



Grundwissen

10. Jahrgangsstufe

Mathematik

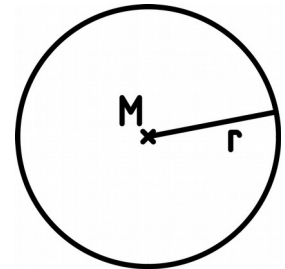
1 Kreis und Kugel

1.1 Kreissektor und Bogenmaß

Kreis

Umfang $U = 2 \cdot \pi \cdot r = \pi \cdot d$

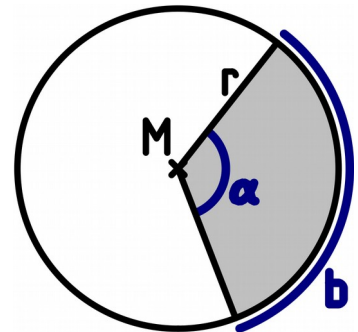
Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2$



Kreissektor mit Mittelpunktswinkel α

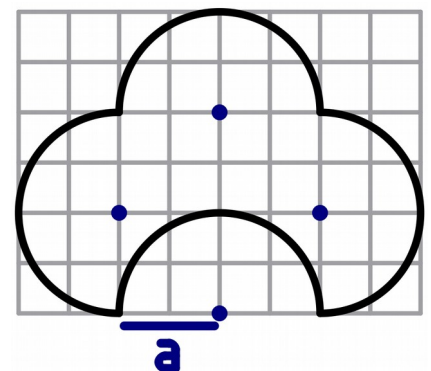
Bogenlänge $b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$

Flächeninhalt $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2$



Beispiel:

Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der Figur in Abhängigkeit von a!

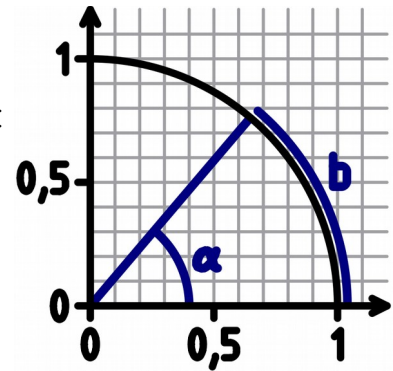


Bogenmaß

Das Bogenmaß b eines Winkels α ist die Länge des zugehörigen Bogens im Einheitskreis mit $r = 1$ LE. Es gilt:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{b}{2 \cdot \pi}$$

D.h.: $360^\circ \hat{=} 2 \cdot \pi$ $180^\circ \hat{=} \pi$



Gradmaß α	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß b	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Beispiele:

Wandle vom Gradmaß ins Bogenmaß um! $\alpha = 135^\circ$	Wandle vom Bogenmaß ins Gradmaß um ! $b = \frac{7}{15}\pi$
---	---

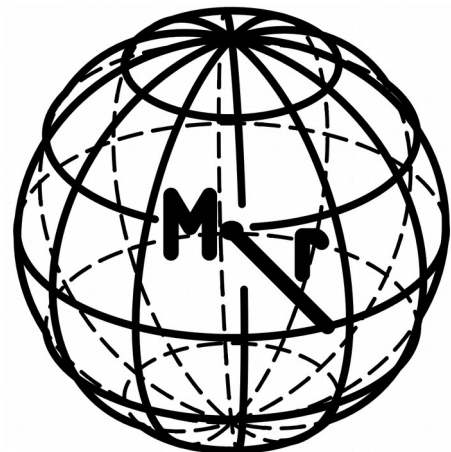
1.2 Volumen und Oberfläche der Kugel

Volumen:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Oberflächeninhalt:

$$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$



Beispiel:

