen ruhenden B11-Kern stößt - ausgelöst wird. Außerdem gehen wir davon aus, dass sich alle Stoßpartner vor und nach der Reaktion auf derselben Gerade bewegen -> eindimensionales Problem.

b) Zeige, dass die Impulserhaltung bei der Reaktion erfüllt ist, wenn das entstandene Kohlenstoffatom 1,97 MeV der überschüssigen Energie als kinetische Energie erhält. In welche Richtungen bewegen sich die Reaktionsprodukte? Führen Sie eine nichtrelativistische Rechnung durch!

Lösung:

a) $\,{}^{1}_{1}p^{+} + {}^{11}_{5}B \rightarrow {}^{11}_{6}C^{+} + {}^{1}_{0}n$

Zum Rechnen müssen wir von der Atommasse des Kohlenstoff ein Elektron abziehen.

$$\begin{aligned} Q &= \left(m_p + m(B11) - m(C11) + m_e - m_n\right)\cdot c^2 \\ &= \left(1{,}007276 + 11{,}009305 - 11{,}011433 + 5{,}486\cdot 10^{-4} - 1{,}008665\right)\cdot u\cdot c^2 \\ &= \underline{\underline{-2{,}76\,MeV}} \end{aligned}$$

Wegen des negativen Q-Wertes ist die Reaktion endotherm. Man muss mindestens 2,76MeV investieren, um die Reaktion in Gang zu bringen.

b) $\,E_p = 8{,}0\,MeV\,;\ \ E_C = 1{,}97\,MeV\,;\ \ E_n = 8{,}0\,MeV - 2{,}76\,MeV - 1{,}97\,MeV = \underline{3{,}27\,MeV}$

$$E = \frac{p^2}{2\cdot m} \rightarrow p = \sqrt{2\cdot E\cdot m}$$

vorher:

$$p_p = \sqrt{2\cdot 8\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{6{,}54\cdot 10^{-20}\,kg\cdot m/s}$$

nachher:

$$p_C = \sqrt{2\cdot 1{,}97\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\cdot 11\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{10{,}7\cdot 10^{-20}\,kg\cdot m/s}$$

$$p_n = \sqrt{2\cdot 3{,}27\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{4{,}17\cdot 10^{-20}\,kg\cdot m/s}$$

Das Kohlenstoffatom bewegt sich in Flugrichtung des vorherigen Protons, das Neutron in entgegengesetzte Richtung dann ist der Gesamtimpuls nachher:

$$p_{nachher} = 10{,}7\cdot 10^{-20}\,kg\cdot m/s - 4{,}17\cdot 10^{-20}\,kg\cdot m/s = \underline{6{,}53\cdot 10^{-20}\,kg\cdot m/s}$$

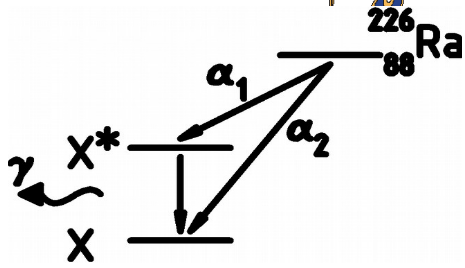
also bis auf Rundungsfehler genauso groß wie vorher.

Berücksichtigung von Gamma-Quanten

Häufig entstehen Tochterkerne beim Beta- oder Alpha-Zerfall in einem angeregten Zustand. Solche angeregten Zustände von Atomkernen fallen sehr schnell - manchmal stufenweise - in den Grundzustand zurück. Will man die kinetischen Energien der Zerfallsprodukte ausrechnen, dann müssen die Energien der Gamma-Quanten berücksichtigt werden, indem man sie vom Q-Wert der Reaktion abzieht.

<u>Aufgabe 10.166:</u>

Beim Zerfall von Ra226 entstehen Alpha-Teilchen verschiedener Energien. Zusätzlich entsteht Gammastrahlung mit einer Photonenenergie von 0,186MeV.



a) Geben Sie beide möglichen Zerfallsgleichungen (einmal mit Gamma-Zerfall und einmal ohne) an und bestimmen Sie den Q-Wert der Reaktion.

b) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Alpha1-Teilchens einmal ohne Berücksichtigung der Rückstoßenergie des Tochteratoms und einmal mit Berücksichtigung der Rückstoßenergie des Tochteratoms.

Benutzen Sie zum Rechnen die ausgeteilte Tabelle.

<u>Lösung:</u>

a)
$$^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$$
$$Q = \left(m(Ra226) - m(Rn222) - m(He4) \right) \cdot c^2$$
$$= (226{,}02536 - 222{,}01753 - 4{,}002603) \cdot u \cdot c^2$$
$$= (226{,}02536 - 222{,}01753 - 4{,}002603) \cdot 931{,}49\ MeV = \underline{\underline{4{,}869\ MeV}}$$

b) Ohne Berücksichtigung der Rückstoßenergie

$$E_{kin,\alpha} = 4{,}869\ MeV - 0{,}186\ MeV = \underline{\underline{4{,}683\ MeV}}$$

Mit Berücksichtigung der Rückstoßenergie

Mit Beträgen gilt: $m_\alpha \cdot v_\alpha = m_{Rn} \cdot v_{Rn} \rightarrow v_{Rn} = \frac{m_\alpha}{m_{Rn}} \cdot v_\alpha$ Einsetzen in

$$E = \frac{1}{2} \cdot m_\alpha \cdot v_\alpha^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{Rn} \cdot v_{Rn}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_\alpha \cdot v_\alpha^2 + \frac{1}{2} \cdot m_{Rn} \cdot \frac{m_\alpha^2}{m_{Rn}^2} \cdot v_\alpha^2 = E_{kin,\alpha} \cdot \left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{Rn}} \right)$$
$$E_{kin,\alpha} = \frac{E}{1 + \frac{m_\alpha}{m_{Rn}}} = \frac{4{,}681\ MeV}{1 + \frac{4{,}00\,u}{222{,}02\,u}} = \underline{\underline{4{,}598\ MeV}}$$

<u>Aufgabe 10.167: Rotglut durch Zerfallswärme</u>

Es soll berechnet werden wie lange es dauert, bis 1kg reines Polonium durch seine eigene Zerfallswärme von Zimmertemperatur bis auf 800°C (helle Rotglut) erhitzt wird. Dazu sind ist ungefähr eine Wärmezufuhr (Energiezufuhr) von 320kJ notwendig. Dabei ist die an die Luft abgegebene Wärme bereits berücksichtigt. Das Polonium wird dabei schmelzen, weil die Schmelzpunkte von Polonium und Blei (Tochter) beide unterhalb von 800°C liegen. Wir machen das Ganze deshalb mit Polonium, weil hier die Tochterkerne stabil sind, wir also keine Energie aus Folgezerfällen berücksichtigen müssen.

a) Berechne den Q-Wert vom Alpha-Zerfall von Po211 (Halbwertszeit 0,5s). Berechne damit wie viele Kerne zerfallen müssen, um die 1kg-Probe bis zur hellen Rotglut zu erhitzen. Berechne anschließend, wie viele Atome in der Probe sind und mit der Zerfallsgleichung wie lange es dauert, bis die entsprechende Anzahl von Zerfällen stattgefunden hat.

Das ist bisschen arg übel, deshalb probieren wir's noch mal mit Po210, das hat eine viel längere Halbwertszeit.

b) Berechne den Q-Wert vom Alpha-Zerfall von Po210 (Halbwertszeit 138,4d). Berechne die Aktivität von 1kg reinem Po210 und damit die Energie, die beim Zerfall in der Probe in einer Sekunde frei wird. Wegen der relativ großen Halbwertszeit wird sich die Aktivität im interessierenden Zeitintervall kaum ändern. Berechne ausgehend von konstanter Aktivität, wie lange es dauert, bis die Probe von 0°C auf 800°C erwärmt wird. Zahlenwerte entnehmen Sie der ausgeteilten Tabelle.

Lösung:

$$^{211}_{84}Po \rightarrow {}^{207}_{82}Pb^{2-} + \alpha^{2+}$$

a) $$Q = (m(Po) - m(Pb) - m(He)) \cdot c^2$$
$$= (210{,}986657 - 206{,}975903 - 4{,}002603) \cdot u \cdot c^2 = \underline{\underline{7{,}59\,MeV}}$$

$$\Delta N = \frac{320\,10^3\,J}{7{,}59 \cdot 10^6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,J} = \underline{2{,}63 \cdot 10^{17}}$$

$$N_0 = \frac{1\text{kg}}{211 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{2{,}86 \cdot 10^{24}} \quad ; \quad \lambda = \frac{ln2}{T_{1/2}} = \frac{ln2}{0{,}5\,s} = \underline{1{,}386}$$

$$N_{Ende} = N_0 - \Delta N = 2{,}86 \cdot 10^{24} - 2{,}63 \cdot 10^{17} = \underline{2{,}85999974 \cdot 10^{24}}$$

in die Zerfallsgleichung, gibt

$$2{,}85999974 \cdot 10^{24} = 2{,}86 \cdot 10^{24} \cdot e^{-1{,}386 \cdot t}$$

$$t = \ln\left(\frac{2{,}85999974}{2{,}86}\right) : (-1{,}386) = \underline{\underline{65{,}6\,ns}}$$

b) $^{210}_{84}Po \rightarrow {}^{206}_{82}Pb^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

$$Q=(m(Po)-m(Pb)-m(He))\cdot c^2$$
$$=(209{,}982876-205{,}974468-4{,}002603)\cdot u\cdot c^2=\underline{5{,}407\,MeV}$$

$$N=\frac{1\text{kg}}{209{,}98\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{2{,}869\cdot 10^{24}} \quad ; \quad \lambda=\frac{ln2}{T_{1/2}}=\frac{ln2}{138{,}4\cdot 24\cdot 3600\text{s}}=\underline{57{,}97\cdot 10^{-9}\frac{1}{s}}$$

$$A=\lambda\cdot N=57{,}97\cdot 10^{-9}\frac{1}{s}\cdot 2{,}869\cdot 10^{24}=\underline{1{,}66\cdot 10^{17}\frac{1}{s}}$$

Energie pro Sekunde: $\Delta E=1{,}66\cdot 10^{17}\cdot 5{,}407\cdot 10^{6}\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\,J=\underline{143{,}8\,kJ}$

Zeit bis zur hellen Rotglut: $\frac{320\text{kJ}}{143{,}8}\,kJ=\underline{\underline{2{,}2\,s}}$

Aufgabe 10.168:

Trifft ein Proton mit ausreichender kinetischer Energie auf einen ruhenden C14-Kern, so kann es vom C14-Kern absorbiert werden und dabei ein Bruchstück aus dem Kern herausschlagen. Dabei entsteht ein C11-Kern, ein Alpha-Teilchen und noch was.

a) Gib die Reaktionsgleichung für die beschriebene Reaktion an und beschreibe die Umwandlung, die bei der Reaktion stattfindet.

b) Berechne den Q-Wert für diese Reaktion und zeige, dass die Reaktion endotherm ist. Zahlenwerte aus ausgeteilter Tabelle. (Kontrolle: Q = - 2,77 MeV)

c) Begründe mit Hilfe von Impulserhaltung, dass ein Proton ,welches exakt die in b) berechnete Energie besitzt, die Reaktion nicht auslösen kann.

d) Zeige, dass ein Proton mit einer kinetischen Energie von 3,7 MeV die Reaktion in Übereinstimmung mit dem Impulserhaltungssatz auslösen kann, wenn man davon ausgeht, dass das entstandene Alpha-Teilchen die gesamte überschüssige Energie trägt.

Lösung:

a) $^{1}_{1}p^{+}+{}^{14}_{6}C\rightarrow {}^{11}_{6}C+{}^{4}_{2}He^{2+}+e^{-}+\overline{\nu}_e$; ein Neutron wird in ein Proton umgewandelt

b)
$$Q=(m_p+m_{C14}-m_{C11}-m_{\alpha}-m_e)\cdot c^2$$
$$=(1{,}007276+14{,}003242-11{,}011432-4{,}001506-5{,}4858\cdot 10^{-4})\cdot uc^2=\underline{\underline{-2{,}77\,MeV}}$$

Da der Q-Wert negativ ist, ist die Reaktion endotherm.

c) Impuls vorher nicht Null; nachher aber ohne Energieüberschuss gleich Null; geht nicht

d) $p = p_P = \sqrt{2 \cdot E \cdot m} = \sqrt{2 \cdot 3{,}7 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} kg}$
$\underline{p = 4{,}45 \cdot 10^{-20} kg \cdot m/s}$

$p' = p_\alpha = \sqrt{2 \cdot E \cdot m} = \sqrt{2 \cdot 0{,}93 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27} kg}$
$\underline{p' = 4{,}45 \cdot 10^{-20} kg \cdot m/s}$

Impulse sind nachher und vorher gleich groß. Wenn das Alpha-Teilchen also dieselbe Richtung hat wie das einschlagende Proton dann ist die Impulserhaltung nicht verletzt.

Aufgabe 10.169:

Trifft ein Neutron auf einen ruhenden Li7-Kern, kann es den Li-Kern durchschlagen und dabei das Lithium-Atom in ein Helium-Atom und ein Reststück spalten. Das Neutron verliert dabei lediglich einen Teil seiner Energie.

a) Stelle die Reaktionsgleichung auf.

b) Bestimme den Q-Wert der Reaktion und begründe, dass die Reaktion endotherm ist. (Kontrolle: Q = - 2,47 MeV)

c) Begründe, weshalb ein Neutron mit exakt der in b) berechneten Energie die Reaktion aufgrund der Impulserhaltung nicht auslösen kann.

Im folgenden gehen wir davon aus, dass das die Energie des Neutrons größer als der in b) berechnete Wert ist, und dass das entstandene Tritium-Atom die gesamte überschüssige Energie mit nimmt, d.h. auch das Neutron ist nach dem Stoß in Ruhe.

d) Ein wie Vielfaches der Neutronenenergie muss ein Tritium-Atom besitzen, wenn Neutron und Tritium-Atom einen gleich großen Impuls besitzen? (Kontrolle: 0,33)

e) Bestimme mit Hilfe von d) die Mindest-Energie, die ein Neutron besitzen muss, um die Reaktion auszulösen.

Lösung:

a) ${}^7_3Li + {}^1_0n \rightarrow {}^4_2He + {}^3_1H + {}^1_0n$

b) $Q = (m_{Li} - m_{He} - m_H) \cdot c^2$
$= (7{,}016004 - 4{,}0026031 - 3{,}0160497) \cdot uc^2 = \underline{\underline{-2{,}47\ MeV}}$

Der Q-Wert ist negativ, deshalb ist die Reaktion endotherm.

c) Impuls des Neutrons vorher größer Null; ohne Energieüberschuss ist Impuls nachher gleich Null; geht nicht

d) $$E_T = \frac{p_T^2}{2 \cdot m_T} = \frac{p_n^2}{2 \cdot m_T} = \frac{p_n^2}{2 \cdot m_n} \cdot \frac{m_n}{m_T} = E_n \cdot \frac{m_n}{m_T} = \frac{1{,}009}{3{,}016} \cdot E_n = \underline{\underline{0{,}33 \cdot E_n}}$$

e) $$E_n = |Q| + E_T = |Q| + 0{,}33 \cdot E_n \rightarrow |Q| = 0{,}67 \cdot E_n$$
$$E_n = 1{,}5 \cdot |Q| \approx \underline{\underline{3{,}7\,MeV}}$$

Aufgabe 10.170:

Wer noch mal das Ausrechnen von Q-Werten üben will, kann das hier machen. Zahlenwerte aus der ausgeteilten Tabelle.

Alpha-Zerfall: U233 (4,91MeV); Bi212 (6,22MeV); Ra224 (5,80MeV); At215 (8,17-MeV); Ce142 (1,43MeV); Hf174 (2,55MeV)

Beta-Minus-Zerfall: Ag108 (1,64MeV); Dy165 (1,31MeV); C14 (0,157MeV); Tl207 (1,44MeV); W185 (0,429MeV); La138 (1,01MeV)

Beta-Plus-Zerfall: Sc43 (1,35MeV / 2,37MeV); K38 (4,92MeV / 5,94MeV); O14 (4,13-MeV / 5,15MeV); P30 (3,22MeV / 4,25MeV); Ar35 (4,95MeV / 5,97MeV)

10.3 Abi mit Lösung

Aufgabe 10.171: Aus Abi 2014

Rn222 gehört zur natürlichen Uran-Radium-Reihe und entsteht aus U238. Rn222 zerfällt durch Alpha-Zerfall in Po218. Der Tochterkern Po218 liegt nach dem Zerfall im Grundzustand vor. Zahlenwerte aus ausgeteilter Tabelle.

a) Weisen Sie durch geeignete Rechnungen nach, das sich U238 nach vier Alpha- und zwei Beta-Minus-Zerfällen in Rn222 umgewandelt hat.

b) Berechnen Sie den Q-Wert für den Zerfall des Rn222. (Kontrolle: 5,59 MeV)

Die kinetische Energie des Alpha-Teilchens beim Rn222-Zerfall beträgt 5,49 MeV.

c) Emittiert ein ruhender Rn222-Kern ein Alpha-Teilchen, so bewirkt dies einen Rückstoß des entstandenen Po218-Kerns. Berechnen Sie aus den bisher bekannten Energie-Werten die Geschwindigkeiten des emmitierten Alpha-Teilchens sowie des Po218-Atoms und bestätigen Sie mithilfe der beiden Geschwindigkeitswerte den Impulserhaltungssatz.

Lösung:

a) U238: Z = 92; A = 238

Vier Alpha-Zerfälle: Z' = 92 - 8 = 84; A' = 238 - 16 = 222

Zwei Beta-Zerfälle: Z'' = 84 + 2 = 86; A'' = 222

Was den Werten für Rn222 entspricht.

b)
$$Q=(m_{Rn}-m_{Po}-m_{He})\cdot c^2=(222{,}01753-218{,}00893-4{,}0026031)\cdot uc^2$$
$$\underline{\underline{Q=5{,}59\,MeV}}$$

c)
$$v_\alpha=\sqrt{\frac{2\cdot E_{kin}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 5{,}49\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}{4\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}}=\underline{\underline{16{,}3\cdot 10^6\,m/s}}$$

$$v_{Po}=\sqrt{\frac{2\cdot E_{kin}}{m}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}1\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}{218\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}}=\underline{\underline{0{,}297\cdot 10^6\,m/s}}$$

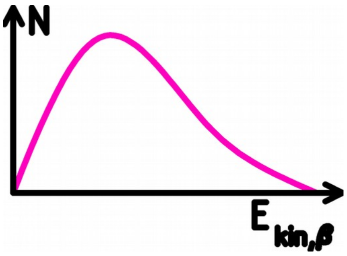
$$p_\alpha=m\cdot v=4\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 16{,}3\cdot 10^6\,m/s=\underline{\underline{1{,}08\cdot 10^{-19}\,kg\cdot m/s}}$$

$$p_{Po}=m\cdot v=218\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 0{,}297\cdot 10^{6}\,m/s=\underline{1{,}07\cdot 10^{-19}\,kg\cdot m/s}$$

Die beiden Impulse sind annähernd gleich groß. Da sie in verschiedene Richtungen zeigen haben sie unterschiedliche Vorzeichen und der Gesamtimpuls bleibt gleich Null.

Aufgabe 10.172: Abitur 1976

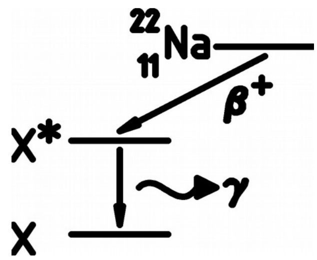
a) Erläutern Sie den Beta-Plus-Zerfall im Potentialtopfmodell. Stellen Sie die Zerfallsgleichung für den Beta-Plus-Zerfall und den folgenden Gamma-Zerfall von Na22 (siehe Zerfallsschema unten rechts) auf.



b) Nebenstehende Skizze zeigt ein typisches Beta-Spektrum in vereinfachter Form. Beschreiben Sie anhand dieser Skizze die Energieverteilung.

c) Weshalb lässt sich aus der Energieverteilung der Beta-Strahlung folgern, dass ein drittes Teilchen am Zerfall beteiligt sein muss. Geben Sie die Eigenschaften des Neutrinos an.

d) Berechne sie für den in a) beschriebenen Beta-Plus-Zerfall von Na22 die maximale kinetische Energie der emittierten Positronen. Berücksichtigen Sie dabei, dass der entstehende Tochterkern zunächst angeregt ist und unter Emission eines Gamma-Quants der Energie 1,277MeV in den Grundzustand des Tochterkerns übergeht.



Benutzen Sie zum Rechnen die ausgeteilte Tabelle.

Lösung:

a) Potentialtopfmodell: siehe Skript; $^{22}_{11}Na \rightarrow {}^{22}_{10}Ne^{-}+e^{+}+\nu_e$

b) Die Beta-Strahlung besitzt eine kontinuierliche Energieverteilung in der alle Energien von Null bis zu einer maximalen Energie vorkommen. Die meisten Beta-Teilchen besitzen etwa ein Drittel der maximalen Energie.

c) Mutterkern und Tochterkern besitzen nur diskrete Energien, deshalb dürfte die Beta-Strahlung auch nur diskrete Energien besitzen, jeweils den Unterschied.

Neutrino: Elementarteilchen; extrem kleine Ruheenergie; Klasse ungeladene Leptonen; keine EM-WW; keine starke WW; nur schwache WW (und Gravitation); kaum WW mit Materie, daher schwer nachzuweisen

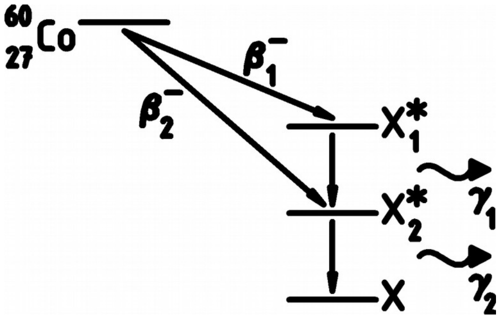
d) Rückstoßenergie des Tochteratoms wird vernachlässigt.

$$Q=\left(m(Na22)-m(Ne22)-2\cdot m_e\right)\cdot c^2$$
$$=\left(21{,}994437-21{,}991385-2\cdot 5{,}4858\cdot 10^{-4}\right)\cdot u\cdot c^2$$
$$=\left(21{,}994437-21{,}991385-2\cdot 5{,}4858\cdot 10^{-4}\right)\cdot 931{,}49\cdot 10^6\,eV=\underline{1{,}821\,MeV}$$

$$E_{kin,max}=1{,}821\,MeV-1{,}277\,MeV=\underline{\underline{0{,}54\,MeV}}$$

Aufgabe 10.173: Abi 1980

Der Beta-Minus-Zerfall von Co60 ist im nebenstehenden Termschema dargestellt.



Es treten zwei angeregte Zustände X1 und X2 des Tochterkerns auf, die jeweils durch Gamma-Strahlung in den nächsttieferen Zustand übergehen. Die maximale kinetische Energie der beiden Beta-Strahlungen ist E1 = 0,312MeV und E2 = 1,485MeV.

Die Gamma2-Strahlung hat die Energie E = 1,333MeV, die Atommasse von Co60 ist 59,933813u.

a) Berechnen Sie aus den gegebenen Daten die Atommasse des Tochteratoms X.

b) Berechnen Sie die Wellenlänge der Gamma1-Strahlung.

Lösung:

$${}^{60}_{27}Co \rightarrow {}^{60}_{28}X^+ + e^- + \overline{\nu}_e \qquad ;\ X = Ni$$

a)
$$Q=1{,}485\,MeV+1{,}333\,MeV=\underline{2{,}818\,MeV} \quad ; \quad Q=\left(m(Co60)-m(X60)\right)\cdot c^2$$

$$m(X60)=m(Co60)-\frac{u\cdot Q}{u\cdot c^2}=59{,}933813\,u-\frac{2{,}818\,MeV\cdot u}{931{,}49\,MeV}=\underline{\underline{59{,}930788u}}$$

b)
$$E_{\gamma 1}=1{,}485\,MeV-0{,}312\,MeV=\underline{1{,}173\,MeV}$$
$$E=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda=\frac{h\cdot c}{E}=\frac{4{,}1357\cdot 10^{-15}\,eVs\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{1{,}173\cdot 10^6\,eV}=\underline{1{,}06\,pm}$$

Aufgabe 10.174: Abi 1998

Ein bedeutender Anteil der natürlichen terrestrischen Radioaktivität rührt von Alpha-Zerfällen des Edelgases Radon her.

a) Vergleichen Sie die Begriffe Energiedosis und Äquivalentdosis und grenzen Sie die beiden Größen gegeneinander ab.

b) Vergleichen Sie die biologische Wirksamkeit von Alpha-, Beta- und Gamma-Strahlung.

Radon dringt aus dem Untergrund durch Risse und Spalten im Fundament in Gebäude ein. Ein Durchschnittswert für die Belastung mit Rn222 ist 60 Bq/m³.

c) Erläutern Sie, was diese Angabe bedeutet, und berechnen Sie mit Hilfe der Halbwertszeit (ausgeteilte Tabelle), wie viele Rn222-Kerne in einem Kubikmeter Raumluft durchschnittlich enthalten sind.

Die Lunge eines Erwachsenen hat ein Fassungsvermögen von etwa 6,0 Litern Luft.

d) Berechnen Sie die Gesamtzahl von Rn222-Zerfällen in 6,0 Litern Luft im Laufe eines Jahres unter der Vorraussetzung, dass die angegebene Belastung von 60 Bq/m³ infolge kontinuierlicher Nachlieferung zeitlich konstant ist.

e) Welche Gesamtenergie in Joule hinterlassen die Alpha-Teilchen aus dem Rn222-Zerfall im Laufe eines Jahres in der Lunge, wenn die kinetische Anfangsenergie eines solchen Alpha-Teilchens 5,5 MeV beträgt?

f) Bestimme die Äquivalentdosis eines Erwachsenen mit 6,0-Liter-Lunge, wenn dieser ein Gewicht von 80kg hat.

Lösung:

a) b) siehe Skript

c) Die Angabe bedeutet, dass in einem Kubikmeter Raumluft während einer Sekunde 60 Rn222-Kerne zerfallen.

$$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N \rightarrow N = \frac{A \cdot T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{60\,Bq \cdot 3{,}8 \cdot 24 \cdot 3600\,s}{\ln 2} \rightarrow \underline{\underline{N = 28{,}4 \cdot 10^6}}$$

d) Dreisatz: $1\,m^3 \cdots 60\,Bq \Rightarrow 6{,}0\,l \cdots 0{,}36\,Bq$

Pro Jahr: $0{,}36 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = \underline{1{,}14 \cdot 10^7}$ Zerfälle in 6,0l pro Jahr

e) $E_{ges} = 1{,}14 \cdot 10^7 \cdot 5{,}5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} J = \underline{\underline{10{,}0\,10^{-6} J}}$

f) $H = q \cdot \frac{E}{m} = 20 \cdot \frac{10{,}0 \cdot 10^{-6} J}{80\, kg} = \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^{-6} Sv}}$

Aufgabe 10.175: Abi 1998; Kernreaktionen mit Neutronen

Die Neutronenmasse wird hier als unbekannt angenommen. Atommassen werden als bekannt angenommen und dürfen der ausgeteilten Tabelle entnommen werden.

Die Neutronenmasse lässt sich mit großer Präzision aus der Beobachtung des Einfangs thermischer Neutronen durch Wasserstoff bestimmen.

$$n + {}^1_1H \rightarrow {}^2_1H + \gamma$$

Die kinetischen Energien und Impulse der Ausgangsteilchen sind zu vernachlässigen. Die Energie des emittierten Photons wird zu 2,2231 MeV gemessen.

a) Begründen Sie, weshalb der Einfang langsamer Neutronen durch Atomkerne stets von der Emission energiereicher Gammastrahlung begleitet wird.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Impulserhaltungssatzes die Rückstoßenergie des Deuteriumatoms. Nichtrelativistische Rechnung! (Kontrolle: E = 1,3 keV)

c) Berechnen Sie aus den bisher bekannten Zahlenwerten die Neutronenmasse, die sich aus der Beobachtung der oben angegebenen Einfangreaktion ergibt.

Lösung:

a) Beim Einfang eines Neutrons wird die Bindungsenergie frei. Aufgrund de Impulserhaltung kann diese nicht in Form von kinetischer Energie im entstandenen Nuklid stecken. Sie muss also anders abgegeben werden, in Form eines Gamma-Quants.

b) Rechnung mit Beträgen

$$p_D = p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{E_\gamma}{c}$$

$$E_{kin} = \frac{p_D^2}{2 \cdot m} = \frac{E_\gamma^2}{2 \cdot c^2 \cdot m} = \frac{\left(2{,}2231 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19} J\right)^2}{2\left(3 \cdot 10^8 m/s\right)^2 \cdot 2{,}0141 \cdot 1{,}6605 \cdot 10^{-27} kg}$$

$$\underline{\underline{E_{kin} = 2{,}107 \cdot 10^{-16} J = 1{,}315\, keV}}$$

c) Energieerhaltung

$$E_n + E_H = E_D + E_{kin} + E_\gamma$$

$$E_n = (m_D - m_H)\cdot c^2 + E_{kin} + E_\gamma$$
$$= (2{,}0141 - 1{,}0078)\cdot uc^2 + 1{,}315\cdot 10^3\,eV + 2{,}2231\cdot 10^6\,eV = \underline{939{,}58\,MeV}$$
$$m_n = \frac{E_n}{c^2} = \frac{939{,}58\cdot 10^6\cdot 1{,}6022\cdot 10^{-19}\,J}{(3\cdot 10^8\,m/s)^2} = \underline{\underline{1{,}673\cdot 10^{-27}\,kg}}$$

Aufgabe 10.176: Abi 2002

Das Uranisotop U232 zerfällt nicht nur durch Alpha-Zerfall oder spontane Spaltung, sondern auch durch alleinige Emission eines Ne24-Teilchens. Man nennt diesen Vorgang, der erstmals 1985 in Berkeley beobachtet wurde, "super-asymmetrische Spaltung".

m(Ne24) = 23,993615 u; m(Pb208) = 207,97667 u; m(U232) = 232,037146 u

a) Geben Sie die Zerfallsgleichung für die "super-asymmetrische Spaltung" des U232-Kerns an.

b) Berechnen Sie die dabei frei werdende Energie Q in MeV. (Kontrolle: 62,3 MeV)

c) U232 kann sich auch durch Alpha- und Beta-Minus-Zerfälle in das gleiche Endprodukt Pb208 umwandeln. Wie viele Alpha- und wie viele Beta-Minus-Zerfälle sind hierzu notwendig? Erläutern Sie ohne Berechnung, warum dabei insgesamt deutlich weniger Energie frei wird als bei der "super-asymmetrischen Spaltung".

d) Die Geschwindigkeiten der beiden Zerfallsprodukte eines vorher ruhenden U232-Atoms bei der super-asymmetrischen Spaltung soll berechnet werden. Stellen Sie dazu die entsprechenden Gleichungen auf, führen Sie aber keine Berechnungen durch.

e) Das emittierte Ne24 hat eine kinetische Energie von 55,9 MeV. Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Zahlenwertes die Impulse der beiden Reaktionsprodukte und zeigen Sie, dass sie dem Impulserhaltungssatz gehorchen.

Lösung:

a) $^{232}_{92}U \rightarrow {}^{208}_{82}Pb + {}^{24}_{10}Ne$

b) $Q = (m_U - m_{Pb} - m_{Ne})\cdot c^2$

$Q = (232{,}037146 - 207{,}97667 - 23{,}993615)\cdot uc^2 = \underline{62{,}3\,MeV}$

c) Anzahl der Zerfälle: 232 - 208 = 24; 24 : 4 = 6 -> sechs Alpha-Zerfälle

ergäbe dann Z = 92 - 12 = 80; Pb hat Ordnungszahl 82 -> zwei Beta-Minus-Zerfälle

Energie: Ne24 hat eine höhere Bindungsenergie pro Nukleon als He4, weil die Bindungsenergie pro Nukleon bis zu Fe56 hin zunimmt. Deshalb hat Ne24 eine niedrigere Gesamtenergie als sechs He4-Atome und deshalb wird bei der super-asymmetrischen Spaltung mehr Energie frei.

d)
$$p=p' \rightarrow 0=m_{Pb}\cdot v_{Pb}+m_{Ne}\cdot v_{Ne} \rightarrow v_{Pb}=-\frac{m_{Ne}}{m_{Pb}}\cdot v_{Ne}$$
$$Q=E=\frac{1}{2}\cdot m_{Pb}\cdot v_{Pb}^2+\frac{1}{2}\cdot m_{Ne}\cdot v_{Ne}^2$$

Die Geschwindigkeit vom Pb aus der Impulserhaltung in die zweite Zeile eingesetzt gibt eine Gleichung mit nur einer Variable. Damit das v von Ne ausrechnen und das Ergebnis wieder in v von Pb einsetzen.

e)
$$E_{kin}=\frac{p^2}{2\cdot m} \rightarrow p=\sqrt{2\cdot E\cdot m}$$
$$p_{Ne}=\sqrt{2\cdot 55{,}9\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\cdot 24\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{\underline{8{,}44\cdot 10^{-19}\,kg\cdot m/s}}$$
$$p_{Pb}=\sqrt{2\cdot 6{,}4\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\cdot 208\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{\underline{8{,}41\cdot 10^{-19}\,kg\cdot m/s}}$$

Da die beiden Impulse gleich groß sind bleibt der Gesamtimpuls gleich Null, da die Teilchen in entgegengesetzte Richtungen fliegen.

<u>Aufgabe 10.177: Abi 2004; Kernspaltung</u>

Eine zentrale energetische Größe der Kernphysik ist die Bindungsenergie.

a) Erläutern Sie den Aufbau eines Atomkerns. Welche Bedeutung hat dabei die Bindungsenergie?

Bei der Kernspaltung von schweren Kernen wird Energie frei, da die Bindungsenergie pro Nukleon bei den mittelschweren Spaltprodukten höher ist als beim Ausgangskern.

Ein U235-Kern wird durch ein Neutron gespalten. Die beiden Spaltprodukte sind instabil und gehen nach jeweils drei Beta-Minus-Zerfällen in die stabilen Kerne Ce140 und Zr94 über. Außerdem entstehen bei der Spaltung freie Neutronen.

b) Welche instabilen Kerne entstehen unmittelbar nach der Spaltung und über welche Zwischenkerne führen diese jeweils zu den stabilen Endprodukten?

c) Stellen Sie die Gleichung für die Gesamtreaktion in die stabilen Endprodukte auf und berechnen Sie die dabei frei werdende Gesamtenergie. Notwendige Massen entnehmen sie der im Unterricht ausgeteilten Tabelle. (Kontrolle: Q = 208,2 MeV)

d) Schätzen Sie rechnerisch ab, wie viele Millionen Kilogramm Heizöl man verbrennen müsste, um den gleichen Energiebetrag zu erhalten, der als Folge der Spaltung von 1,0kg U235 insgesamt freigesetzt werden kann. (Heizwert von Heizöl: 42 MJ pro Kilogramm)

e) Wie das Unglück von Tschernobyl zeigte, darf das Gefährdungspotential, das von Kernkraftwerken ausgehen kann, nicht unterschätzt werden. Erklären Sie kurz, warum Strahlung radioaktiver Stoffe für Menschen gefährlich sein kann, und erläutern Sie, wie man sich vor ihr schützen sollte.