Geg: $O_{Kugel} = 169\pi \text{ cm}^2$

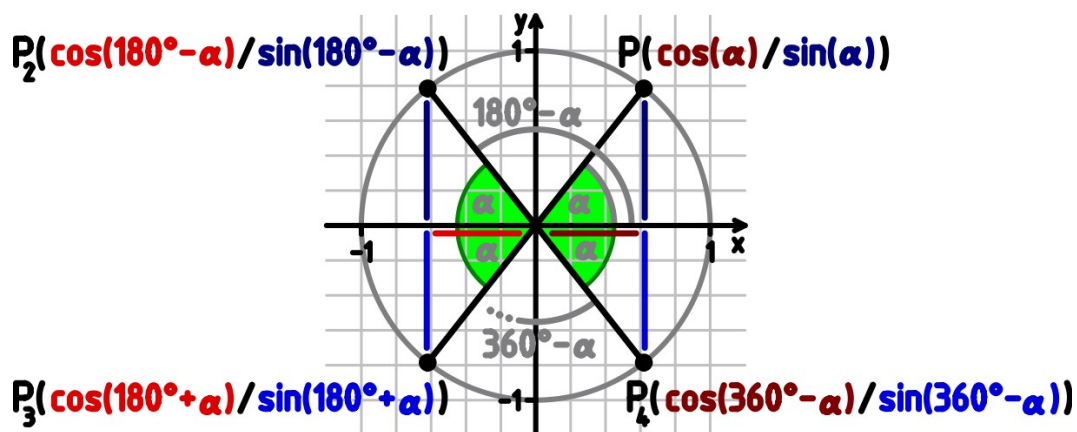
Ges: V_{Kugel}

2 Trigonometrie aus geometrischer und funktionaler Sicht

2.1 Sinus, Kosinus und Tangens am Einheitskreis

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$$



$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin(\alpha)$$

beziehungsweise im Bogenmaß

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$$

usw.

Vorzeichen:

	I. Quadrant 0° bis 90°	II. Quadrant 90° bis 180°	III. Quadrant 180° bis 270°	IV. Quadrant 270° bis 360°
$\sin(\alpha)$	+	+	-	-
$\cos(\alpha)$	+	-	-	+
$\tan(\alpha)$	+	-	+	-

Beispiel:

$\sin \alpha = 0,2588 \rightarrow \sin \alpha$ im I. und II. Quadranten positiv

Taschenrechner liefert den Winkel im I. Quadranten: $\alpha_1 \approx$

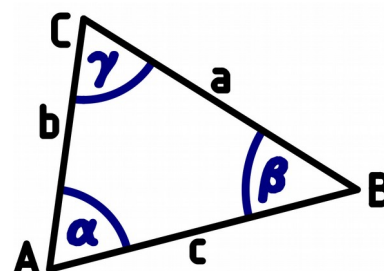
Winkel im Quadranten mit $\sin \alpha = \sin ($)

$\alpha_2 \approx$

2.2 Der Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck ABC gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} ; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} ; \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$



Achtung: Da der Sinus eines Winkels für Winkel zwischen 0° und 180° positiv ist, können sich zwei Lösungen ergeben.

Beispiel:

Geg: $b = 4,5 \text{ cm}$ $a = 6,0 \text{ cm}$ $\alpha = 62^\circ$

Ges: c, β, γ

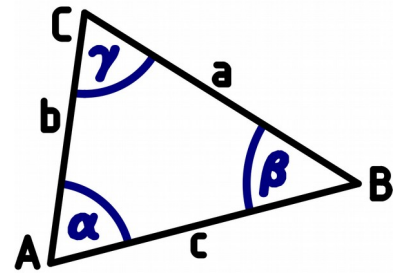
2.3 Der Kosinussatz

In einem beliebigen Dreieck ABC gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$



Beispiel:

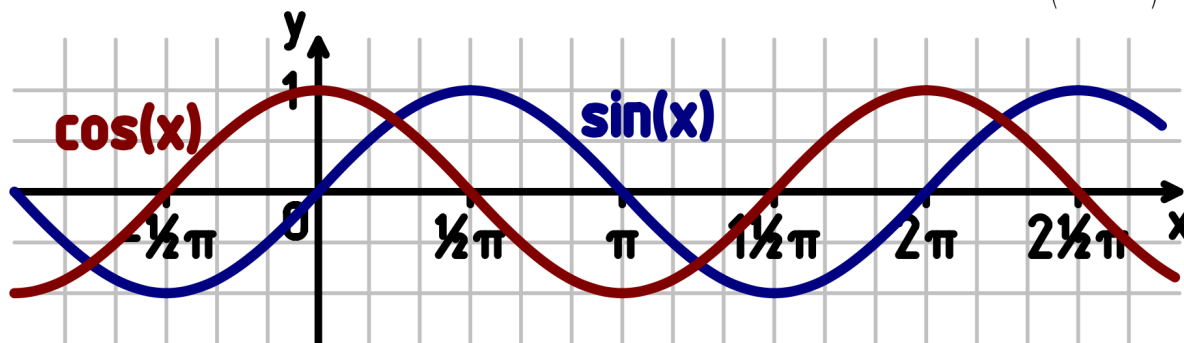
Geg: $b = 6,0 \text{ cm}$, $c = 9,0 \text{ cm}$, $\alpha = 65^\circ$

Ges: a, β, γ

2.4 Trigonometrische Funktionen

	Sinusfunktion	Kosinusfunktion
Funktionsterm	$f(x) = \sin x$	$g(x) = \cos x$
Definitionsmenge	$D_f = \mathbb{R}$	$D_f = \mathbb{R}$
Wertemenge	$W_f = [-1; 1]$	$W_f = [-1; 1]$
Periode	$2\pi \rightarrow \sin(x + 2\pi) = \sin x$	$2\pi \rightarrow \cos(x + 2\pi) = \cos x$
Symmetrie	Punktsymmetrisch zum Ursprung $\rightarrow \sin x = -\sin(-x)$	Achsensymmetrisch zum Ursprung $\rightarrow \cos x = \cos(-x)$

Zusammenhang zwischen der Sinus- und der Kosinusfunktion: $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$



2.5 Allgemeine Sinusfunktion ...

... lässt sich durch $f: f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$; $a, b \neq 0$ beschreiben.

Einfluss der Parameter auf den Funktionsgraphen $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$

Periode: $\frac{2\pi}{b}$

Amplitude: $|a| + d$

a) Stauchung in x-Richtung um b

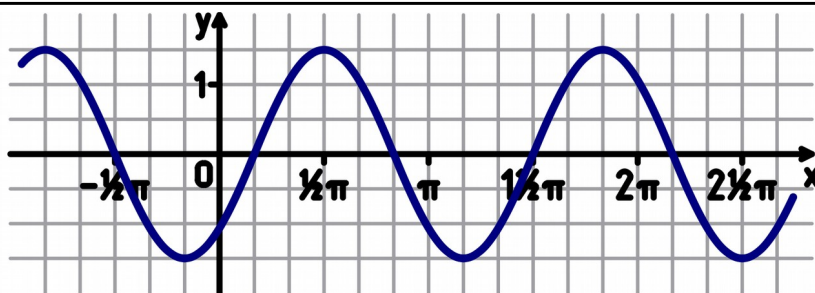
b) Verschiebung in x-Richtung um $\frac{c}{b}$

c) Streckung in y-Richtung um $|a|$

d) Verschiebung in y-Richtung um d

Beispiel:

Bestimme die zu dem Graphen gehörige Funktionsgleichung der Sinusfunktion
 $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$



3 Exponentialfunktion und Logarithmus

3.1 Lineares und exponentielles Wachstum

	Lineares Wachstum	Exponentielle Wachstum
Gleichung	$f(x) = a \cdot x + b$	$g(x) = b \cdot a^x$
Bedeutung Parameter	b → Anfangswert a → konstanter Wachstumssummand	b → Anfangswert a → prozentualer Wachstumsfaktor
Beispiel	Monatliches Sparen eines bestimmten Betrages	Zinseszins, Radioaktiver Zerfall
Graph		
Eigenschaften	- $a = f(x+1) - f(x)$ - Graph: Gerade - $f(0) = b$	- $a = \frac{f(x+1)}{f(x)}$ - $f(0) = b$

Beispiel:

Finde bei den zwei Tabellen heraus, ob es sich um lineares oder exponentielles Wachstum handelt und gib eine mögliche Wachstumsfunktion an!

x	0	1	2	3
y	6	9	12	15

x	1	2	3	4
y	2	4	8	16

3.2 Exponentialfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x \quad a \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}; \quad b \in \mathbb{R}^+$$

- Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$

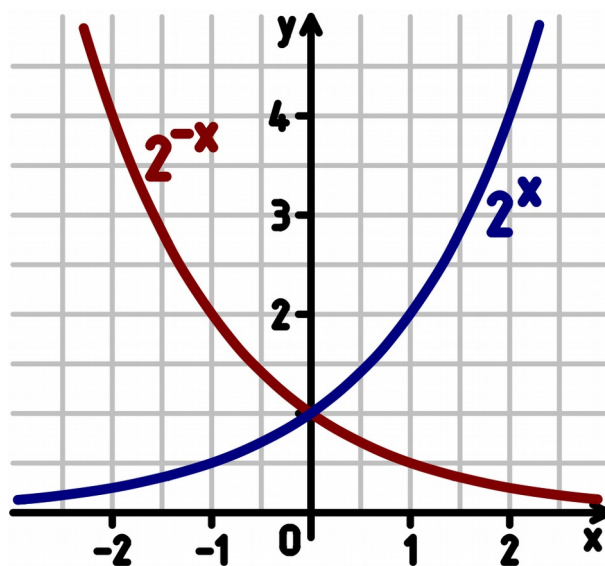
- Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}^+$

- Horizontale Asymptote: $y = 0$

- Faktor b bewirkt eine Streckung oder Stauchung in y-Richtung

- $P(0/b) \in G_f$

- $f(x) = b \cdot a^x$ und $g(x) = b \cdot a^{-x} = \frac{b}{a^x}$ sind achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse

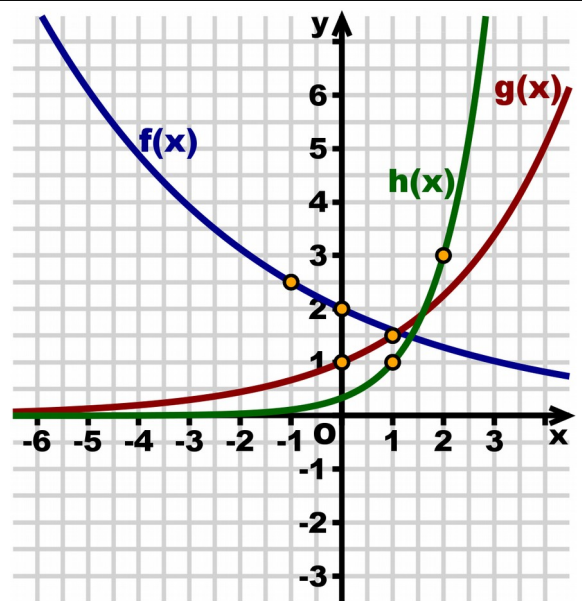


- $a < 1$: exponentielle Abnahme (fallender Graph)

- $a > 1$: exponentielle Zunahme (steigender Graph)

Beispiele:

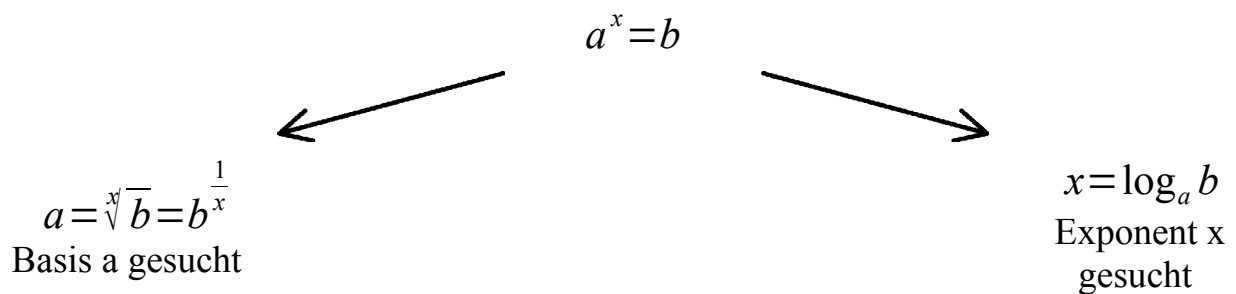
Bestimme die Funktionsterme! Als Hilfe sind einige Punkte, die genau auf Kästchenecken liegen, markiert.



3.3 Rechnen mit Logarithmen

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Der Logarithmus von b zur Basis a ist diejenige Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.