Lösung:

a) Unspezifische, offene Fragestellung -> auf Punkte achten (hier gab es 6 BE)

Aufbau: Der Atomkern besteht aus Protonen und Neutronen, er ist von der Größenordnung 0,01 pm und wird von der Kernkraft (Restwechselwirkung der starken Wechselwirkung zwischen Nukleonen), welche die Coulomb-Abstoßung der Protonen überwiegt, zusammengehalten.

Bindungsenergie: Das ist die Energie welche frei würde, wenn sich der Atomkern aus einzelnen freien Nukleonen bilden würde. Umgekehrt ist es die Energie, die man investieren müsste, um den Atomkern in einzelne freie Nukleonen zu zerlegen.

b) $^{140}_{58}Ce \xleftarrow{3\cdot\beta^-} {}^{140}_{55}Cs$ und $^{94}_{40}Zr \xleftarrow{3\cdot\beta^-} {}^{94}_{37}Rb$

Unmittelbar nach der Spaltung entstanden also Cs140 und Rb94, Zwischenkerne:

$$^{140}_{55}Cs \xrightarrow{\beta-} {}^{140}_{56}Ba \xrightarrow{\beta-} {}^{140}_{57}La \xrightarrow{\beta-} {}^{140}_{58}Ce$$

$$^{94}_{37}Rb \xrightarrow{\beta-} {}^{94}_{38}Sr \xrightarrow{\beta-} {}^{94}_{39}Y \xrightarrow{\beta-} {}^{94}_{40}Zr$$

c) $^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{140}_{58}Ce^{3-} + {}^{94}_{40}Zr^{3-} + 2\,{}^{1}_{0}n + 6\,e^{-} + 6\,\overline{\nu}_e$

Die Elektronen von den Beta-Minus-Zerfällen schlagen wir dem Cerium und dem Zirconium zu, dann bekommen wir ganze Atome <- Atommassen

$$Q=(m_U-m_{Ce}-m_{Zr}-m_n)\cdot c^2$$
$$Q=(235{,}04392-139{,}90539-93{,}906313-1{,}008665)\cdot uc^2$$
$$\underline{Q=208{,}2\,MeV}$$

d) Gesamtenergie: $E_{ges}=208{,}2\,MeV\cdot\dfrac{1\,kg}{235\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{5{,}34\cdot 10^{32}\,eV=8{,}54\cdot 10^{13}\,J}$

Heizöl: $\frac{8{,}54 \cdot 10^{13}\,J}{42 \cdot 10^{6}\,J} = \underline{2{,}03 \cdot 10^{6}}$

Man müsste also ca. 2 Mio kg Heizöl verbrennen.

e) Gefahr: Durch die ionisierende Wirkung der Strahlung können chemische Strukturen in den Zellen verändert werden und so Zellen abgetötet oder verändert werden, z.B. in Tumorzellen. Am gefährlichsten sind deshalb stark ionisierende Strahlen, die direkt im Körper freigesetzt werden.

Schutz: Abstand halten, Abschirmen, Aufnahme vermeiden und die zeitliche Dauer der Strahlenexposition gering halten. <- Je nach Punkteaufkommen noch etwas auskleiden.

Aufgabe 10.178: Abi 2007; Titan

Beim Beta-Minus-Zerfall von Ti51 befinden sich die Tochterkerne unmittelbar nach dem Zerfall stets in einem von zwei Anregungszuständen, jedoch niemals im Grundzustand. Die Beta-Minus-Energien sind maximal 2150 keV bzw. 1542 keV .

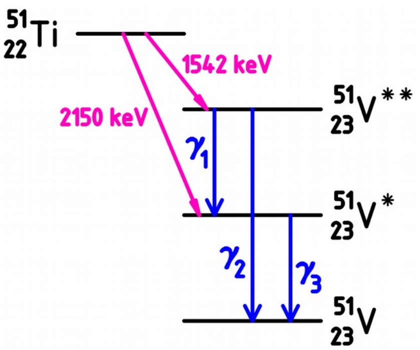
a) Geben Sie die Zerfallsgleichung an.

b) Skizzieren Sie ein geeignetes Energieniveauschema und erklären Sie damit, dass beim Zerfall von Ti51 auch Gamma-Strahlung mit drei verschiedenen Quantenenergien auftritt.

c) Die kleinste auftretende Gamma-Quantenenergie beträgt 320 keV. Berechnen Sie die beiden anderen Gamma-Energien sowie die gesamte bei diesem Zerfall frei werdende Energie Q. Ordnen Sie im Energieniveauschema von Teilaufgabe b) allen Übergängen ihre Energiebeträge zu.

Lösung:

a) $^{51}_{22}Ti \rightarrow {}^{51}_{23}V^{+} + e^{-} + \overline{\nu_e}$



b) Da es zwei maximale Beta-Energien gibt, und beim Zerfall niemals der Grundzustand des Tochterkerns entsteht, müssen zwei verschiedene angeregte Zustände des Tochterkerns entstehen. Diese können entweder schrittweise oder auf einmal in den Grundzustand zurückfallen, wodurch die drei verschiedenen, eingezeichneten Gammaquanten entstehen.

c)
$$E(\gamma_1) = 2150\,keV - 1542\,keV = \underline{\underline{608\,keV}}$$
$$E(\gamma_3) = \underline{\underline{320\,keV}} \quad \leftarrow \text{ gegeben}$$
$$E(\gamma_2) = 608\,keV + 320\,keV = \underline{\underline{928\,keV}}$$
$$Q = 1542\,keV + 928\,keV = \underline{\underline{2470\,keV}}$$

Die verlangte Zuordnung zum Energieniveauschema ist - bis auf die bereits eingetragenen - durch die Bezeichnungen gegeben.

Aufgabe 10.179: Abi 2007; Neptunium-Reihe

Das Astat-Nuklid At217 ist ein Alpha-Strahler aus der Neptunium-Zerfallsreihe.

a) Erläutern Sie, dass sich für die schweren Radionuklide genau vier Zerfallsreihen aufstellen lassen und erklären Sie, warum sich At217 der Neptunium-Reihe zuordnen lässt.

b) Begründen Sie, dass die Nuklide der Neptuniumreihe heute in der Natur praktisch nicht mehr vorkommen.

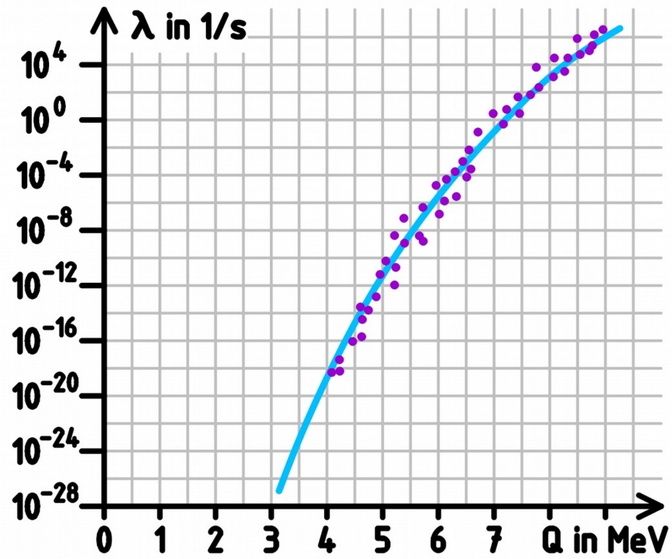
c) At217 emittiert neben der Alpha-Strahlung auch Gamma-Strahlung der Energie 0,60 MeV. Obwohl die Alpha-Strahlung von At217 wesentlich energiereicher ist, als die Gamma-Strahlung, kann man sich leichter vor ihr schützen. Nennen Sie die wichtigsten Schutzmaßnahmen vor Alpha-Strahlung.

d) Eine 7,4 mm dicke Bleilatte würde die Hälfte der Gamma-Quanten absorbieren. Wie viele solcher Bleiplatten müssten mindestens hintereinander gestellt werden, damit mehr als 99% der Gamma-Quanten absorbiert werden?

Natürliches Bismut besteht nur aus dem Isotop Bi209. Bis zum Jahr 2003 wurde es für das stabile Endprodukt der Neptunium-Reihe gehalten. Das Institut d'Astrophysique Spatiale in Orsay, Frankreich, stellte jedoch fest, dass Bi209 mit extrem großer Halbwertszeit zu Thallium Tl205 zerfällt.

e) Geben Sie die Zerfallsgleichung von Bi209 an und berechnen Sie die beim Zerfall freiwerdende Energie Q. (Kontrolle: Q = 3,14 MeV)

Um für eine Messung eine grobe Abschätzung der zu erwartenden Halbwertszeit von Bi209 zu erhalten, wird das Diagramm unten betrachtet. Es zeigt für reine Alpha-Strahler den gemessenen Zusammenhang zwischen der frei werdenden Energie Q und der Zerfallskonstante λ. Theoretische Überlegungen liefern die im Diagramm eingezeichnete Kurve.



f) Schätzen Sie mit Hilfe der Kurve ab, welche Halbwertszeit für Bi209 ungefähr zu erwarten wäre. Vergleichen Sie diese mit dem Alter des Universums von ca. 14 Milliarden Jahren.

Genauere Messungen ergeben eine Halbwertszeit $T_{1/2}=1{,}9\cdot 10^{19}a$ für den Bi209-Zerfall.

g) Eine Bismutprobe hat die Masse m = 4,0 g. Berechnen Sie die Aktivität dieser Probe und daraus die durchschnittiche Zeitspanne zwischen zwei Zerfällen.

Lösung:

a) Da sich bei Beta-Zerfall (und Gamma-Zerfall) die Massenzahl nicht verändert, und sich die Massenzahl bei Alpha-Zerfall immer um vier verringert, gibt die Massenzahl von Mutterkern und Tochterkern bei Division durch vier immer denselben Rest. Die Massenzahlen der Nuklide einer Zerfallsreihe geben bei Division durch vier also immer denselben Rest. Da es nur vier verschiedene solche Reste gibt (0; 1; 2 und 3) gibt es nur vier solche Zerfallsreihen.

217 gibt bei Division durch vier den Rest 1; deshalb gehört At217 zur Neptunium-Reihe.

b) Die Nuklide der Neptuniumreihe - und damit die ganze Reihe - haben alle - im Vergleich zum Alter des Sonnensystems - sehr kurze Halbwertszeiten. Deshalb sind die natürlich vorkommenden Vertreter dieser Zerfallsreihe schon größtenteils bis zum stabilen Endprodukt der Reihe Bi209 durchgefallen. Außerdem werden diese schweren Nuklide im Sonnensystem (ohne Supernova) nicht neu gebildet.

c) Die Alpha-Strahlung selbst lässt sich schon durch dünne Materialschichten abschirmen; z.B. Gummihandschuhe, dünner Schutzanzug. Gefährlich ist vor allem die Aufnahme von Alphastrahlern in den Körper. Deshalb muss das einatmen, trinken oder essen von Alphastrahlern verhindert werden; z.B. keine kontaminierten Pilze essen, Kellerräume gut lüften (Radon) oder auch in kontaminierten Bereichen den Kontakt der Radionuklide mit dem Körper durch eine Schutzanzug verhindern.

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0{,}01$ → $n = \log_{0,5}(0{,}01) = \underline{6{,}64}$

Es müssten also mindestens 7 solche Bleiplatten hintereinander sein.

e) ${}^{209}_{83}Bi$ → ${}^{205}_{81}Tl^{2-}$ + ${}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

$$Q = (m_{Bi} - m_{Tl} - m_{He}) \cdot c^2 = (208{,}980374 - 204{,}974442 - 4{,}002603) \cdot uc^2 = \underline{\underline{3{,}1\ MeV}}$$

f) $\lambda \approx 10^{-25}\ 1/s$; $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{10^{-25}\ 1/s} = \underline{\underline{6{,}9 \cdot 10^{24}\ a}}$

$$\frac{6{,}9 \cdot 10^{24}\ a}{14 \cdot 10^{9}\ a} = \underline{493 \cdot 10^{12}}$$

D.h. die zu erwartende Halbwertszeit ist ungefähr das 500 Billionen-fache vom Alter des Universums.

g) $A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{m_{Bi}} = \frac{\ln 2}{1{,}9 \cdot 10^{19} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ s} \cdot \frac{4{,}0 \cdot 10^{-3}\ kg}{209 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ kg} = \underline{\underline{1{,}3 \cdot 10^{-5}\ Bq}}$

$$A = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{t_?} \rightarrow t_? = \frac{1}{A} = \frac{1}{1{,}3 \cdot 10^{-5}\ Bq} = 76\,923\ s = \underline{21\ h}$$

Die durchschnittliche Dauer zwischen zwei Zerfällen ist also ca. 21 Stunden.

<u>Aufgabe 10.180: Abi 2008; Mordfall Litvinenko</u>

Anfang November 2006 kam das Ploniumisotop Po210 (Halbwertszeit 138 d) wegen eines spektalurären Mordfalls in die Schlagzeilen. Der Alpha-Strahler wurde dem russischen Ex-Agenten Alexander Litvinenko ins Essen gemischt. Dies führte innerhalb von drei Wochen zu dessen Tod.

a) Ordnen Sie Po210 einer natürlichen Zerfallsreihe zu und begründen Sie ihre Zuordnung mit den Massenzahlen und den Zerfallsarten.

b) Geben Sie die Zerfallsgleichung von Po210 an und berechnen Sie die gesamte bei diesem Zerfall frei werdende Energie Q. (Kontrolle: Q = 5,41 MeV)

c) Als maximale kinetische Energie der von Po210 emittierten Alpha-Teilchen wird in der Nuklidkarte 5,30 MeV angegeben. Geben Sie eine mögliche Ursache für den Unterschied zu Q an.

Zur Zeit des Mordfalls war in einer Zeitschrift zu lesen: "Da die Zerfallsrate von Polonium-210 sehr hoch ist, ist auch die Strahlenintensität sehr hoch. Um die tödliche internistische Dosis zu erzeugen, sind gerade einmal ein 0,1 Millionstel eines Gramms notwendig, eine Giftmenge von der Größe eines Stecknadelkopfes.(...) IN der Raumfahrt dient Polonium-210 als leichtgewichtige Wärmequelle. So kann ein Gramm Polonium-210 etwa 140 Watt Wärmeleistung erzeugen."

d) Berechnen Sie die Aktivität einer Po210-Probe, welche eine Masse von 1,0 g besitzt. (Kontrolle: $A = 1{,}7\cdot 10^{14}\,Bq$)

e) Bei der Aufnahme von Po210 in den Körper ist bereits eine Aktivität von 15 MBq tödlich. Zeigen sie, dass dies bei der im Text angegebenen Masse von "0,1 Millionstel eines Gramms" der Fall ist.

f) Geben Sie einen Grund an, warum das Hantieren mit Po210 für die Mörder relativ ungefährlich war.

g) Ein Kubikzentimeter Po210 hat eine Masse von 9,3 g. Überprüfen Sie damit die Aussage des Zeitungsartikels bezüglich des Volumens der Giftmenge.

h) Verifizieren Sie die Zahlenangabe zur Wärmeleistung.

<u>Lösung:</u>

a) 210 gibt bei Division durch 4 den Rest 2; deshalb gehört Po210 zur Uran-Radium-Reihe. Po210 zerfällt durch Alpha-Zerfall in Pb206, das stabile Endprodukt dieser Reihe.

Bemerkung: Den Fragezusatz "... und den Zerfallsarten." versteh ich auch nicht. Aber im Zweifelsfall schreiben Sie einfach irgendwas möglichst sinnvolles hin.

b) $^{210}_{84}Po \rightarrow ^{206}_{82}Pb^{2-} + ^{4}_{2}\alpha^{2+}$

$$Q = (m_{Po} - m_{Pb} - m_{He})\cdot c^2 = (209{,}982876 - 205{,}974468 - 4{,}002603)\cdot uc^2 = \underline{5{,}41\,MeV}$$

c) Wegen der Impulserhaltung muss auch der Tochterkern eine Rückstoßenergie erhalten. Die Rückstoßenergie vom Q-Wert abgezogen ergibt die maximale Energie es Alpha-Teilchens.

d) $$A = \lambda\cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot\frac{m}{m_{Po}} = \frac{\ln 2}{138\cdot 24\cdot 3600\,s}\cdot\frac{1{,}0\cdot 10^{-3}\,kg}{210\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{1{,}67\cdot 10^{14}\,Bq}$$

e) Aktivität ist proportional zu N ist proportional zur Masse. Deshalb kann man 0,1 Millionstel der Aktivität von oben nehmen.

$$\frac{1{,}67\cdot 10^{14}\,Bq}{10^{7}}=\underline{\underline{1{,}67\cdot 10^{7}\,Bq}}$$

Das liegt über der angegebenen tödlichen Aktivität.

f) Alpha-Strahlen lassen sich schon durch dünne Materialschichten abschirmen. Lediglich die Aufnahme des Po210 in den Körper muss verhindert werden. Das ist aber nicht so schwer, weil Polonium fest ist, Gummihandschuhe reiche also als Schutz.

g) Dreisatz siehe rechts. Ein Stecknadelkopf hat ein Volumen im Bereich von Kubikmillimeter und nicht im Bereich von einem Hunderttausendstel Kubikmillimeter. Das Volumen ist eher das eines Staubteilchens.

$$\begin{array}{rcl} & 1{,}0\,cm^3 \mathrel{\widehat{=}} 9{,}3\,g & \\ :9{,}3 & & :9{,}3 \\ & 0{,}1075\,cm^3 \mathrel{\widehat{=}} 1{,}0\,g & \\ :10'000'000 & & :10'000'000 \\ & \underline{\underline{0{,}00001\,mm^3}} \mathrel{\widehat{=}} 0{,}000'0001\,g & \end{array}$$

h) $P=\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{A\cdot 1\,s\cdot Q}{1\,s}=\frac{1{,}7\cdot 10^{14}\cdot 5{,}41\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}{1\,s}=\underline{\underline{147\,W}}$

Aufgabe 10.181: Abi 2006; Strahlenbelastung durch Radon

Radon ist ein unsichtbares und geruchloses Edelgas, das sich im Innern von Häusern konzentriert und zur natürlichen Strahlenbelastung des Menschen beiträgt. Entscheidend ist dabei das Radonisotop Rn222, das mit einer Halbwertszeit $T = 3{,}8\ d$ zerfällt.

a) Geben Sie an, welcher Zerfallsreihe Rn222 angehört, und bestimmen Sie, nach wie vielen Alpha- und Beta-Zerfällen Rn222 in das entsprechende stabile Bleiisotop übergegangen ist.

b) Rn222 geht selbst durch eine Alpha-Zerfall aus einem Mutterkern hervor. Stellen Sie die Zerfallsgleichung für die Entstehung von Rn222 auf und berechnen Sie den Rückstoßimpuls, den Rn222 bei dieser Kernreaktion erhält, wenn das dabei emittierte Alpha-Teilchen eine kinetische Energie von 4,78 MeV hat.

c) In einer Wohnung ergibt sich pro Kubikmeter Raumluft aufgrund der Rn222-Konzentration eine Aktivität von 50 Bq. Berechnen Sie, wie viele Rn222-Atome sich in einem Kubikmeter Raumluft befinden.

d) Stellen Sie dar, wie die erhöhte Radonkonzentration in Räumen, vor allem in Kellerräumen, zustande kommt und erläutern Sie kurz, warum die Strahlenbelastung durch Radon für den Menschen besonders gefährlich ist. Geben Sie eine einfache Maßnahme an, wie man diese Strahlenbelastung verringern kann.