Rechenregeln $(a, b, c \in \mathbb{R}^+, a \neq 1)$

$$(1) \quad \log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a (a^c) = c$$

$$(2) \quad \log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$(3) \quad \log_a (b : c) = \log_a b - \log_a c$$

$$(4) \quad \log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$$

$$(5) \quad \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$$

Beispiele:

Fasse die folgenden Terme zu einem Logarithmus zusammen!

a) $4 \cdot \log_a b - \log_a (bc) =$

b) $\log_a b - \log_a \sqrt{bc} =$

c) $\log_a (2b) - 2 \log_a b =$

d) $\log_a b + 3 =$

3.4 Exponentialgleichungen

In einer Exponentialgleichung tritt die Unbekannte nur im Exponenten auf. Einfache Exponentialgleichungen können durch Potenzgesetze und Logarithmieren nach dem gesuchten Exponenten aufgelöst werden.

$$2^{x+1} \cdot 3^x = 72 \cdot 5^{x+2} \quad \text{Potenzgesetze nutzen; aufräumen}$$

$$2^x \cdot 2 \cdot 3^x = 72 \cdot 5^x \cdot 5^2 \quad \rightarrow \text{alle "x" auf eine Seite}$$

$$\frac{2^x \cdot 3^x}{5^x} = \frac{72 \cdot 5^2}{2} \quad \text{Gesetz: } a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \text{ anwenden}$$

$$\left(\frac{2 \cdot 3}{5}\right)^x = \left(\frac{72 \cdot 5^2}{2}\right) \quad \Rightarrow x = \log_{\left(\frac{6}{5}\right)}\left(\frac{72 \cdot 5^2}{2}\right)$$

4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

4.1 Ereignisse und Vierfeldertafel

Die Ergebnismenge Ω wird durch zwei Ereignisse A und B in vier Teilmengen zerlegt:

$$A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \bar{A} \cap \bar{B}$$

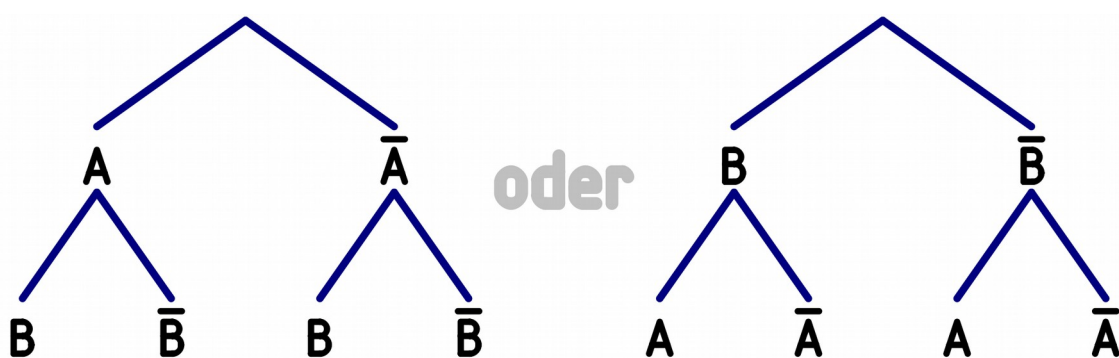
Diese Zerlegung kann durch eine Vierfeldertafel dargestellt werden:

	A	$\bar{A}$	
B	$ A \cap B $	$ \bar{A} \cap B $	$ B $
$\bar{B}$	$ A \cap \bar{B} $	$ \bar{A} \cap \bar{B} $	$ \bar{B} $
	$ A $	$ \bar{A} $	$ \Omega $

4.2 Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Aus einer Vierfeldertafel resultieren immer zwei mögliche Baumdiagramme, je nachdem wie die erste Stufe des Zufallsexperimentes gewählt wird.

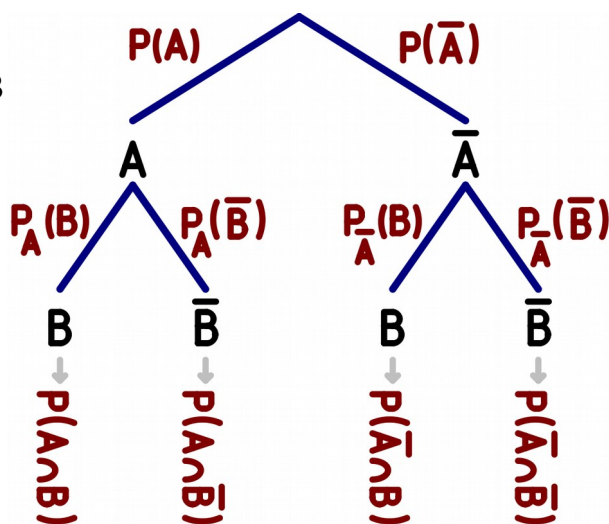
	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1



4.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist. Es fallen somit alle Ergebnisse des zweistufigen Zufallsexperimentes weg, die nicht zu A gehören und für das Ereignis B sind nur noch die Ergebnisse günstig, die zu der Menge $A \cap B$ gehören.

Ist das Ereignis A eingetreten, dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses B :



$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})}$$



Beispiel:

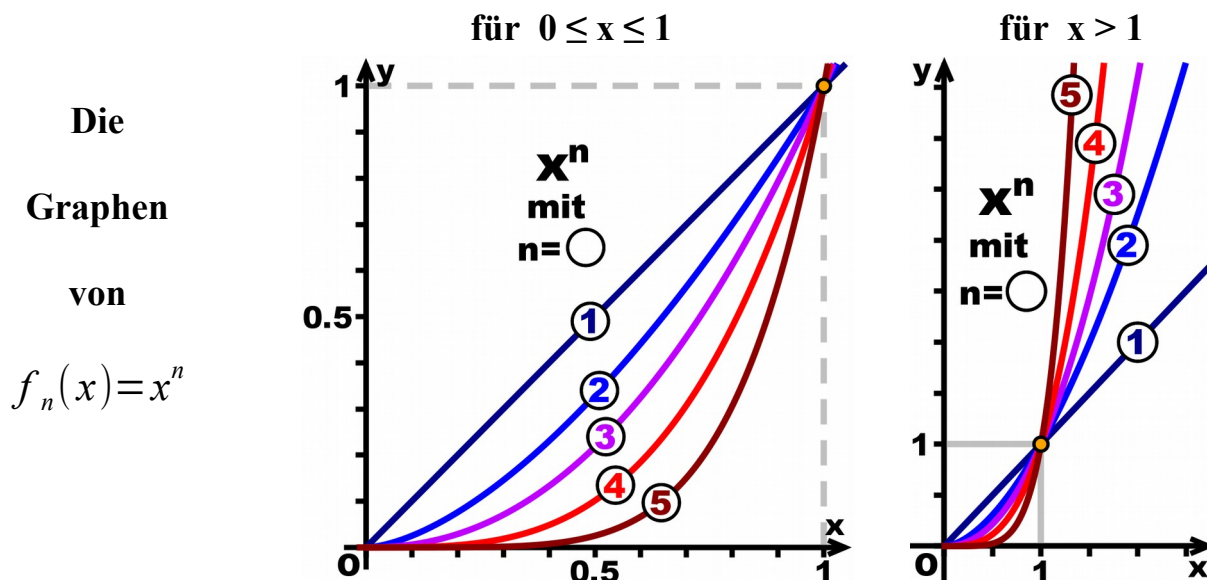
Am Ende des Schuljahres haben 15% aller Schüler eine gute Mathematiknote; 25% haben eine gute Chemienote und 10% haben eine gute Note in Mathe sowie in Chemie. Ein Schüler wird zufällig ausgewählt.

- Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass der Schüler eine gute Chemienote bekommt, wenn er gut in Mathe ist!
- Der Schüler ist gut in Chemie. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er auch eine gute Mathenote bekommt.
- Ermittle die Wahrscheinlichkeit, dass er eine gute Chemie- oder Mathenote hat!