Lösung:

a) 222 gibt bei Division durch 4 den Rest 2, deshalb gehört das Rn222 zur Uran-Radium-Reihe mit dem stabilen Entprodukt Pb206.

A: 222 - 206 = 16 -> also sind vier Alpha-Zerfälle beteiligt

Z: 86 - 4·2 = 78 ; 82 - 78 = 4 -> also sind vier Beta-Minus-Zerfälle beteiligt

Bemerkung: Man kann das bei dieser Formulierung des Arbeitsauftrags natürlich auch einfach in der Formelsammlung nachschaun. Zum Üben machen Sie am besten beides.

b) $^{226}_{88}Ra \rightarrow\; ^{222}_{86}Rn^{2-} + \,^{4}_{2}\alpha^{2+}$

$$Q=(m_{Ra}-m_{Rn}-m_{He})\cdot c^2$$
$$=(226{,}02536-222{,}01753-4{,}002603)\cdot uc^2=\underline{4{,}87\,MeV}$$

$$E_{kin,Rn}=4{,}87\,MeV-4{,}78\,MeV=\underline{0{,}09\,MeV}$$

$$E_{kin}=\frac{p^2}{2\cdot m} \rightarrow p=\sqrt{2\cdot m\cdot E_{kin}}$$
$$p=\sqrt{2\cdot 222\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg\cdot 0{,}09\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}=\underline{\underline{1{,}0\cdot 10^{-19}\,kg\cdot m/s}}$$

Bemerkung: Der Arbeitsauftrag verlangt ausdrücklich die Verwendung der gegebenen Alpha-Energie.

c)
$$A=\lambda\cdot N=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot N$$
$$N=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\cdot A=\frac{3{,}8\cdot 24\cdot 3600\,s}{\ln 2}\cdot 50\,Bq=\underline{\underline{23{,}7\cdot 10^{6}}}$$

d) Das Rn222 entsteht ständig als Zwischenprodukt der Uran-Radium-Reihe in der Erdkruste. Weil es Gasförmig ist, tritt es aus dem Boden aus und dringt vor allem in Kellerräume und von dort ins ganze Haus ein. Außerhalb von geschlossenen Räumen sorgt der Kontakt mit der ganzen Atmosphäre für eine starke Verdünnung des austretenden Radons, was in geschlossenen Räumen nicht passiert. Daher die erhöhte Konzentration in Gebäuden und vor allem in Kellern.

Die Belastung durch Radon ist deshalb besonders gefährlich, weil es mit der Luft eingeatmet wird und so in den Körper gelangt. Wenn das Radon in der Lunge zerfällt verbleiben die radioaktiven Folgeprodukte ebenfalls im Körper.

Das gründliche Lüften vor allem der Kellerräume stellt eine einfache Maßnahme zur Verringerung der Belastung dar.

Aufgabe 10.182: Abi 2011; Radioaktive Leuchtfarbe

Vermengt man eine radioaktive mit einer fluoreszierenden Substanz, die von der radioaktiven Strahlung zum Leuchten angeregt wird, erhält man so genannte Leuchtfarbe. Bei Leuchtziffern von älteren Uhren wurde Zinksulfid durch das Isotop Ra226 (Halbwertszeit 1600 Jahre) zum Leuchten angeregt, so dass sie auch im Dunkeln abgelesen werden konnten.

a) Geben Sie die Zerfallsgleichung von Ra226 an und berechnen Sie die dabei frei werdende Reaktionsenergie Q.

b) Begründn Sie, warum von einer unbeschädigten, luftdichten Uhr mit Ra226 in den Leuchtziffern keine Alpha-Strahlung in die Umgebung austritt. Warum ist dies selbst bei minimalen Gehäuseundichtigkeiten nicht mehr der Fall?

c) Das Ziffernblatt einer selbstleuchtenden Uhr enthält 1,0 *µg* Radium. Berechnen Sie die Aktivität A des Radiums in dieser Uhr, wobei davon ausgegangen werden kann, dass es sich ausschließlich um Ra226 handelt.

d) In Opas Schatztruhe findet sich eine 80 Jahre alte Uhr mit Leuchtziffern. Er behauptet, die Uhr habe in seiner Jugend viel heller geleuchtet. Überprüfen Sie rechnerisch, ob als Grund hierfür ein Abklingen der radioaktiven Strahlung in Frage kommt.

Lösung:

a) $^{226}_{88}Ra \rightarrow {}^{222}_{86}Rn^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

$$Q=(m_{Ra}-m_{Rn}-m_{He})\cdot c^2$$
$$=(226{,}025\,36-222{,}017\,53-4{,}002\,603)\cdot uc^2=\underline{4{,}87\,MeV}$$

b) Die Alpha-Strahlung selbst wird schon durch dünne Materialschichten vollständig abgeschirmt, dazu reicht das Gehäuse der Uhr völlig aus. Solange das Gehäuse dicht ist, können auch keine Radionuklide das Gehäuse verlassen, nicht mal das gasförmige Zerfallsprodukt Radon.

Sobald die Uhr nicht mehr dicht ist, wird das gasförmige Radon aus dem Gehäuse austreten. Das Radon ist selbst radioaktiv und erzeugt radioaktive Folgeprodukte, wodurch also indirekt Strahlung aus der Uhr austritt. Der Grund, weshalb Alpha-Strahlung entweichen kann ist also, die Gasförmigkeit des Zerfallsprodukts Radon.

c) $$A=\lambda\cdot N=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot\frac{m}{m_{Ra}}=\frac{\ln 2}{1600\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,s}\cdot\frac{1{,}0\cdot 10^{-9}\,kg}{226\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{36{,}6\,kBq}$$

d) $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{1600\,a} \cdot 80\,a} = \underline{0{,}966 \cdot A_0}$

Das sind fast 97% der ursprünglichen Aktivität, d.h. ein Abklingen der Aktivität kommt als Ursache nicht in Frage.

Aufgabe 10.183: G8 Muster-Abi 2010; Neutronen

Im Jahr 1930 bestrahlen Walther Bothe und sein Assistent Herbert Becker Beryllium mit Alphateilchen der Energie 4,5 MeV. Neben einem Restkern entstand dabei eine damals noch unbekannte Art von Strahlung. Zwei Jahre später fand Chadwick heraus, dass diese Strahlung aus elektrisch neutralen Teilchen besteht, die etwa die gleiche Masse wie Protonen besitzt - den Neutronen.

a) Geben Sie die Reaktionsgleichung zu obigem Experiment an. Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass Beryllium ausschließlich aus dem Isotop Be9 besteht.

b) Zeigen Sie durch Berechnung der freiwerdenden Bindungsenergie, dass diese Reaktion prinzipiell möglich ist.

c) Wenn man Alpha-Teilchen verwendet, deren kinetische Energie erheblich kleiner ist, dann tritt diese Reaktion nicht mehr auf, obwohl sie nach dem Energieerhaltungssatz immer noch ablaufen könnte. Warum ist das so?

Wie alle Quantenobjekte besitzen auch Neutronen Welleneigenschaften und sind deshalb für die Untersuchung einiger Eigenschaften von Festkörpern geeignet, zum Beispiel für die Analyse der Kristallstruktur. Die Wellenlänge der verwendeten Neutronen muss dabei in der Größenordnung der Abmessung der zu untersuchenden Struktur liegen. Andernfalls erhält man keine verwertbaren Ergebnisse.

d) Leiten Sie aus der Formel von de Broglie her, dass für nichtrelativistische Neutronen folgender Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie E und der Wellenlänge λ gilt:

$$E = \frac{h^2}{2 \cdot m \cdot \lambda^2}$$

e) Die kinetische Energie der in dem beschriebenen Versuch erzeugten Neutronen liegt über 4,5 MeV. Zeigen Sie, dass diese Neutronen zu energiereich sind, um Strukturen von Atomgröße - also etwa 0,1 nm - untersuchen zu können.

f) Die Neutronen müssen daher vor ihrer Verwendung erheblich abgebremst werden. Zur Verfügung stehen folgende drei Möglichkeiten:

1. Die Neutronen werden durch einige Bleiplatten geleitet.

2. Die Neutronen werden durch Wasser geleitet.

3. Die Neutronen werden durch ein starkes Magnetfeld geleitet.

Begründen Sie, welche der drei Varianten hierfür gut geeignet sind und welche nicht.

g) Von der Neutronenquelle bis zum Experimentierlabor legen die Neutronen einen 250 m langen Weg zurück. Freie Neutronen zerfallen mit einer Halbwertszeit von 11,7 Minuten. Begründen Sie, dass für die Strahlungsintensität bei Neutronen der Wellenlänge 0,1 nm der Zerfall auf diesem Weg keine nennenswerte Rolle spielt.

Lösung:

a) ${}^{9}_{4}Be + {}^{4}_{2}\alpha^{2+} \rightarrow {}^{12}_{6}C^{2+} + {}^{1}_{0}n$

b)
$$\Delta E = E_{vorher} - E_{nachher} =$$
$$= (m_{Be} + m_{He4} - m_C - m_n) \cdot c^2 = (9{,}012\,182 + 4{,}002\,603 - 12{,}0 - 1{,}008\,665) \cdot uc^2 =$$
$$\underline{\underline{= 5{,}7\,MeV}}$$

Da das Ergebnis positiv ist, wird Energie frei. Die Reaktion ist also exotherm und prinzipiell möglich.

c) Die positiv geladenen Alphateilchen werden vom positiv geladenen Beryllium-Atomkern abgestoßen (Coulombkraft). Damit die Alphateilchen dem Atomkern ausreichend nahe kommen können müssen sie eine minimale kinetische Energie (minimale Geschwindigkeit) besitzen.

d) $p = \frac{h}{\lambda}$ in E_{kin} gibt $E_{kin} = \frac{p^2}{2 \cdot m} = \frac{\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2}{2 \cdot m} = \frac{\frac{h^2}{\lambda^2}}{2 \cdot m} = \underline{\frac{h^2}{2 \cdot m \cdot \lambda^2}}$

e) $\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2 \cdot m \cdot E}} = \sqrt{\frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js \cdot 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,eVs}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 4{,}5 \cdot 10^{6}\,eV}} = \underline{1{,}35 \cdot 10^{-14}\,m = 0{,}000\,013\,5\,nm}$

Die Wellenlänge ist also um das 10 000-fache zu klein.

f) 1. ist nicht geeignet, weil die Neutronen bei elastischen Stößen mit den sehr viel schwereren Bleiatomen kaum Energie abgeben. Es kommt lediglich zur Absorbtion von Neutronen, aber genau das will man ja nicht.

3. ist nicht geeignet, weil die Neutronen keine elektrische Ladung besitzen und deshalb von einem Magnetfeld nicht beeinflusst werden (Bemerkung: Die Neutronen be-

sitzen zwar ein magnetisches Dipolmoment, aber auch dadurch wird der Geschwindigkeitsbetrag nicht beeinflusst).

2. ist gut geeignet, weil die Neutronen bei Stößen mit den fast gleich schweren Protonen im Wasser sehr viel kinetische Energie abgeben, also abgebremst werden.

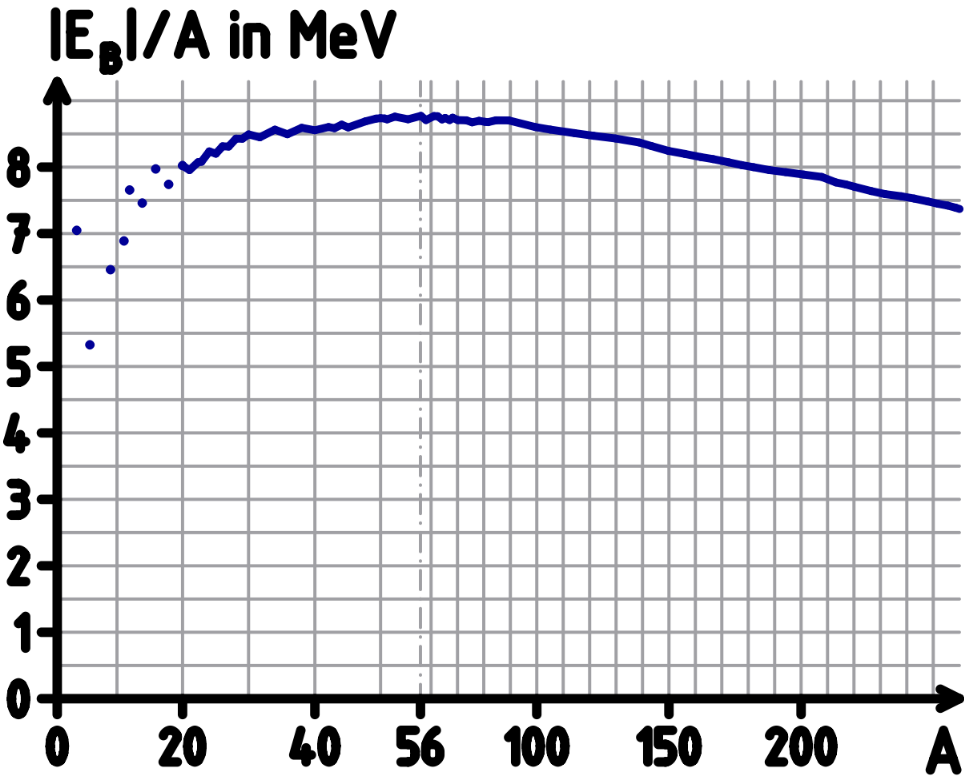
g) $m \cdot v = p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow v = \frac{h}{m \cdot \lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Js}{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 0{,}1 \cdot 10^{-9}\,m} = \underline{3970\,m/s}$

$$v = \frac{s}{t} \rightarrow t = \frac{s}{v} = \frac{250\,m}{3970\,m/s} = \underline{\underline{0{,}063\,s}}$$

Die Flugdauer der Neutronen beträgt also nur Bruchteile von Sekunden und ist ungefähr um das zehntausendfache kleiner als die Halbwertszeit. Deshalb spielt der Zerfall keine Rolle.

<u>Aufgabe 10.184: G8 Muster-Abi 2010; Atomkerne</u>

Die "Energiegewinnung" aus Atomkernen ist durch zwei verschiedene Prozesse möglich - durch Kernspaltung und durch Kernfusion. Im nebenstehenden Diagramm ist die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon über die Nukleonenzahl angetragen.



a) Erklären Sie anhand dieses Diagramms, warum Energiegewinnung sowohl durch Kernspaltung als auch durch Kernfusion möglich ist.

b) Schätzen Sie mithilfe des Diagramms ab, wie viel Energie aus der Spaltung eines Gramms U235 gwonnen werden kann. Gehen Sie vereinfachend davn aus, dass der Urankern in zwei etwa gleich große Bruchstücke gespalten wird.

Bei dem Reaktorunfall von Tschernobyl wurden große Mengen radioaktiven Materials freigesetzt und zum Teil durch den Wind auch nach Deutschland transportiert, wo sie sich durch Regenfälle auf die Oberfläche niederschlugen. Zur radioaktiven Kontamination trug unter anderem der Betastrahler Cs137 (Halbwertszeit: 30 a) bei.

c) Bei vielen Atomkernen, die "zu viele" Neutronen enthalten, wird dieses Missverhältnis durch einen Betazerfall korrigiert. Beschreiben Sie diesen Vorgang im Quarkmodell.

d) Beschreiben Sie die Wirkung von radioaktiver Strahlung auf die Zellen des menschlichen Körpers. Gehen Sie dabei auch auf mögliche Spätfolgen ein.

e) Der Cs137-Kern zerfällt in einen stabilen Ba137-Kern, der aus 56 Protonen und 81 Neutronen besteht. Begründen Sie unter Verwendung eines Potentialmodells für Atomkerne, warum ein solcher Kern stabil sein kann, obwohl er immer noch erheblich mehr Neutronen als Protonen enthält.

f) Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist und begründen Sie jeweils kurz ihre Antwort.

(1) Eine einige Meter entfernte radioaktive Quelle, die nur Alpha-Strahlung abgibt, ruft keine körperlichen Schäden hervor.
(2) Bei radioaktiv belasteten Lebensmitteln kann durch starkes Erhitzen die radioaktive Strahlung auf ein unbedenkliches Maß reduziert werden.
(3) Bei jedem radioaktiven Zerfall entsteht ein Neutrino.
(4) Radioaktivität hat an der Evolution einen maßgeblichen Beitrag.