M: gute Mathenote ; C: gute Chemienote

5 Ganzrationale Funktionen

5.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten



Allgemeine Potenzfunktionen: $f(x) = a \cdot x^n$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$

	gerader Exponent	ungerader Exponent
Graph		
Wertemenge	$W = \mathbb{R}_0^+$ für $a > 0$ $W = \mathbb{R}_0^-$ für $a < 0$	$W = \mathbb{R}$
Symmetrie	Achsensymmetrie zur y-Achse	Punktsymmetrie zum Ursprung
Verlauf	- von links oben nach rechts oben für $a > 0$ - von links unten nach rechts unten für $a < 0$	- von links unten nach rechts oben für $a > 0$ - von links oben nach rechts unten für $a < 0$

5.2 Eigenschaften ganzrationaler Funktionen

Ganzrationale Funktion: $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x^1 + a_0$

Grad: n (höchster vorkommender Exponent)

Verhalten: für betragsmäßig große x -Werte wird bestimmt durch den Summanden mit dem höchsten vorkommenden Exponenten

5.3 Nullstellen und Faktorisieren

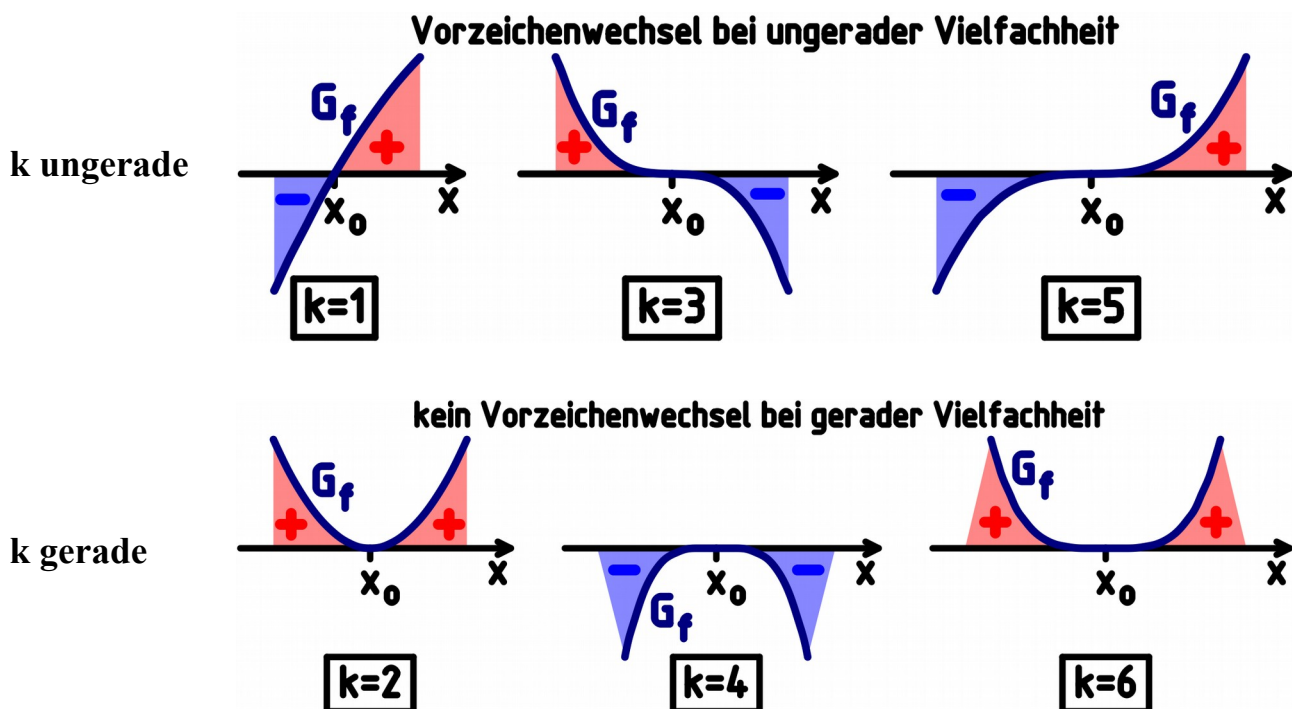
Eine ganzrationale Funktion n -ten Grades besitzt höchstens n Nullstellen. Dabei können einzelne Nullstellen mehrfach auftreten (einfache, doppelte, dreifache, ... Nullstelle).

x_0 heißt k -fache Nullstelle von $f(x)$, wenn man $f(x)$ in der Form

$$f(x) = (x - x_0)^k \cdot g(x)$$

mit $g(x_0) \neq 0$ schreiben kann.