Lösung:

a) Die Bindungsenergie pro Nukleon ist bei $A = 56$ maximal. Für größere und für kleinere Massenzahlen ist die Bindungsenergie betragsmäßig kleiner. Die Bindungsenergie ist der Betrag der Energie der frei wird, wenn sich der Kern aus einzelnen Nukleonen bildet. Deshalb wird bei jeder Bewegung im Diagramm, die in Richtung von $A = 56$ geht Energie frei. Kleinere Kerne werden in Richtung auf $A = 56$ hin fusioniert und größere Kerne werden in Richtung auf $A = 56$ hin gespalten. Bei beiden Prozessen wird Energie frei, weil die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon dabei betragsmäßig größer wird.

b) Spaltung eines einzelnen U235-Kerns:

$$\Delta E \approx 2 \cdot 117{,}5 \cdot 8{,}6\,MeV - 235 \cdot 8{,}1\,MeV = \underline{118\,MeV}$$

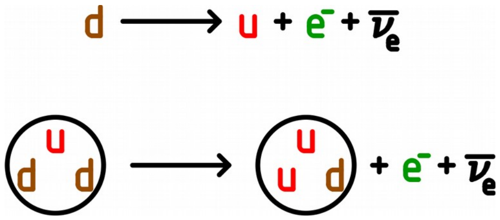
Anzahl der Kerne:

$$\frac{0{,}001\,kg}{235\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{2{,}6\cdot 10^{21}}$$

Energie insgesamt:

$$E=118\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\cdot 2{,}6\cdot 10^{21}\,J=\underline{49\,GJ}$$

c) Im Quarkmodell wandelt sich, vermittelt durch die schwache Wechselwirkung ein down-Quark in ein up-Quark um. Dabei entsteht noch ein Elektron und ein Antielektron-Neutrino. Bei diesem Prozess wird aus einem Neutron (udd) ein Proton (uud).

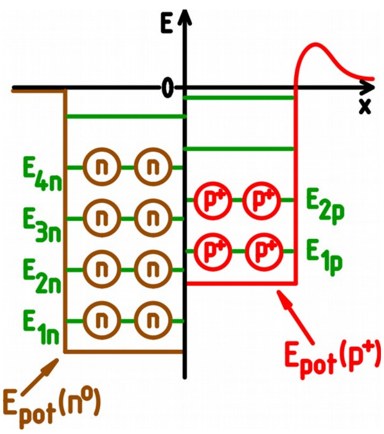


d) Radioaktive Strahlung kann im Innern einer Zelle Atome oder Moleküle anregen, ionisieren oder Atome innerhalb ihrer chemischen Bindung räumlich verschieben. Durch diese Prozesse werden unerwünschte chemische Reaktionen ausgelöst und es bilden sich freie Radikale, die ebenfalls chemische Reaktionen im Innern der Zelle auslösen. Dabei werden Aminosäuren oder Enzyme beschädigt und die DNA verändert oder zerbrochen.

Bei kurzzeitig hohen Belastungen kommt es zu Veränderungen des Blutbildes (Blutarmut durch Mangel an Blutkörperchen), Übelkeit, Schädigung oder sogar Zerstörung der Schleimhäute (z.B. im Verdauungstrakt) und zu Haarausfall. Der Mangel an Blutkörperchen führt auch zu einem erhöhten Infektionsrisiko. Außerdem kann es zu vorübergehender oder dauerhafter Unfruchtbarkeit kommen.

Auch nach langer Zeit ohne Symptome (z.B. 10 Jahre) kann es durch krankhaft veränderte Zellen zu Spätschäden kommen. Dazu gehören Trübung der Augenlinse und Krebserkrankungen, z.B. Leukämie, Lungenkrebs oder Schilddrüsenkrebs.

e) Bedingt durch die Coulomb-Abstoßung ist der Potenzialtopf der Neutronen tiefer als derjenige der Protonen. Deshalb haben die obersten Neutronen im Bild keine Möglichkeit unter Energieabgabe in ein Proton zu zerfallen, weil trotz einer geringeren Anzahl von Protonen alle energetisch niedrigeren Protonenzustände bereits besetzt sind.



f) (1) Richtig: Die Reichweite von Alpha-Strahlung in der Luft ist im Bereich von cm bis dm.

(2) Falsch: Durch erhitzen herstellbar Temperaturen haben keinen Einfluss auf Kernreaktionen, also auch nicht auf radioaktiven Zerfall.

(3) Falsch: Beim Alpha-Zerfall entsteht kein Neutrino

(4) Keine Ahnung: Evolution lebt von "zufälligen" Mutationen, die durch Radioaktivität ausgelöst werden können oder auch anders entstehen können.

Aufgabe 10.185: G8 Abi 2011; Kernfusion

Das Hauptziel der jahrzehntelangen Kernfusionsforschung ist der Bau eines Reaktors zur großtechnischen Stromerzeugung aus der bei Fusionsreaktionen freiwerdenden Energie. Dabei spielt u.a. die Fusion von Deuterium H2 mit Tritium H3 zu Helium He4 eine zentrale Rolle.

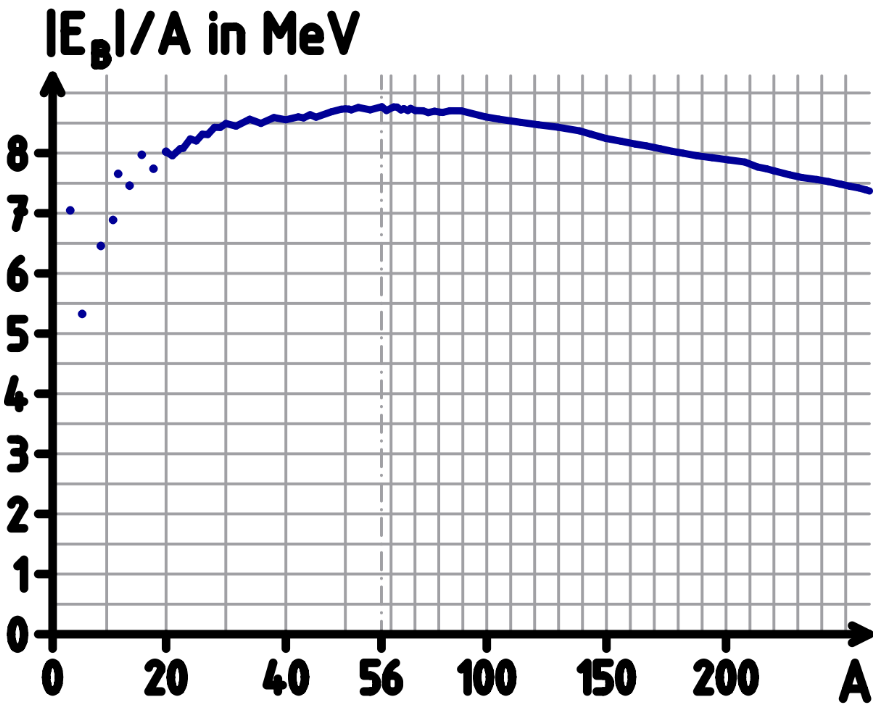
Zahlenwerte: m(H2) = 2,014102 u ; m(H3) = 3,016049 u ; m(He4) = 4,002603 u

a) Geben Sie die Reaktionsgleichung für den genannten Fusionsprozess an und berechnen Sie die bei dieser Reaktion frei werdende Energie Q. (Kontrolle: 17,6 MeV)

b) Bei der Planung eines großen Fusionsreaktors mit einer elektrischen Leistung von 1000 MW wird ein Wirkungsgrad von 45% zugrunde gelegt. Berechnen Sie die Masse von Deuterium und von Tritium, die im Dauerbetrieb innerhalb von 24 h zu Helium fusioniert würden.

c) Im nebenstehenden Diagramm ist der Betrag der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon in Abhängigkeit von der Nukleonenzahl A dargestellt.

Erklären Sie mit Hilfe des Diagramms, dass für die Energiegewinnung durch Kernfusion nur leichte Elemente in Frage kommen. Welcher weitere Prozess zur Energiegewinnung ergibt sich aus dem Diagramm?



Das hier zur Fusion benötigte Tritium ist ein Beta-Minus-Strahler mit einer Halbwertszeit von 12,3 a.

d) Beschreiben Sie die Eigenschaften dieser Strahlungsart.

e) Das im Reaktor verwendete Tritium wird nicht vollständig zu Helium fusioniert. Daher muss das überschüssige Tritium sicher gelagert werden. Wie lange dauert es, bis davon 99% zerfallen sind?

f) Trotz großer technischer Schwierigkeiten halten manche Wissenschaftler an der Kernfusion zur Lösung der künftigen Energieversorgung fest. Nehmen Sie hierzu kurz Stellung, indem Sie jeweils einen Vorteil und einen Nachteil dieser Technologie aufzeigen.

Lösung:

a) ${}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n^0$

$$Q=(m_{H2}+m_{H3}-m_{He}-m_n)\cdot c^2=(2{,}014102+3{,}016049-4{,}002603-1{,}008665)\cdot uc^2=\underline{17{,}6\,MeV}$$

b) $P_{nutz}=\eta\cdot P_{ges} \rightarrow P_{ges}=\frac{P_{nutz}}{\eta}=\frac{1000\cdot 10^6\,W}{0{,}45}=\underline{2222\,MW}$ also 2222 J pro Sekunde

$\frac{2222\cdot 10^6\,J}{17{,}6\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J}=\underline{7{,}89\cdot 10^{20}}$ Fusionen pro Sekunde

das macht pro Tag $7{,}89\cdot 10^{20}\cdot 3600\cdot 24=\underline{6{,}82\cdot 10^{25}}$ Fusionen

$$m_{H2}=6{,}82\cdot 10^{25}\cdot 2{,}014\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg=\underline{0{,}23\,kg}$$

$$m_{H3}=6{,}82\cdot 10^{25}\cdot 3{,}016\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg=\underline{0{,}34\,kg}$$

c) Energie kann nur gewonnen werden, wenn die mittlere Bindungsenergie der Nukleonen bei einer Reaktion steigt. Deshalb kommen laut Diagramm für Exotherme Fusionsreaktionen nur Elemente links von Fe57 in Frage, also nur leichte Elemente.

Laut Diagramm steigt die mittlere Bindungsenergie pro Nukleon auch bei der Spaltung schwerer Kerne rechts von Fe57 in mittelschwere Kerne, so dass sich auch solche Prozesse zur Energiegewinnung eignen.

d) Beta-Strahlung besteht aus negativ geladenen Elektronen, die in elektrischen und magnetischen Feldern abgelenkt werden. Die Strahlung ist ionisierend und hat bezüglich ihrer biologischen Wirksamkeit einen Qualitätsfaktor von 1. Beta-Strahlung besitzt ein kontinuierliches Energiespektrum bis hin zu einer maximal auftretenden

Energie. Sie hat in Wasser eine Reichweite im cm-Bereich und lässt sich durch ca. 3mm dicke Aluminiumplatten abschirmen.

e) $0{,}01 \cdot N_0 = N = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t}$ → $t = -\ln(0{,}01) \cdot \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = -\ln(0{,}01) \cdot \frac{12{,}3\,a}{\ln 2} = \underline{\underline{81{,}7\,a}}$

f) Vorteile: Im Vergleich zur Kernspaltung haben die radioaktiven Abfälle viel kleinere Halbwertszeiten und könnten tatsächlich ausreichend sicher gelagert werden; Energie ohne Treibhausgase; Keine Ausbeutung stark begrenzter Ressourcen wie bei Erdöl, Deuterium in den Weltmeeren praktisch unbegrenzt vorhanden (Tritium kann im Reaktor selbst erbrütet werden); keine destruktiven Eingriffe in die Natur nötig wie bei Wasserkraftwerken oder großen Windkraftanlagen;

Nachteile: technische Realisierbarkeit und Wirtschaftlichkeit eines Fusionskraftwerks noch gar nicht geklärt; hohe Entwicklungskosten; radioaktive Abfälle, wenn auch mit relativ kurzer Halbwertszeit

Aufgabe 10.186: G8 Abi 2011; Nuklearbatterien

In der Raumfahrt werden Nuklearbatterien eingesetzt, die ihre Energie aus dem Zerfall von Radioaktiven Isotopen gewinnen. Die dabei freigesetzte thermische Energie wird in elektrische Energie umgewandelt. In den letzten Jahren wurden sehr kompakte Nuklearbatterien entwickelt; es wird erwogen, diese auch außerhalb der Raumfahrt einzusetzen. Als Radioisotop wird Tritium H3 verwendet, das ein reiner Beta-Minus-Strahler mit der Halbwertszeit 12,3 a und der Atommasse m(H3) = 3,016049 u ist. Die Atommasse des stabilen Reaktionsprodukts beträgt 3,016029 u.

a) Geben Sie die Gleichung für den genannten Zerfall an und berechnen Sie die maximale kinetische Energie der Beta-Minus-Teilchen.

b) Begründen Sie, weshalb nahezu alle Beta-Minus-Teilchen eine geringere Energie als die in Teilaufgabe 2.a) berechnete besitzen.

Beim Prototyp einer Mini-Nuklearbatterie soll zum Zeitpunkt der Herstellung die Tritium-Aktivität Ao = 96 TBq vorliegen.

c) Berechnen Sie die Masse des in der Batterie anfänglich vorhandenen Tritiums. Auf welchen Prozentsatz der Anfangsaktivität sinkt die Aktivität innerhalb von 4,0 Jahren?

d) Erläutern Sie, welche Schutzvorkehrungen in Hinblick auf die Beta-Minus-Strahlung getroffen werden müssten, wenn man eine Nuklearbatterie als Stromquelle für ein Handy einsetzten würde.

e) Diskutieren Sie unter Einbeziehung der bisherigen Ergebnisse Vor- und Nachteile eines möglichen Einsatzes von Nuklearbatterien anstelle von herkömmlichen Akkus oder Batterien in verschiedenen Anwendungsbereichen. Beurteilen Sie insbesondere, ob ein Einsatz in der Konsumelektronik sinnvoll wäre.

Lösung:

a) ${}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{3}_{2}He^{+} + e^{-} + \overline{\nu_e}$

$$E_{kin,max}=Q=(m_H-m_{He})\cdot c^2=(3{,}016049-3{,}016029)\cdot uc^2=\underline{18{,}6\,keV}$$

b) Da es beim Beta-Minus-Zerfall drei Reaktionsprodukte gibt, ist die Energieverteilung auf die Reaktionsprodukte nicht durch die Impulserhaltung vorgegeben. Die Energie kann sich auf unendlich viele verschiedene Arten auf die Reaktionsprodukte verteilen, deshalb erhält das Beta Minus-Teilchen nur sehr selten fast die vollständige Zerfallsenergie als kinetische Energie.

c) $$A_0=\lambda\cdot N_0=\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \rightarrow N_0=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\cdot A_0=\frac{12{,}3\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,s}{\ln 2}\cdot 96\cdot 10^{12}\,Bq=\underline{5{,}37\cdot 10^{22}}$$

$$m_0=N_0\cdot m_H=5{,}37\cdot 20^{22}\cdot 3{,}016\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg=\underline{0{,}269\,g}$$

$$A_4=A_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=A_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t}=A_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{12{,}3\,a}\cdot 4\,a}=\underline{A_0\cdot 0{,}798}$$

Die Aktivität sinkt auf 79,8% der Anfangsaktivität.

d) Zur Abschirmung der Beta-Minus-Strahlung müsste die Nuklearbatterie eine Hülle aus mindestens 3mm starkem Aluminium oder besser haben. Das Gehäuse der Batterie müsste völlig dicht sein, was schwierig ist, weil Wasserstoff ein sehr hohes Diffusionsvermögen besitzt. Außerdem müsste das Gehäuse ausreichend stabil sein, um bei Runterfallen oder schwereren Unfällen nicht seine Dichtigkeit zu verlieren.

e) Beachte: ... Einbeziehung der bisherigen Ergebnisse ... ; ... verschiedenen Anwendungsbereichen (-> dann sollte wohl ein Bereich mit positiver Entscheidung dabei sein; zwei Anwendungsbereiche sind bereits gegeben -> Raumfahrt, Konsumelektronik) ...

Bei den Vorteilen nicht vergessen -> extrem lange Betriebsdauer ohne Aufladen

Bei den Nachteilen nicht vergessen -> Gesundheitsgefährdung durch Radioaktivität mit langer Halbwertszeit und hoher Aktivität

Aufgabe 10.187: Abi 2012; Radioisotopengenerator

Voraussichtlich ab August 2012 soll das Roboterfahrzeug "Curiosity" die Marsoberfläche erkunden. Das Fahrzeug ist mit einem Radioisotopengenerator ausgestattet, der die beim Alpha-Zerfall des Isotops Pu238 entstehenden Wärmeleistung nutzt und sie mit Hilfe von Thermoelementen des Wirkungsgrads 5,5% in elektrische Leistung umwandelt. Die Halbwertszeit von Pu238 beträgt 87,7 a, die Atommasse 238,049560 u.

a) Stellen Sie die Gleichung für den Zerfall von Pu238 auf und berechnen Sie die gesamte pro Zerfall freiwerdende Energie Q. Die Atommasse von He4 beträgt 4,002603 u, die des Zerfallsprodukts 234,040952 u. (Kontrolle: Q = 5,59 MeV)

b) Berechnen Sie die Wärmeleistung P, die in 1,0 g des Plutoniumisotops aufgrund der Aktivität entsteht. (Kontrolle: P = 0,57 W)

c) Nach der 250 Tage dauernden Anreise zum Mars soll "Curiosity" dort ein Marsjahr (687 Tage) lang aktiv sein. Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Aktivität des Plutoniums während des Zeitraums vom Start auf der Erde bis zum Ende der Mission gesunken ist.

Für den Betrieb des Marsrovers muss vom Zeitpunkt des Starts bis zum Ende der Mission eine elektrische Leistung von rund 0,1 kW dauerhaft bereitgestellt werden.

d) Ermitteln Sie unter Berücksichtigung des Wirkungsgrads des Thermoelements die Masse an Pu238, die zum Zeitpunkt des Starts im Isotopengenerator dafür eingebaut sein muss.

Isotop	Atommasse	Wärmeleistung pro Gramm	Halbwertszeit
Pu238	238.049560 u	0,57 W	87,7 a
Po210	209,982874 u	144 W	138 d

d) Vor 40 Jahren wurde im Radioisotopengenerator des sowjetischen Mondrovers "Lunochod" der Alpha-Strahler Po210 verwendet. Beurteilen Sie, ob auch Po210 für den Marsrover als Energiequelle geeignet wäre.

Lösung:

a) $^{238}_{94}Pu \rightarrow {}^{234}_{92}U^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+}$

$$Q=(m_{Pu}-m_U-m_{He})\cdot c^2=(238{,}049560-234{,}040952-4{,}002603)\cdot uc^2=\underline{5{,}59\,MeV}$$

b) $$N=\frac{m}{m_{Pu}}=\frac{1{,}0\cdot 10^{-3}\,kg}{238\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}=\underline{2{,}53\cdot 10^{21}}$$
$$A=\lambda\cdot N=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot N=\frac{\ln 2}{87{,}7\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,s}\cdot 2{,}53\cdot 10^{21}=\underline{\underline{6{,}34\cdot 10^{11}\frac{1}{s}}}$$

Die Anzahl der Zerfälle pro Sekunde mal die Energie pro Zerfall gibt die Energie pro Sekunde also die Leistung:

$$P=A\cdot Q=5{,}59\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J\cdot 6{,}34\cdot 10^{11}\frac{1}{s}=\underline{0{,}567\,W}$$

c) $$A=A_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=A_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t}=A_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{87{,}7\cdot 365\,d}\cdot 937\,d}=\underline{0{,}9799\cdot A_0}$$

Die Aktivität ist also um 2,01% gesunken.

d) $$P_{nutz}=\eta\cdot P_{ges}\ \rightarrow\ P_{ges}=\frac{P_{nutz}}{\eta}=\frac{100\,W}{0{,}055}=\underline{1818\,W}$$

Das ist die Wärmeleistung am Ende, und das sind 97,99% der Anfangsleistung.

$$P_{Anfang}=\frac{1818\,W}{97{,}99}\cdot 100=\underline{1855\,W}$$

Ein Gramm hat eine Leistung von 0,57 W.

$$\frac{1855\,W}{0{,}57\,W}=\underline{3255}$$ Es müssen also 3,2 kg Pu238 mitgenommen werden.

e) $$A=A_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=A_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t}=A_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{138\,d}\cdot 937\,d}=\underline{0{,}0090\cdot A_0}$$

$$P_{Anfang}=\frac{1818\,W}{0{,}0090}\cdot 100=\underline{20{,}2\cdot 10^{6}\,W}$$

$$\frac{20{,}2\cdot 10^{6}\,W}{144\,W}=\underline{140\,278}$$

Es müssten also 140 kg Po210 mitgenommen werden. Das ist viel zu schwer, weil das Gewicht bei der Konstruktion eines Raumfahrzeugs sehr kritisch ist. Außerdem hätte das Po210 beim Start ungefähr eine Wärmeleistung von 20 MW. Eine solche Wärmeleistung lässt sich nicht mehr abführen und würde die Ausrüstung einschmelzen. Ein solches Raumfahrzeug ist also gar nicht konstruierbar.

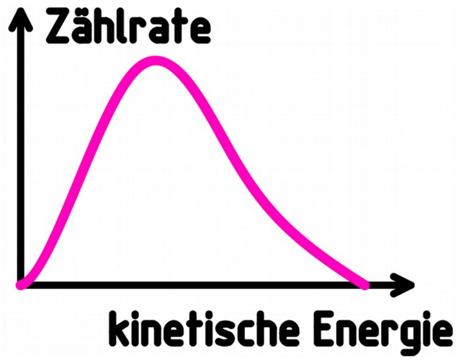
Aufgabe 10.188: Abi 2013; Das radioaktive Eisenisotop Fe59

Das Eisenisotop Fe59 ist ein Beta-Minus-Strahler mit der Halbwertszeit 44,5 d, der in der Medizin zum Einsatz kommt.

Gegebene Atommassen: m(Fe59) = 58,934876 u ; m(Tochter) = 58,933195 u

a) Geben Sie für den Beta-Minus-Zerfall von Fe59 die Reaktionsgleichung an und beschreiben Sie den Beta-Minus-Zerfall im Quark-Modell.

b) Weisen Sie nach, dass beim Beta-Minus-Zerfall eines Fe59-Kerns die Energie 1,57 MeV frei wird.



Wie die nebenstehende Skizze zeigt, ist die kinetische Energie der beim Zerfall entstehenden Beta-Minus-Teilchen kontinuierlich verteilt.

c) Erklären Sie, warum die Energieverteilung kontinuierlich ist.

Um eine medizinisch stichhaltige Aussage über den Eisenmangel im Körper eines Patienten zu erhalten, werden ihm in einem Getränk 0,12 ng des Isotops Fe59 verabreicht.

d) Zeigen Sie, dass das verabreichte Eisen Fe59 die Aktivität 0,37 MBq besitzt.

Bei extrem großem Eisenmangel wird der Körper des Patienten in der Folgezeit das Eisenisotop fast vollständig aufnehmen, jedoch kaum etwas davon ausscheiden. Nach 15 Tagen erfolgt eine erneute Bestimmung der Fe59-Aktivität.

e) Berechnen Sie die zu erwartende Fe59-Aktivität, wenn in den 15 Tagen 10% der ursprünglich verabreichten Menge Fe59 ausgeschieden wurden.

Lösung:

a) $^{59}_{26}Fe \rightarrow {}^{59}_{27}Co^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$

Im Quarkmodell wandelt sich ein down-Quark eines Neutrons unter Aussendung eines Elektrons und eines Anti-Elektronneutrinos in ein up-Quark um, wodurch aus dem Neutron ein Proton wird.

$$udd \rightarrow uud + e^{-} + \overline{\nu}_e$$

b) $Q = (m_{Fe} - m_{Co}) \cdot c^2 = (58{,}934876 - 58{,}933195) \cdot uc^2 = \underline{1{,}57\,MeV}$

c) Da beim Beta-Minus-Zerfall drei Reaktionsprodukte entsthen (Tochter, Elektron, Neutrino) ist die Energieverteilung auf die drei Produkte nicht durch die Impulserhaltung vorgegeben wie beim Alpha-Zerfall. Die Energie kann sich auf unendlich viele verschiedene Arten auf die drei Produkte verteilen, wodurch das kontinuierliche Spektrum entsteht.

d) $$N = \frac{m}{m_{Fe}} = \frac{0{,}2 \cdot 10^{-12}\,kg}{58{,}9 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{2{,}05 \cdot 10^{12}}$$

$$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N = \frac{\ln 2}{44{,}5 \cdot 24 \cdot 3600\,s} \cdot 2{,}05 \cdot 10^{12} = \underline{0{,}37\,MBq}$$

e) Man kann von der anfänglichen Eisenmenge 10% abziehen oder man kann von der restlichen Eisenmenge 10% abziehen oder man kann von der Aktivität zu Anfang oder zu Ende 10% abziehen. Es kommt immer dasselbe raus.

$$A = 0{,}9 \cdot A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 0{,}9 \cdot A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} = 0{,}9 \cdot 0{,}37\,MBq \cdot e^{-\frac{\ln 2}{44{,}5\,d} \cdot 15\,d} = \underline{0{,}26\,MBq}$$

Aufgabe 10.189: Abi 2013; Reaktorkatastrophe in Fukushima

In den Folgemonaten nach dem schweren Unfall im japanischen Kernkraftwerk Fukushima wurde unter anderem das Cäsium-Isotop Cs137 in die Umgebung freigesetzt, das eine Halbwertszeit von 30 Jahren besitzt.

Atommassen: m(Cs137) = 136,907090 u ; m(Ba137) = 136,905827 u

a) Das Isotop Cs137 zerfällt in stabiles Barium Ba137. Geben Sie die Zerfallsgleichung an und berechnen Sie die bei einem Zerfall frei werdende Energie Q.

b) Erläutern Sie die Vorgänge im Atomkern beim Beta-Minus-Zerfall anhand einer schematischen Darstellung einer Potentialtopfbesetzung des Kerns mit Protonen und Neutronen.

➔ Hinweis: Der Bezug zu einem bestimmten Element ist nicht verlangt.

c) Techniker, die nach dem Unfall Messungen in der Nähe des Kraftwerks vornahmen, waren Alpha-, Beta- und Gamma-Strahlung ausgesetzt. Beurteilen Sie die Wirksamkeit der Schutzanzüge aus Kunststoff-Folie, die hierbei zum Einsatz kamen, in Hinblick auf diese drei Strahlungsarten.

d) Geben Sie drei allgemeine Strahlenschutzmaßnahmen an und diskutieren Sie, inwiefern diese von den Technikern, die die Messungen am Kraftwerk vornahmen, eingehalten werden konnten.

Im Dorf Iitate nahe Fukushima wurde nach dem Unfall pro Quadratmeter Bodenoberfläche eine Cs137-Aktivität von 3,3 MBq gemessen. Die Bewohner wurden daraufhin evakuiert.

e) Berechnen Sie die Äquivalentdosis, die eine Person der Masse 75 kg in einem Jahr aufnehmen würde, falls sie pro Sekunde 3,3 Millionen Beta-Minus-Teilchen der mittleren kinetischen Energie 190 keV absorbieren würde. Vergleichen Sie diese Dosis mit einer natürlichen Strahlenbelastung von 2,4 mSv pro Jahr.

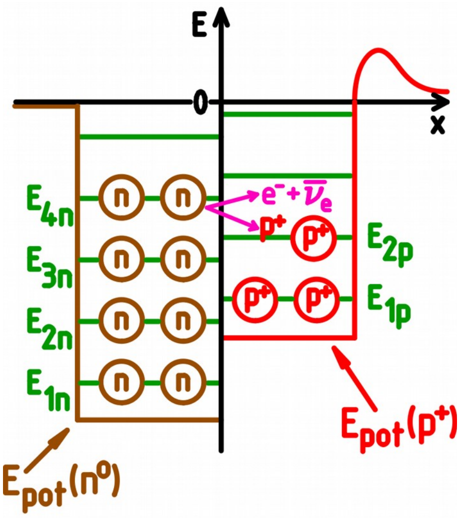
f) Ab einer Cs137-Aktivität von 4,0 kBq pro Quadratmeter Bodenoberfläche wird die Wiederbesiedlung von Itate durch die Behörden erlaubt. Berechnen Sie, wie lange auf Grund der Aktivitätsabnahme durch den radioaktiven Zerfall bis zur Wiederbesiedlung gewartet werden müsste.

Lösung:

a) $^{137}_{55}Cs \rightarrow {}^{137}_{56}Ba^{+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$

$$Q=(m_{Cs}-m_{Ba})\cdot c^2=(136{,}907090-136{,}905827)\cdot uc^2=\underline{1{,}18\,MeV}$$

b) Im Potentialtopf der Protonen gibt es einen freien Zustand, der energetisch niedriger liegt, als der höchste besetzte Zustand im Potentialtopf der Neutronen. Deshalb kann sich ein Neutron unter Freiwerdung von Energie in ein Proton umwandeln und den energetisch günstigeren Zustand im Protonentopf besetzen. Bei dem Vorgang entstehen noch ein Elektron und ein Anti-Elektron-Neutrino, die den Kern sofort verlassen.



c) Alpha-Strahlung wird schon von dünnen Materialschichten vollständig abgeschirmt. D.h. Alpha-Strahlung wird durch die Anzüge gut abgeschirmt.

Zur Abschirmung von Beta-Strahlung benötigt man ca. 13mm dicke Aluminiumschichten, für Gamma-Strahlung noch viel mehr. D.h. diese beiden Strahlungsarten werden von den Schutzanzügen so gut wie nicht abgeschirmt.

Bemerkung: Die Schutzanzüge dienen hauptsächlich dazu, die Aufnahme von radioaktiven Substanzen in den Körper zu verhindern.

d) Abschirmen: So gut wie nicht möglich, weil die Kunststoffanzüge lediglich Alpha-Strahlung abschirmen.

Abstand halten: So gut wie nicht möglich, weil dies den Einsatz von fernsteuerbaren Robotern erfordert hätte, was entweder schwierig oder sogar unmöglich war.

Aufnahme von radioaktiven Substanzen in den Körper vermeiden: Dazu dienen die Schutzanzüge. Außerdem notwendig wäre eine autonome Atemluftversorgung mit Druckluftflaschen (Filter reichen nicht aus).

Zeitliche Dauer der Strahlenexposition gering halten: Ist möglich, wenn die Techniker nicht zu tief in das stark kontaminierte Gebiet eindringen.

e) $$H = q \cdot \frac{E}{m} = 1 \cdot \frac{3{,}3 \cdot 10^6 \cdot 190 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365{,}25}{75\, kg} = \underline{\underline{42\, mSv}}$$

Die Belastung ist das 17,6-fache der natürlichen Strahlenbelastung.

f)
$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} \rightarrow -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t = \ln\left(\frac{A}{A_0}\right)$$
$$t = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{30\, a}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{4{,}0 \cdot 10^3\, Bq}{3{,}3 \cdot 10^6\, Bq}\right) = \underline{\underline{291\, a}}$$

11 Kernenergie

Kernspaltungsreaktoren werden gebaut zu Forschungszwecken - hauptsächlich um die Neutronen zu erhalten - und als Leistungsreaktoren zur Energiegewinnung. Fusionsreaktoren sind über das experimentelle Stadium noch nicht hinaus. Bis Fusionsreaktoren zur Energiegewinnung zur Verfügung stehen (wenn überhaupt) werden wahrscheinlich noch mindestens mehrere Jahrzehnte vergehen. Interessante Suchbegriffe zu Energie sind auch TREC, DESERTEC, "clean power from the deserts", Erdwärme, Tiefenbohrung, Wärmesonde und Wärmepumpe, Energieeffizienz, Energieeinsparung.

11.1 Kernspaltungsreaktor

In jedem Kernreaktor werden schwere Atomkerne durch Neutronen gespalten. Die dabei freiwerdende Energie wird in elektrische Energie umgewandelt.

Brennstoff

➔ Das einzige gut spaltbare Nuklid, dass in der Natur in erheblichen Mengen vorkommt ist U235.

Natururan besteht hauptsächlich aus U238. Der Anteil an U235 ist nur 0,7% und muss für den Leichtwasserreaktor auf 4% angereichert werden. Im Reaktor wird er Anteil wieder auf 0,9% abgebrannt.

Die Nuklide Pu239 und Pu241 sind ebenfalls spaltbar und werden in jedem Kernreaktor unvermeidlich erzeugt (180kg bzw. 50kg pro Jahr) und auch wieder teilweise gespalten, können allerdings bei der Wiederaufbereitung gewonnen werden. Ebenfalls spaltbar ist das Nuklid U233 (sehr gut waffentauglich), es muss aber mit hohem Aufwand in speziellen Brutreaktoren künstlich erzeugt werden.

Spaltung, Kettenreaktion

Ein Neutron trifft auf einen U235-Kern und spaltet diesen, meistens im Verhältnis zwei zu drei. Dabei werden durchschnittlich 2,3 Neutronen wieder freigesetzt.

Beispiel: $^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \rightarrow ^{147}_{60}Nd + ^{86}_{32}Ge + 3\ ^{1}_{0}n$

Die drei Neutronen der zweiten Generation spalten dann drei weitere Kerne, d.h. 9 Neutronen in der dritten Generation usw. --> Kettenreaktion. Pro Spaltung werden ca. 200MeV an Energie freigesetzt.

Neutronenabsorber, Steuerung der Kettenreaktion

Jede Spaltung liefert 2,3 Neutronen, von denen im Regelbetrieb nur eines für die nächste Spaltung benötigt wird, d.h. 1,3 Neutronen müssen weg. Der Großteil der überschüssigen Neutronen wird von sowieso im Reaktor vorhandenen Kernen absorbiert oder verlässt den Reaktor. Die immer noch überschüssigen Neutronen müssen von speziellen Materialien absorbiert werden.

➔ Gute Neutronenabsorber sind Bor, Cadmium und Silber

Steuerstäbe gibt es mit Bor oder mit Cadmium oder mit Cadmium und Silber. Sie werden benutzt um schnell und präzise reagieren zu können. Zur groben Steuerung setzt man dem Kühlwasser Borsäure zu, das ist viel billiger.

Wichtig für die Steuerung der Kettenreaktion ist, dass ein großer Teil der Neutronen erst mit 10 bis 20 Sekunden Verzögerung von den Spaltprodukten emittiert wird. Wäre dies nicht so, dann könnte man einen Kernreaktor unmöglich steuern.

Moderator, thermische Neutronen

Die U235-Kerne werden nur von relativ langsamen Neutronen (thermischen Neutronen) gut gespalten. Die bei der Spaltung entstehenden Neutronen sind viel zu schnell und müssen abgebremst werden (von 1,5MeV auf unter 0,1eV). Das geschieht durch Stöße mit Atomkernen des Moderators.

Ein guter Moderator hat eine hohe Stoßwahrscheinlichkeit, einen kleinen Kern (dadurch wird pro Stoß viel Energie übertragen) und eine geringe Neigung zum Absorbieren von Neutronen.

➔ Gute Moderatoren sind Wasser (Wasserstoffkern, 18 Stöße notwendig), schweres Wasser (Deuteriumkern, 25 Stöße notwendig) und Kohlenstoff (114 Stöße notwendig)

Wasser hat den Vorteil, dass man es gleichzeitig als Kühlmittel für den Reaktor (Abtransport der Energie) benutzen kann. Schweres Wasser wird in Nuklearantrieben von U-Booten benutzt (Vorteil: kleinerer Platzbedarf des Reaktors) und in den kanadischen CANDU-Reaktoren (Vorteil: kanadisches Natururan muss zum Einsatz nicht oder nur schwach angereichert werden).