Die Vielfachheit k der Nullstelle gibt an, wie G_f bei der Nullstelle verläuft:

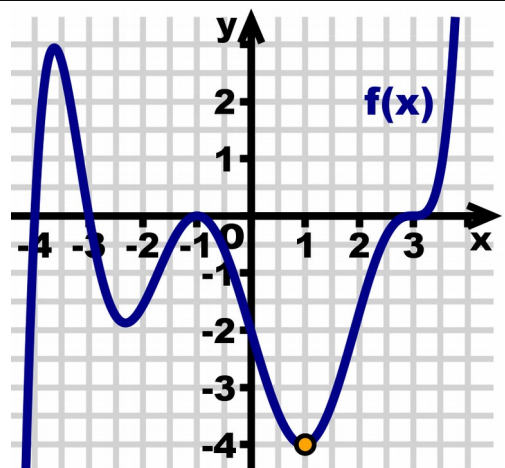


Somit kann eine ganzrationale Funktion mit Hilfe ihrer Nullstellen beschrieben werden.

Beispiel:

Bestimme den Funktionsterm der ganzrationalen Funktion f zu dem gegebenen Graphen!

Die Nullstellen sind ohne Ausnahme ganzzahlig und der Grad der Funktion beträgt 7. Der Punkt $P(1/-4)$ liegt auf dem Graphen.





Rechnerisch findet man die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion höheren Grades durch "erraten" einer Nullstelle und anschließender Polynomdivision.

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3x - 6$

Bestimme alle Nullstellen der Funktion und fertige eine Vorzeichentabelle an!

6 Funktionsuntersuchungen

6.1 Einfluss von Parametern auf den Verlauf von Funktionen

$$g(x) = a \cdot f(bx + c) + d = a \cdot f\left(b \cdot \left(x + \frac{c}{b}\right)\right) + d$$

Parameter	Auswirkung auf den Graphen g(x) ausgehend von f(x)	
a	$0 < a < 1$	Stauchung in y-Richtung von der x-Achse aus mit dem Streckfaktor a
	$a > 1$	Streckung in y-Richtung von der x-Achse aus mit dem Streckfaktor a
	$-1 < a < 0$	Stauchung in y-Richtung von der x-Achse aus mit dem Streckfaktor a und Spiegelung an der x-Achse
	$a < -1$	Streckung in y-Richtung von der x-Achse aus mit dem Streckfaktor a und Spiegelung an der x-Achse
b	$b > 0$	Streckung in x-Richtung von der y-Achse aus mit dem Streckfaktor $\frac{1}{b}$
	$b < 0$	Streckung in x-Richtung von der y-Achse aus mit dem Streckfaktor $\frac{1}{b}$ und Spiegelung an der y-Achse
c	$c < 0$	Verschiebung in x-Richtung um c nach rechts
	$c > 0$	Verschiebung in x-Richtung um c nach links
d	$d < 0$	Verschiebung in y-Richtung um c nach unten
	$d > 0$	Verschiebung in y-Richtung um c nach oben

**Beispiel:**

Gegeben ist die Funktion $g(x) = -3 \cdot f\left(\frac{1}{2}x - 2\right) + 1$

Beschreibe, wie der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht!

6.2 Symmetrie von Funktionsgraphen

Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$

Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

Beispiel:

Untersuche die Funktion $f(x) = \frac{5x^3 + \sin x}{8x - 2x^3}$ auf Symmetrieeigenschaften!

6.3 Grenzwerte im Unendlichen

Nähern sich die Funktionswerte $f(x)$ für $x \rightarrow +\infty$ beziehungsweise für $x \rightarrow -\infty$ der Zahl a beliebig genau an, dann heißt a Grenzwert der Funktion. Die Funktion konvergiert gegen die Zahl a . Die Gerade $y=a$ ist horizontale Asymptote des Graphen von f .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$$

Funktionen, die keinen Grenzwert besitzen, heißen divergent.

Beispiele:

Bestimme die Grenzwerte der folgenden gebrochen rationalen Funktionen!

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3-7x}{4x+1} \right) =$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{0,1x^4-2}{2-0,2x^5} \right) =$