MOX-Brennelemente

Durch Wiederaufbereitung oder in Brutreaktoren wurde spaltbares Plutonium gewonnen und durch nukleare Abrüstung ist viel Plutonium überflüssig geworden. Dieses Plutonium kann in Kernreaktoren eingesetzt werden und wird sogenannten Mischoxid-Brennelementen (MOX) zugesetzt. Ein Nachteil dabei ist, dass Pu239 und Pu241 auch durch schnelle Neutronen recht gut gespalten werden, es ist also nicht unbedingt ein Moderator notwendig.

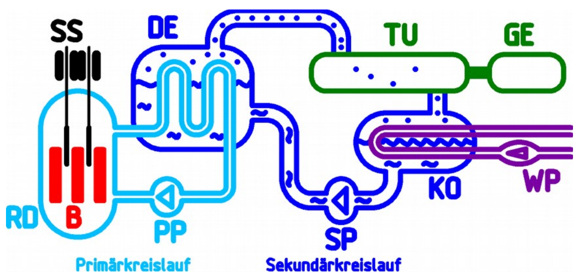
Nachwärme

Die Spaltprodukte enthalten für ihre Ordnungszahl zu viele Neutronen und sind deshalb alle instabil (Beta-Minus-Zerfall). Durch diese Zerfälle wird sehr viel Energie freigesetzt, die ungefähr 5% der Wärmeleistung des Reaktors ausmacht. Das heißt, bei vollständig abgeschalteter Spaltung hat ein Reaktor mit 3GW Wärmeleistung immer noch eine Restwärmeleistung von 150MW die den Reaktor ohne Kühlung zum Schmelzen bringt (Kernschmelze, GAU).

☠ Der abgeschaltete Reaktor muss also unbedingt gekühlt werden

In einer solchen Kernschmelze kann es unter ungünstigen Bedingungen zum Wiedereinsetzten der Kernspaltung kommen, besonders bei Verwendung von MOX-Brennelementen (Spaltung auch durch schnelle Neutronen).

Aufbau eines Druckwasserreaktors

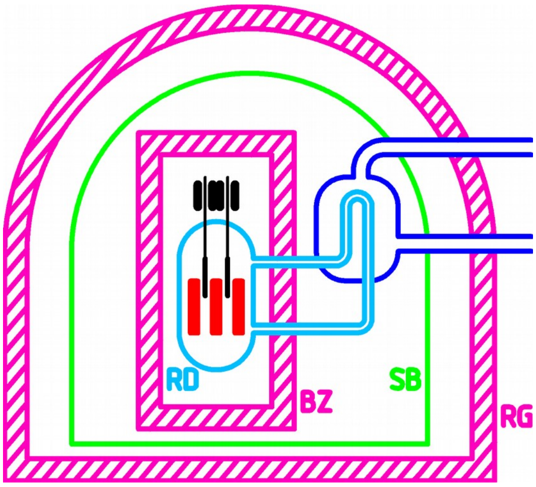


Die Brennelemente B befinden sich im Reaktordruckbehälter RD. Dazwischen laufen die Führungen für die Steuerstäbe SS. Das Kühlwasser wird in den Dampferzeuger DE geleitet, kühlt dort ab und wird von der Primärkühlmittelpumpe PP wieder in den Reaktor gedrückt. Der im Dampferzeuger gewonnene Dampf wird in die Turbine TU geleitet, die den Generator GE antreibt. Im Kondensator KO wird der Dampf mit Flusswasser und Wasser aus dem Kühlturm wieder kondensiert und von der Sekundärkühlmittelpumpe SP wieder in den Dampferzeuger eingebracht. Es gelangt kein Wasser von einem der drei Kühlmittelkreisläufe in einen benachbarten, so dass der Sekundärkreislauf im Regelbetrieb nicht kontaminiert ist.

➔ Typische Daten eines deutschen Druckwasserreaktors

Primärkreislauf -> 300°C bei 150bar; Sekundärkreislauf -> 285°C bei 66bar; Wärmeleistung 3,5GW; elektrische Leistung 1,3GW; Wirkungsgrad 34%; Brennstoff im Reaktor 100t; alte Brennelemente im Kühlbecken 200t; die große Brennstoffmenge im Reaktor ist die konstruktive Schwäche der Druckwasserreaktoren (Grund: Herunterfahren-Austauschen-Hochfahren dauert mindestens zwei Wochen; einmal pro Jahr)

Sicherheitsbarrieren



Die Stabförmigen Brennelemente haben eine spezielle Hülle (Zirkaloy), welche Spaltprodukte daran hindert in das Primärkühlsystem einzudringen. Der Reaktordruckbehälter (Stahl; Wandstärke 25cm, 500t) befindet sich in einem 2 bis 4m dicken Stahlbetonzylinder BZ der radioaktive Strahlung zurückhalten soll (Biologischer Schild) und im Störfall austretendes Kühlwasser auffängt. Den Boden dieses Zylinders nennt man den Sumpf. Stahlbetonzylinder und Dampferzeuger befinden sich im abgedichteten und unter Unterdruck stehenden Sicherheitsbehälter SB (Stahl; Wandstärke einige Zentimeter). Das ganze befindet sich im Reaktorgebäude RG aus Stahlbeton. Die nicht ganz alten Reaktorgebäude sind darauf ausgelegt, den Aufprall eines 20t schweren und 700km/h schnellen Jets auszuhalten. Das bedeutet allerdings nicht, dass das Reaktorgebäude jeden möglichen Flugzeugabsturz unbeschadet übersteht.

Zusätzlich zu diesen Sicherheitsbarrieren gibt es Rückhaltevorrichtungen für radioaktive Gase und Flüssigkeiten (Kühlwasser), die natürlich nicht unbegrenzte Aufnahmefähigkeiten besitzen.

Weitere Sicherheitskonzepte

➔ Entmaschung

Jedes Sicherheitssystem soll unabhängig vom Ausfall anderer Systeme funktionieren. Zum Beispiel sind die Kühlmittelpumpen nicht auf den Strom des Hauptgenerators angewiesen. Im Notfall wird der Strom von Dieselgeneratoren erzeugt.

➔ Redundanz

Jedes sicherheitsrelevante System ist mehrfach vorhanden. Zum Beispiel gibt es alle Kühlmittelpumpen mehrfach.

➔ Diversität

Technisch unterschiedliche Systeme zum selben Zweck. Zum Beispiel können die Kühlmittelpumpen nicht nur von Dieselgeneratoren auf dem Gelände versorgt werden, sondern das AKW besitzt eine Vorzugsleitung zu einem nahegelegenen E-Werk von dem aus es im Notfall bevorzugt versorgt wird, d.h. im Notfall bekommt niemand Strom außer dem AKW.

➔ Fail-Safe

Soweit möglich ist die Konstruktion so ausgelegt, dass die Anlage bei einem Störfall automatisch in einen sicheren Zustand überführt wird. Zum Beispiel werden die Steuerstäbe vom selbst produzierten Strom oben gehalten und fallen bei einem Ausfall der Anlage von selbst in den Reaktor, was zur Abschaltung der Spaltung führt.

Darüber hinaus hat der Druckwasserreaktor selbstregulierende Eigenschaften. Wenn der Reaktor überhitzt und/oder sich Dampfblasen bilden sinkt die Neutronenausbeute (schlechtere Moderation, höhere Absorbtion) und die Spaltungsrate geht zurück.

Vor- und Nachteile von AKWs

☺ Vorteile

Verfügbarkeit von Energie

Energie ohne CO2-Ausstoß

Energie zu niedrigen Preisen, solang die Kosten für die Endlagerung der Abfälle nicht zu groß werden

...

☠ Nachteile

Problem der Endlagerung der Abfälle ist bislang ungelöst und auch nur schwer oder vielleicht gar nicht lösbar (Lagerung müsste einige 10000 Jahre stabil sein)

Restrisiko für Unfälle lässt sich nicht auf Null reduzieren. Die Erfahrung zeigt, dass bei der aktuellen Kraftwerksdichte weltweit etwa alle 25 Jahre ein schwerer Unfall passiert.

...

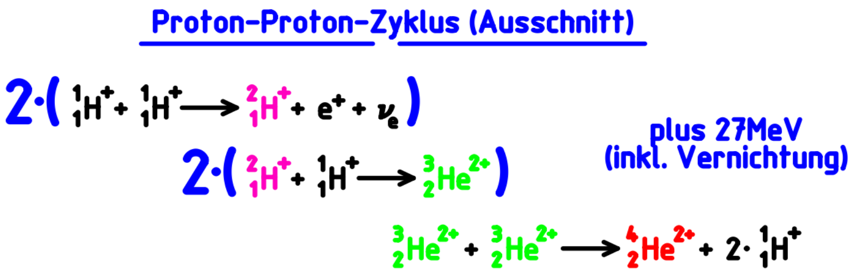
Bemerkung

Alle auf Kraftwerke bezogenen Zahlenwerte in diesem Kapitel sind grob gerundet und sollen nur die Größenordnung für typische deutsche AKW verdeutlichen.

11.2 Kernfusion

Die Kernfusion ist die Energiequelle der Sonne und damit die Grundlage für alles Leben auf der Erde. Voraussetzung für das Einsetzen der Kernfusion ist hoher Druck und hohe Temperatur.

Sonne

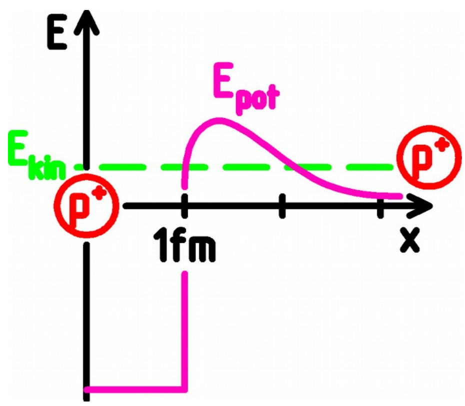


Fusionsprozesse finden nur im Kern der Sonne bei einem Druck von 200 Mrd. bar und einer Temperatur von 15 Mio. Kelvin statt. Bei dieser Temperatur liegt die Materie als Plasma vor, es gibt also keine Atome mehr, sondern nur noch freie Protonen und Elektronen (allg. Kationen und Elektronen). Der hohe Druck führt zu einer hohen Teilchendichte, was die Wahrscheinlichkeit für den Zusammenstoß zweier Protonen erhöht.

Damit zwei Protonen fusionieren können, müssen sie sich bis auf ca. 1fm nahekommen, weil erst bei dieser Entfernung die starke Wechselwirkung die Coulombabstoßung überwiegt. Bei dieser Entfernung beträgt die potentielle Energie der beiden Protonen 1,44MeV. Die mittlere kinetische Energie der Protonen beträgt bei 15 Mio. Kelvin ca. 2keV. D.h. die Protonen können sich unmöglich ausreichend nahe kommen, die Sonne kann gar nicht funktionieren.

Aufgabe 11.190:

Die mittlere kinetische Energie der Protonen im Sonnenkern ist ca. 2keV. Einige wenige Protonen haben auch 50keV, noch weniger sogar 100keV. Trotzdem reicht die Energie der Protonen unmöglich aus, damit sie sich auf den zur Fusion notwendigen Abstand von 1fm nähren können, weil die potentielle Energie der beiden Protonen bei dieser Entfernung 1,44MeV beträgt.



Wie ist es dann trotzdem möglich, dass ein Proton in den von der starken Wechselwirkung erzeugten Potentialtopf eines anderen Protons eindringen kann?

Fusionsreaktor

Zuerst muss man ein Plasma erzeugen und einschließen. Das Einschließen geschieht durch Magnetfelder (Tokamak oder Stellarator). Da man im magnetischen Einschluss keine hohen Drücke erzeugen kann (ca. 1bar) braucht man wesentlich höhere Temperaturen als in der Sonne (ca. 150 Mio. Kelvin). Die mittlere kinetische Energie der Teilchen beträgt dann ca. 20keV. Das Aufheizen geschieht durch elektromagnetische Induktion, durch Einstrahlen von Mikrowellen und noch andere Methoden.

Aussichtsreichster Kandidat für eine Reaktion im Fusionsreaktor ist die Deuterium-Tritium-Fusion.

$$\boxed{{}^{2}_{1}D + {}^{3}_{1}T \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n + 17{,}6\,MeV}$$

Deuterium kommt in der Natur in ausreichender Menge vor. Tritium ist instabil (Halbwertszeit 12,3a) und kommt in der Natur nicht vor. Wenn man die Reaktorwand mit Lithium auskleidet, kann der Reaktor aber sein Tritium selbst erbrüten.

$$\boxed{{}^{6}_{3}Li + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{3}_{1}T + 4{,}8\,MeV}$$

Da der Reaktor aus jeder Fusion nur ein Neutron erzeugt müssen die Neutronen vermehrt werden, um ausreichend Tritium erbrüten zu können. Dazu könnte man in die Reaktorwand Beryllium einbringen.

$$\boxed{{}^{9}_{4}Be + {}^{1}_{0}n \rightarrow 2\,{}^{4}_{2}He + 2\,{}^{1}_{0}n - 1{,}57\,MeV}$$

Vor allem durch die extrem hohe Neutronendichte im Reaktor kommt es zu Kernreaktionen in der Reaktorwand, wodurch radioaktiver Abfall entsteht.

☺ Vorteile gegenüber Kernspaltungsreaktoren

Es fällt weniger radioaktiver Abfall an und vor allem ist der Abfall deutlich weniger gefährlich. Eine Lagerung für 500 Jahre sollte genügen.

Ein außer Kontrolle geraten des Reaktors ist nicht vorstellbar, da es keine Kettenreaktion gibt, und die Bedingungen für die Fusion von außen mit Gewalt aufrechterhalten werden müssen.

☹ Erzeugung und Einschluss des Plasmas sind gelungen, auch das aufrechterhalten der Fusion für mehrere Sekunden ist bereits gelungen (z.B. 16MW für eine Sekunde am JET). Die technische Realisierbarkeit eines Leistungskraftwerks ist aber noch ungeklärt.

➔ Interessante Zahlen für die Sonne: mittlere Leistungsdichte im Kern $18\,W/m^3$; Leistungsdichte im Zentrum des Kerns $140\,W/m^3$ (Leistungsdichte eines Verbrennungsmotors $>10^7\,W/m^3$); Gesamtleistung $3{,}9\cdot 10^{26}\,W$; auf der Erde ankommende Leistung $1{,}8\cdot 10^{17}\,W$; weltweiter Gesamtenergiebedarf der Menschheit ca. $10^{13}\,W$ (Ich bin ein bisschen unsicher wegen der Zahlen; ich hab schon mal wo gelesen das der Faktor 100 000 ist, bei mir ist er aber nur ca. 10 000)

Aufgabe 11.191: Abi 1998

Ein U235-Kern kann sich spontan spalten, d.h. von sich aus auseinanderbrechen; das ist eine Form des natürlichen radioaktiven Zerfalls. In einem Kernreaktor dagegen wird die Spaltung von U235 "induziert", d.h. künstlich eingeleitet.

a) Wodurch werden im Kernreaktor U235-Spaltreaktionen induziert und wie kommt es zu einer Kettenreaktion.

b) Wie muss prinzipiell in den Ablauf der Kettenreaktion steuernd eingegriffen werden, damit reguläre Reaktorbetriebsbedingungen entstehen?

Eine induzierte Spaltung eines U235-Kerns kann z.B. als Spaltbruchstücke einen Kr89- und einen Ba144-Kern liefern.

c) Stellen Sie die Reaktionsgleichung auf.

d) Berechnen Sie die bei dieser Spaltreaktion frei werdende Energie näherungsweise aus den Werten der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon gemäß nebenstehender Tabelle.

U235	7,4 Mev
Ba144	8,1 MeV
Kr89	8,4 MeV

e) Wie viele solche Spaltreaktionen müssen pro Sekunde stattfinden, um eine Leistung von 1,0 MW zu erzielen?

Lösung:

a) Die Spaltungen werden durch langsame (thermische) Neutronen induziert; zu einer Kettenreaktion kommt es, weil bei jeder Spaltung wieder 2 bis 3 Neutronen freigesetzt werden (also ein Überschuss von 1 bis 2), die selbst wieder U235-Kerne spalten können; also können in jeder Spaltungsgeneration mehr Kerne gespalten werden als in der vorherigen -> Kettenreaktion

b) Die bei den Spaltungen entstehenden Neutronen haben eine hohe kinetische Energie, und müssen abgebremst (moderiert) werden um - mit einer hohen Wahrscheinlichkeit - weitere U235-Kerne spalten zu können. Überzähligen Neutronen (1 bis 2 pro Spaltung) müssen von einem Neutronenabsorber (B oder Cd) entfernt werden um eine konstante Spaltungsrate zu erhalten.

c) $^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \rightarrow ^{89}_{36}Kr + ^{144}_{56}Ba + 3\,^{1}_{0}n$

d) $Q = E_{Ba} + E_{Kr} - E_U = 144 \cdot 8{,}1\,MeV + 89 \cdot 8{,}4\,MeV - 235 \cdot 7{,}4\,MeV = \underline{\underline{175\,MeV}}$

e) Pro Sekunde 1,0 MJ

$$N = \frac{E_{ges}}{Q} = \frac{1{,}0 \cdot 10^6\,J}{175 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J} = \underline{\underline{3{,}6 \cdot 10^{16}}}$$ <- Spaltungen pro Sekunde

<u>Aufgabe 11.192: Abi 2010; Der natürliche Kernreaktor in Oklo</u>

In einem Kilogramm natürlich vorkommenden Urans sind 7,1 g des Isotops U235 (Halbwertszeit 750 Mio. Jahre) enthalten, der Rest besteht im Wesentlichen aus dem Isotop U238 (Halbwertszeit 4,5 Mrd. Jahre).

a) Berechnen Sie die Aktivität von 1,0 kg natürlichen Urans.

b) Erläutern Sie, wie man die Halbwertszeit von langlebigen Isotopen experimentell ermitteln kann.

c) Geben Sie an, vor wie vielen Jahren es viermal so viel U235 wie heute gab.

d) Erklären Sie, warum der Anteil von U235 am gesamten Uranvorkommen damals deutlich größer war als heute.

Vor zwei Milliarden Jahren lag der Anteil von U235 bei etwa 3,6%. Uran in diesem Verhältnis ist kernreaktorfähig. Tatsächlich wird vermutet, dass in Oklo, einer afrikanischen Erzlagerstätte mit sehr großem Uranvorkommen, ein natürlicher Kernreaktor in Betrieb war. In Indiz dafür ist der erhöhte Anteil von Nd143 am natürlichen Neodymvorkommen. Dies könnte durch Vorgänge entstanden sein, die im Folgenden näher beleuchtet werden.

e) Trifft ein thermisches Neutron auf einen U235-Kern, können zum Beispiel ein Ba143-Kern, ein weiterer Tochterkern und drei freie Neutronen entstehen. Geben Sie die Reaktionsgleichung an.

f) Die Atommasse von Ba143 beträgt 142,92062 u, die des anderen Tochterkernuklids 89,919524 u. Berechnen Sie daraus die bei der in Teilaufgabe e) betrachteten Spaltreaktion frei werdende Energie.

g) Der Ba143-Kern zerfällt in mehreren Schritten in das stabile Isotop Nd143. Begründen Sie, welche Zerfälle dabei auftreten können.

h) Pro gespaltenem U235-Kern werden insgesamt ca. 198 MeV frei. Dieser Wert liegt deutlich über dem in Teilaufgabe f) ermittelten Wert. Woher stammt die restliche Energie?

i) Vermutlich wurden in dem natürlichen Reaktor in Oklo über einen Zeitraum von etwa 500 000 Jahren ca. fünf Tonnen U235 gespalten. Berechnen Sie daraus die durchschnittliche Leistung des Reaktors und schätzen Sie ab, wie viele Menschen unserer zivilisierten Welt (täglicher Energiebedarf pro Person etwa 0,36 GJ) mit einem Kraftwerk dieser Leistung versorgt werden könnten.

j) In die Uranlagerstätte konnte damals Wasser eindringen. Erläutern Sie kurz, warum dies für die Aufrechterhaltung des "Reaktorbetriebs" notwendig war.

<u>Lösung:</u>

a) $$A_{235} = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{m_U} = \frac{\ln 2}{750 \cdot 10^6 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,s} \cdot \frac{0{,}0071\,kg}{235 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{533\,kBq}$$

$$A_{238} = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{m_U} = \frac{\ln 2}{4{,}5 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,s} \cdot \frac{0{,}9929\,kg}{238 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,kg} = \underline{12\,275\,kBq}$$

$$A_{ges} = A_{235} + A_{238} = 533\,kBq + 12\,275\,kBq = \underline{\underline{12{,}8\,MBq}}$$

b) Mann muss zuerst die Teilchenzahl des Isotops in der Probe bestimmen, z.B. durch Messung der Masse und Bestimmung des Anteils des Isotops im Massenspektrometer. Danach bestimmt man die Aktivität und erhält mit $A = \lambda \cdot N$ die Zerfallskonstante λ. Aus dieser erhält man mit $T_{\frac{1}{2}} = \ln 2/\lambda$ die Halbwertszeit.

c) Im Lauf von zwei Halbwertszeiten reduziert ich das vorhandene U235 auf $\frac{1}{4}$ des Anfangswertes. D.h. vor zwei Halbwertszeiten, also vor 1,5 Mrd. Jahren gab es viermal so viel wie heute.

d) Die Halbwertszeit von U235 ist wesentlich kleiner als die Halbwertszeit von U238. Deshalb zerfällt das U235 viel schneller als das U238, weshalb der Anteil an U235 ständig kleiner wird. Deshalb muss früher der Anteil viel größer gewesen sein.

e) $${}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{143}_{56}Ba + {}^{90}_{36}Kr + 3\,{}^{1}_{0}n$$

f)
$$\begin{aligned}\Delta E &= (m_N + m_U - m_{Ba} - m_{Kr} - 3\,m_N)\cdot c^2\\ &= (235{,}04392 - 142{,}92062 - 89{,}919524 - 2\cdot 1{,}008665)\cdot uc^2\\ &= \underline{\underline{174\,MeV}}\end{aligned}$$

g) ${}^{143}_{56}Ba$ → ... → ${}^{143}_{60}Nd$ + ???

Da die Massenzahl sich nicht verändert, können keine Alpha-Zerfälle beteiligt sein, und da die Kernladungszahl größer wird, können keine Beta-Plus-Zerfälle beteiligt sein. Es können also nur Beta-Minus-Zerfälle und Gamma-Zerfälle beteiligt sein.

h) Die restliche Energie stammt aus den Zerfällen der direkten Spaltprodukte und deren instabiler Tochterkerne, also hauptsächlich aus den folgenden Beta-Minus-Zerfällen.

Nicht gefragt: Da der schwere Uran-Kern einen höheren Neutronenanteil als die stabilen mittelschweren Kerne hat, haben die Spaltprodukte zu viele Neutronen, und sind deshalb instabil, hauptsächlich Beta-Minus-instabil.

i) $$E = N\cdot Q = \frac{m}{m_{235}}\cdot Q = \frac{5\cdot 10^3\,kg}{235\cdot 1{,}66\cdot 1{,}66\cdot 10^{-27}\,kg}\cdot 198\cdot 10^6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,J = \underline{\underline{4{,}06\cdot 10^{17}\,J}}$$

$$P = \frac{E}{t} = \frac{4{,}06\cdot 10^{17}\,J}{5\cdot 10^5\cdot 365\cdot 24\cdot 3600\,s} = \underline{\underline{25{,}7\,kW}}$$

Personen: $$N = \frac{P\cdot 1\,d}{E_{Per}} = \frac{25{,}7\cdot 10^3\,W\cdot 24\cdot 3600\,s}{0{,}36\cdot 10^9\,J} = \underline{\underline{6{,}2}}$$

Es könnten also nur etwa 6 Personen mit Energie versorgt werden.

j) Die bei den Spaltungen entstehenden Neutronen sind sehr energiereich. Damit diese Neutronen wieder andere U235-Kerne spalten können, müssen sie zuerst auf thermische Energien abgebremst - man sagt moderiert - werden. Das geschieht durch Stöße mit möglichst leichten Kernen, die eine möglichst hohe Stoßwahrscheinlichkeit haben. Dazu eignet sich z.B. Wasser mit den darin enthaltenen Protonen.

12 Neutronen

Entdeckung

1930 beschießen Bothe und Becker Beryllium mit Alpha-Strahlen. Dabei trat eine sehr energiereiche Strahlung auf. Die Versuche zeigten, dass die Strahlung nicht elektrisch geladen war, und nicht aus Photonen (Gamma-Quanten) bestehen konnte, es musste also ein neues Teilchen sein.

$$\boxed{{}^{4}_{2}\alpha^{2+} + {}^{9}_{4}Be \rightarrow {}^{12}_{6}C^{2+} + {}^{1}_{0}n}$$

Erzeugung

Wenn man ganz viele Neutronen braucht, dann nimmt man sie aus einem Kernreaktor. Für kleinere Mengen benutzt man als Neutronenquellen:

➔ einen Behälter mit Be9 und einem Alphastrahler wie z.B. Pu, Ra oder Po (Reaktionsgleichung siehe oben)

➔ ein Nuklid, dass zur spontanen Kernspaltung neigt, z.B. Cf252

Aktivierung

Da Neutronen nicht von Atomkernen abgestoßen werden, neigen sie dazu Kernreaktionen auszulösen. Dabei werden die reagierenden Mutterkerne oft instabil, also radioaktiv. Beispiele:

${}^{16}_{8}O + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{16}_{7}N^{-} + {}^{1}_{1}p^{+}$	N16: Beta-Minus; 7,3s
${}^{58}_{26}Fe + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{59}_{26}Fe + \gamma$	Fe59: Beta-Minus; 45d
${}^{44}_{20}Ca + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{45}_{20}Ca + \gamma$	Ca45: Beta-Minus; 164d

Die Wahrscheinlichkeit dafür, ob die Neutronen eine bestimmte Reaktion auslösen ist stark von der Geschwindigkeit der Neutronen abhängig. Die meisten Reaktionen gehen fast nur mit langsamen Neutronen (thermischen Neutronen) gut.

➔ Schnelle Neutronen lösen nur mit geringer Wahrscheinlichkeit Kernreaktionen aus. Sie übertragen aber beim Stoß mit einem Kern Energie und erzeugen so z.B. in Wasserstoffhaltigen Substanzen Rückstoßprotonen.

Nachweis

Da Neutronen nicht geladen sind haben sie keine Wechselwirkung mit der Elektronenhülle von Atomen. Man muss die Neutronen also zu Stößen mit Kernen veranlassen bei denen ionisierende Teilchenstrahlung entsteht. Diese kann man dann in der Nebelkammer oder im Geigerzähler nachweisen.

➔ Schnelle Neutronen

Für schnelle Neutronen gibt man zusätzlich Wasserstoff in den Geigerzähler (in der Nebelkammer ist sowieso Wasserstoff am Alkohol gebunden). Die ionisierenden Rückstoßprotonen kann man dann registrieren.

➔ Langsame Neutronen

Langsame Neutronen haben eine hohe Wahrscheinlichkeit Kernreaktionen auszulösen. Zum Beispiel:

$$^1_0n + {}^{10}_5B \rightarrow {}^7_3Li^{2-} + {}^4_2\alpha^{2+}$$

$$^1_0n + {}^3_2He \rightarrow {}^3_1H^{-} + {}^1_1p^{+}$$

$$^1_0n + {}^6_3Li \rightarrow {}^3_1H^{2-} + {}^4_2\alpha^{2+}$$ oder ganz extrem

$$^1_0n + {}^{235}_{92}U \quad \textit{gibt Spaltung}$$

Im Geigerzähler gibt man der Füllung BF_3-Gas oder $He3-Gas$ zu oder man kleidet die Innenseite mit Bor, Lithium oder U235 aus. Die Reaktionsprodukte sind stark ionisierend und können nachgewiesen werden. Am allerschönsten war das He3-Gas, weil ungiftig und nicht radioaktiv, das ist aber aus.

☺ Wenn man den Zähler in eine stark Wasserstoffhaltige Hülle einpackt (z.B. Kunststoff oder Paraffin) werden die schnellen Neutronen moderiert und können dann auch nachgewiesen werden.

Abschirmung

Neutronenschild

Ausreichend dicke Schichten können ganz alleine Neutronen abschirmen (Halbwertsdicken: PE 6,3cm; Wasser 7cm; Normalbeton 7,5cm). Gute Abschirmung erreicht man durch drei Schichten -> abbremsen(Wasserstoffhaltig, Kunststoff), einfangen (Cd oder B oder Li), Sekundärstrahlung abschirmen (Pb).

Aufgabe 12.193: Abi 1999

Im Jahr 1940 entdeckte G. Seaborg beim Beschuss von U238 mit Deuterium-Kernen (Deuteronen) das Isotop Pu238. Bei der auftretenden Kernreaktion werden zwei Neutronen emittiert. Das dabei entstehende Isotop zerfällt nach kurzer Zeit zu Pu238.

a) Stelle die Reaktionsgleichung der Kernreaktion und des anschließenden Zerfalls auf.

Das Auslösen der Kernreaktion gelang Seaborg erst, als er Deuteronen mit einer kinetischen Energie von mindestens 12,8 MeV verwendete.

b) Berechnen Sie die Mindestgeschwindigkeit der Deuteronen in nicht-relativistischer Näherung und begründen Sie qualitativ, warum die kinetische Energie der verwendeten Deuteronen einen gewissen Schwellwert überschreiten muss um die Reaktion zu ermöglichen. (Kontrolle: v = 35 Mm/s)

c) Um Deuteronen der erforderlichen kinetischen Energie von 12,8 MeV zu erzeugen, kan z.B. ein Zyklotron verwendet werden. Mit welcher Scheitelspannung muss ein Zyklotron betrieben werden, damit die Deuteronen die erforderliche Energie nach 130 Umläufen erreicht haben?

Bei der eingangs beschriebenen Kernreaktion werden sogenannte schnelle Neutronen erzeugt, die mit Hilfe eines geeigneten Geiger-Müller-Zählrohrs nachgewiesen werden sollen.

d) Erklären Sie Aufbau und Funktionsweise eines Geiger-Müller-Zählrohrs anhand einer beschrifteten Skizze. Begründen Sie, warum ein solches Zählrohr nicht ohne weiteres zum Nachweis von Neutronen verwendbar ist.

e) Es gibt Geiger-Müller-Zählrohre mit spezieller Gasfüllung, mit denen langsame Neutronen nachgewiesen werden können. Erläutern Sie, wie schnelle Neutronen prinzipiell abgebremst werden können.

Lösung:

a)

$${}_{1}^{2}H^{+} + {}_{92}^{238}U \rightarrow {}_{93}^{238}Np^{+} + 2\,{}_{0}^{1}n$$

$${}_{93}^{238}Np^{+} \rightarrow {}_{94}^{238}Pu^{2+} + e^{-} + \overline{\nu}_e$$

b) $E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12{,}8 \cdot 10^6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\, J}{2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\, kg}} = \underline{\underline{3{,}5 \cdot 10^7\, m/s}}$

Damit die positiv geladenen Deuteronen die Kernreaktion auslösen können, müssen sie in den positiv geladenen U238-Kern eindringen und dabei die Coulomb-Abstoßung überwinden oder wenigstens eine hinreichende Wahrscheinlichkeit für das Tunneln durch den Coulomb-Wall haben. Deshalb brauchen Sie eine Mindestenergie.

d) Zwei Beschleunigungen pro Umlauf: 12,8 MeV : 260 = 49 keV pro Beschleunigung. Da die Ladung der Deuteronen 1e beträgt ist die notwendige Beschleunigungsspannung 49 kV.

d) Aufbau und Funktionsweise siehe Skript.

Das Geiger-Müller-Zählrohr basiert auf der ionisierenden Wirkung von Strahlung. Neutronen sind nicht geladen und deshalb kaum ionisierend, also nicht ohne weiteres nachweisbar.

e) Das Abbremsen erfolgt durch Stöße mit möglichst leichten Kernen - z.B. Wasserstoff - die eine möglichst hohe Stoßwahrscheinlichkeit haben. Bei solchen Stößen gibt das Neutron einen Teil seiner kinetischen Energie ab und kann so nach mehreren Stößen bis auf thermische Energien abgebremst werden.

Aufgabe 12.194: Abi 2001

Für die Behandlung bestimmter Gehirntumore werden derzeit Studien zu Therapiemöglichkeiten mit Neutronen durchgeführt. Dabei wird dem Patienten ein borhaltiges Medikament verabreicht, das sich bevorzugt in Tumorzellen anreichert. Dann wird der Patient kontrolliert der Neutronenstrahlung eines Forschungsreaktors ausgesetzt. Dabei fängt ein ruhender B10-Kern mit großer Wahrscheinlichkeit ein thermisches Neutron ein und zerfällt dann sofort in einen stabilen Restkern, wobei ein Alpha-Teilchen mit der kinetischen Energie 1,47 MeV und ein Gamma-Quant mit der Energie 0,478 MeV emittiert werden.

Massen: m(B10) = 10,012937 u; m(?) = 7,016003

a) Geben Sie die Reaktionsgleichung an.

b) Berechnen Sie die kinetische Energie des entstandenen Restkerns. Die kinetische Energie des Neutrons kann hierbei vernachlässigt werden.

c) Schnelle Neutronen werden nach dem Eintritt in den Körper zunächst moderiert.

Erläutern Sie diesen Vorgang.

Das bei der Reaktion entstandene Alpha-Teilchen verliert auf seinem Weg im Körper etwa alle 0,2 nm durch Wechselwirkung mit Molekülen bzw. Atomen im Durchschnitt 40 eV seiner kinetischen Energie.

d) Schätzen Sie die Reichweite des Alpha-Teilchens ab. Zeigen Sie damit, dass die zerstörerische Wirkung des Alpha-Teilchens auf die Tumorzelle beschränkt bleibt, wenn die Aussendung des Alpha-Teilchens im Zentrum der Zelle mit dem Durchmesser 20 μm stattfindet.

<u>**Lösung:**</u>

a) $^{1}_{0}n + {}^{10}_{5}B \rightarrow {}^{11}_{5}B \rightarrow {}^{7}_{3}Li^{2-} + {}^{4}_{2}\alpha^{2+} + \gamma$

b) $Q=(m_{B10}+m_n-m_{Li7}-m_\alpha)\cdot c^2$

$Q=(10{,}012937+1{,}008665-7{,}016003-4{,}002603)\cdot uc^2=\underline{2{,}79\,MeV}$

$E_{kin}(Li)=2{,}79\,MeV-1{,}47\,MeV-0{,}478\,MeV=\underline{0{,}84\,MeV}$

c) Der Körper besteht größtenteils aus Wasser, was ein guter Moderator ist. Die Neutronen stoßen mit Protonen im Wasser und geben bei diesen Stößen immer wieder einen Teil ihrer Energie ab, bis sie schließlich eine ähnliche kinetische Energie wie die Protonen im Wasser besitzen (thermische Energie).

d) 1,47 MeV : 40 eV = 36750 ;   36 750 · 0,2 nm = 7,35 μm

D.h. nach 7,35 μm hat das Alpha-Teilchen seine ganze Energie abgegeben. Da dies nur ein halber Zelldurchmesser ist bleibt der Schaden auf die eine Zelle beschränkt.